A. Etude des solides déformables globalement

A.I. Objectifs

Toute pièce réelle est déformable dans un domaine spécifique et peut être détériorée lorsque les contraintes qu'elle subit dépassent une valeur critique. Ce chapitre a pour but d'introduire l'analyse de poutres en résistance des matériaux dans le but de les dimensionner afin de répondre à un cahier des charges, selon des critères de déformation et/ou de dégradation en fonction de leur chargement extérieur.

Dans ce chapitre, les pièces seront donc considérées déformables, et les mécanismes composés de plusieurs poutres seront dénommées structures. La résistance des matériaux s'insère dans un domaine d'étude plus vaste dénommé « élasticité » ou « mécanique des milieux continus ». En RDM, la théorie développée est simple car elle repose sur un nombre important d'hypothèses portant sur

- Le type de solide déformé
- Le champ des déplacements
- La modélisation des efforts

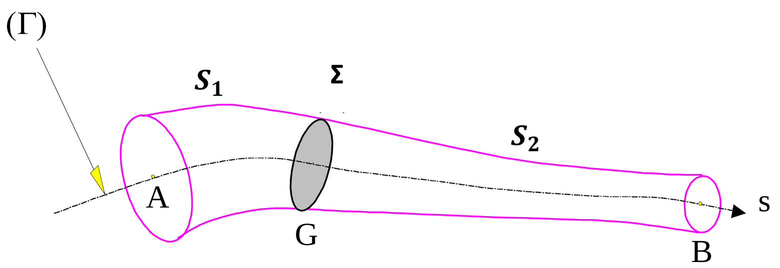
D'un point de vue expérimental, l'extensométrie et la photoélasticité dont des moyens d'investigation des déformations des structures.

Pour des pièces de forme complexe, les hypothèses de ce chapitre ne peuvent s'appliquer et il faudra faire appel à des logiciels basés sur la méthode des éléments finis par exemple.

A.II. Poutres

A.II.1 Définitions

Le solide élémentaire étudié en RDM s'appelle une poutre. C'est un solide dont la dimension longitudinale est importante devant les dimensions transversales. Une structure est un assemblage de poutres, reliées par des liaisons.



Une poutre est le solide engendré par une surface plane Σ dont le centre de gravité G décrit une portion de courbe Γ orientée par son abscisse curviligne s (par exemple de A vers B).

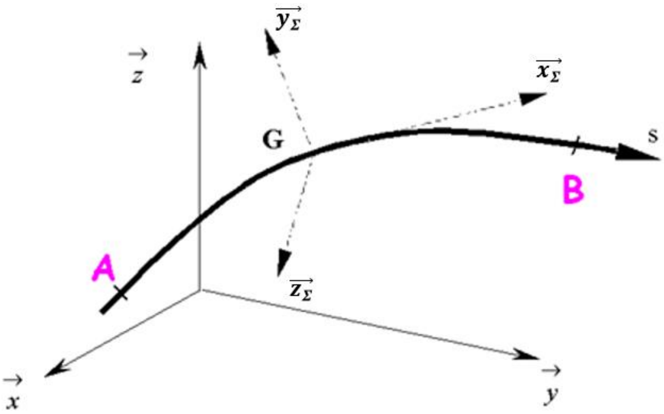
Une poutre est représentée par une ligne.

La section Σ reste toujours perpendiculaire à Γ.

- s est l'abscisse curviligne du point G
- A est l'origine de la poutre
- B est l'extrémité de la poutre
- Γ est la ligne moyenne de la poutre
- Σ est la section droite de la poutre en G, son centre
- S est la poutre
- $\overline{S}$ sont les éléments du milieu extérieur
- S_1 est la partie de la poutre définie par l'ensemble des points d'abscisse inférieure ou égale à s.
- S_2 est la partie de la poutre définie par l'ensemble des points d'abscisse supérieure ou égale à s.

Le repère général $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est un repère fixe, lié au bâti du mécanisme par exemple. Il joue un rôle dans la détermination des efforts sur la poutre. Il ne doit toutefois pas être confondu avec le repère local de la poutre au point G, $(G, \overrightarrow{x_\Sigma}, \overrightarrow{y_\Sigma}, \overrightarrow{z_\Sigma})$, orthonormé, défini en tout point G de la ligne moyenne, tel que :

- $\overrightarrow{x_\Sigma} = \frac{d\overrightarrow{OG}}{ds}$, tangent à Γ en G
- $\overrightarrow{y_\Sigma}, \overrightarrow{z_\Sigma}$ sont les vecteurs unitaires portés par les axes principaux d'inertie de la section Γ en G. Ce sont en général les directions associées aux axes de symétrie pour les sections couramment fabriquées.

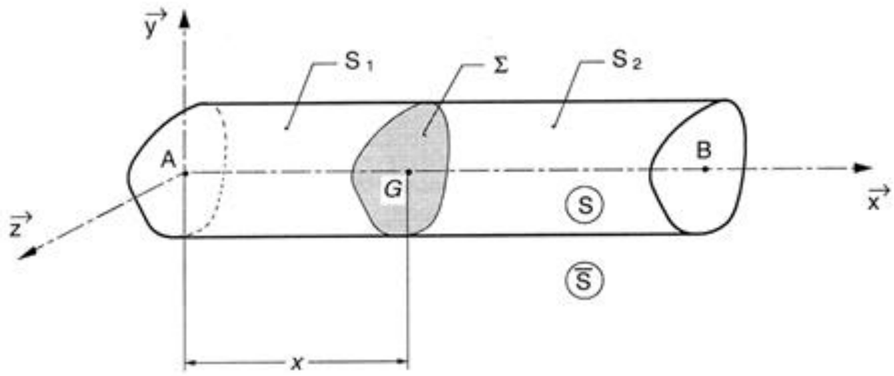


Il existe différents types de poutres que l'on peut classer selon:

- la forme de Γ : droite, plane
- l'évolution de la section : constante, variable

Une poutre est dite plane si sa ligne moyenne est comprise dans un plan. Si ce plan est plan de symétrie de la poutre, on dit qu'elle est à plan médian.

Une poutre est dite droite si sa ligne moyenne est une droite. Dans ce cas, les deux bases $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et $(\overrightarrow{x_\Sigma}, \overrightarrow{y_\Sigma}, \overrightarrow{z_\Sigma})$ ont le même vecteur $\vec{x}$ et x est l'abscisse curviligne s du point G.

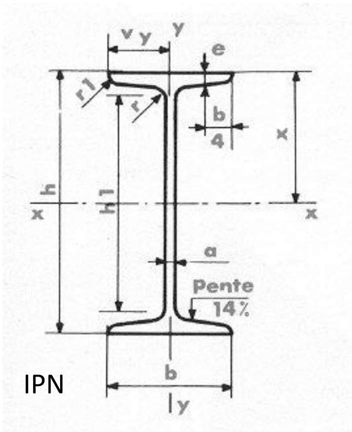


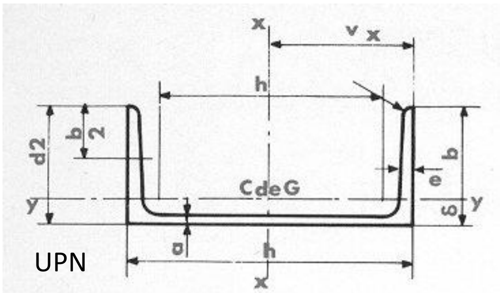
On a donc :

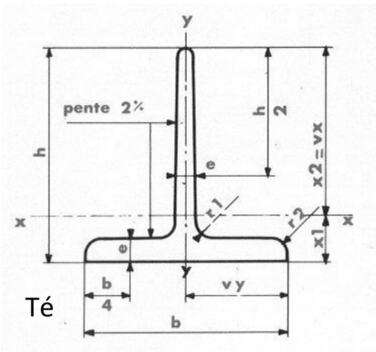
$$\overrightarrow{AG} = x\vec{x}$$

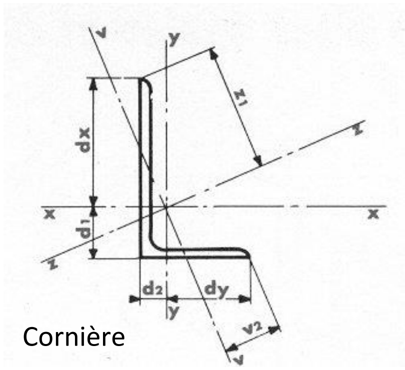
A.II.2 Exemples

Exemples de sections de profilés vendus dans le commerce :









A.II.3 Hypothèses

La résistance des matériaux est un outil simple et puissant mais présente un certain nombre d'hypothèses qu'il faut connaître.

A.II.3.a Géométrie

Il faut que les poutres respectent 3 hypothèses :

- La longueur de la poutre est grande devant les dimensions transversales (solide élancé).
- Le rayon de courbure de la ligne moyenne est grand par rapport aux dimensions de la section droite.
- Le gradient de variation de la section droite S doit être faible (pas d'épaulement par exemple).

Plus ces hypothèses seront respectées, plus les résultats seront proches de la réalité.

A.II.3.b Matériau

On suppose que les matériaux de construction des poutres possèdent les propriétés suivantes :

- Continus : discontinuités microscopiques négligées
- Homogènes : même constitution en tout point
- Isotropes : mêmes propriétés physiques dans les 3 directions de l'espace

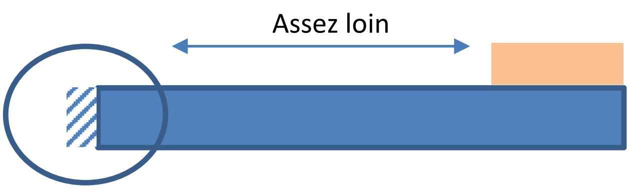
A.II.3.c Déformations

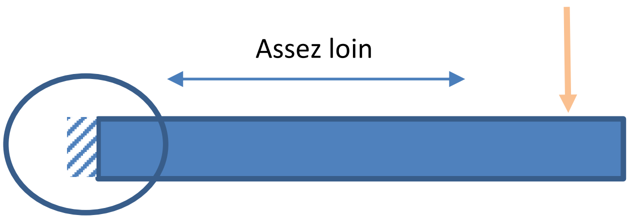
Les résultats de la théorie des poutres sont valables dans le cadre de petites déformations.

A.II.3.d Conditions aux limites - Saint Venant

L'état des sollicitations dans la section droite de centre G, dans une région suffisamment éloignée des points d'applications des charges extérieures appliquées à la poutre, ne dépend pas, pour les mêmes torseurs associés à ces charges, de la manière avec lesquelles elles sont appliquées.

Exemple :Effort ou charge répartie de même résultante





A.II.3.e Hypothèse de Navier-Bernoulli

Dans les conditions de petites déformations, les sections planes Σ, normales à la ligne moyenne avant chargement, demeurent planes et normales à la ligne moyenne après chargement (déformation).

A.II.4 Propriétés géométriques des sections droites

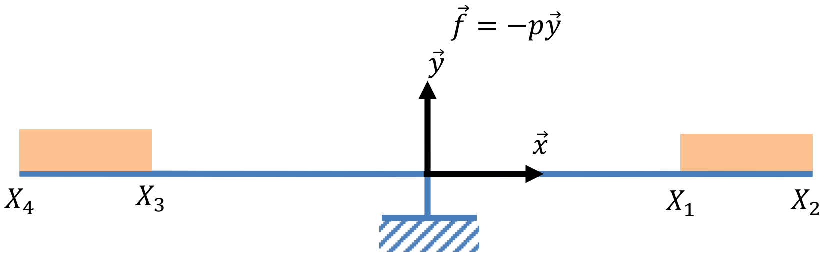
Une section droite Σ est caractérisée par ses dimensions transversales. Les grandeurs qui lui sont associées sont les caractéristiques de la section :

- Moment statique
- Position du centre de la surface
- Moments quadratiques polaires et moment produit

A.II.4.a Préliminaires

Dans cette partie, il va falloir calculer des intégrales. Attention, les bornes des intégrales doivent toujours être prises dans le sens des vecteurs de base, c'est-à-dire entre des coordonnées croissantes.

Exemple : Soit une charge répartie du type :



La résultante de cette action sur la poutre vaut :

$$\int_{X_1}^{X_2} -p\vec{y} + \int_{X_4}^{X_3} -p\vec{y}$$

A.II.4.b Centre G d'une surface

A.II.4.b.i Moment statique

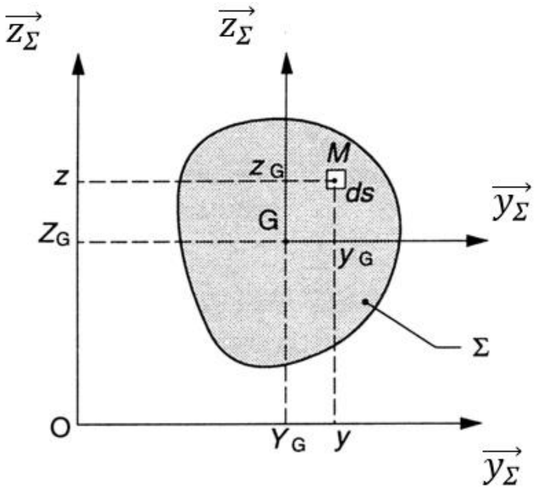
Une section de poutre est repérée par ses vecteurs de base $(\overrightarrow{y_\Sigma}, \overrightarrow{z_\Sigma})$. Son centre G est repéré à l'aide des coordonnées Y_G et Z_G par rapport à un point O quelconque telles que :

$$\overrightarrow{OG} = Y_G \overrightarrow{y_\Sigma} + Z_G \overrightarrow{z_\Sigma}$$

Un point quelconque M de Σ est repéré par :

$$\overrightarrow{OM} = y\overrightarrow{y_\Sigma} + z\overrightarrow{z_\Sigma} = (Y_G + y_G)\overrightarrow{y_\Sigma} + (Z_G + z_G)\overrightarrow{z_\Sigma}$$

y_G et z_G sont donc les coordonnées de M dans le repère $(G, \overrightarrow{y_\Sigma}, \overrightarrow{z_\Sigma})$.



L'élément de surface autour de M est noté dS.

On définit le moment statique $A(O,\overrightarrow{y_\Sigma})$ de la surface Σ, par rapport à l'axe $(O,\overrightarrow{y_\Sigma})$ par :

$$A(O,\overrightarrow{y_\Sigma}) = \int_\Sigma z dS$$

On définit le moment statique $A(O,\overrightarrow{z_\Sigma})$ de la surface Σ, par rapport à l'axe $(O,\vec{z}_\Sigma)$ par :

$$A(O,\vec{z}_\Sigma) = \int_\Sigma y dS$$

Un moment statique s'exprime en m^3.

A.II.4.b.ii Coordonnées du centre G

On appelle centre de la surface Σ le point unique G défini par la relation :

$$\int_\Sigma \overrightarrow{GM} dS = \vec{0}$$

Soit :

$$\int_\Sigma y_G dS = 0$$

$$\int_\Sigma z_G dS = 0$$

De plus, on montre que : $\int_\Sigma \overrightarrow{OM} dS = S\overrightarrow{OG}$

Démonstration :

$$\int_\Sigma \overrightarrow{OM} dS = \int_\Sigma (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}) dS = \int_\Sigma \overrightarrow{OG} dS + \int_\Sigma \overrightarrow{GM} dS = \int_\Sigma \overrightarrow{OG} dS = \overrightarrow{OG} \int_\Sigma dS = S\overrightarrow{OG}$$

D'où :

$$SY_G = \int_\Sigma y dS = A(O,\vec{z}_\Sigma)$$

$$SZ_G = \int_\Sigma z dS = A(O,\vec{y}_\Sigma)$$

Ou encore :

$$Y_G = \frac{1}{S}\int_\Sigma y dS = \frac{1}{S} A(O,\vec{z}_\Sigma)$$

$$Z_G = \frac{1}{S}\int_\Sigma z dS = \frac{1}{S} A(O,\vec{y}_\Sigma)$$

A.II.4.b.iii Remarques

- S'il existe un ou plusieurs axes de symétrie pour la surface étudiée, le centre se trouve sur ces axes.
    - S'il y a 2 axes de symétrie, G est à leur intersection.
    - S'il y a un seul axe de symétrie, et si celui-ci contient $\overrightarrow{y_\Sigma}$ ou $\overrightarrow{z_\Sigma}$, on aura respectivement $A(G,\vec{z}_\Sigma)=0$ ou $A(G,y_\Sigma)=0$, il suffira alors de calculer l'autre moment statique.
- Lorsque l'on connaît le centre de différentes portions Σ_1, Σ_2, …, Σ_n de Σ telles que

$$\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2\cup\ldots\cup\Sigma_n$$

$$\Sigma_i\cap\Sigma_j=\emptyset\ \forall i\neq j$$

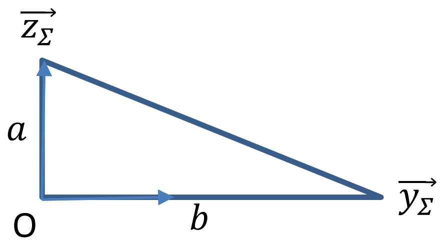
On a alors :

$$\overrightarrow{OG}=\frac{S_1\overrightarrow{OG_1}+S_2\overrightarrow{OG_2}+\cdots+S_n\overrightarrow{OG_n}}{S_1+S_2+\cdots+S_n}$$

Remarque : S'il existe i et j tels que $\Sigma_i\cap\Sigma_j\neq\emptyset$, la démarche sera applicable en considérant en plus de tous les calculs précédents la partie commune avec une surface négative.

A.II.4.b.iv Exemple

Soit une section triangulaire :



On ne voit aucun axe de symétrie.

On pose O arbitrairement. Soit un point M courant tel que $\overrightarrow{OM}=y\overrightarrow{y_\Sigma}+z\overrightarrow{z_\Sigma}$

$$S=\frac{ab}{2}$$

$$dS=dydz$$

$$y_G=\frac{1}{S}\int_\Sigma ydS=\frac{2}{ab}\int_{y=0}^{b}\left[\int_{z=0}^{a-\frac{a}{b}y}dz\right]ydy=\frac{2}{ab}\int_0^b\left[a-\frac{a}{b}y\right]ydy=\frac{2}{ab}\int_0^b\left[ay-\frac{a}{b}y^2\right]dy$$

$$y_G=\frac{2}{ab}\left[a\frac{b^2}{2}-\frac{a}{b}\frac{b^3}{3}\right]=\frac{2}{b}\left[\frac{b^2}{2}-\frac{b^2}{3}\right]=\frac{2}{b}\left[\frac{3b^2-2b^2}{6}\right]=\frac{b}{3}$$

$$z_G=\frac{1}{S}\int_\Sigma zdS=\frac{2}{ab}\int_{z=0}^{a}\left[\int_{y=0}^{b-\frac{b}{a}z}dy\right]zdz=\frac{2}{ab}\int_0^a\left[b-\frac{b}{a}z\right]zdz=\frac{2}{ab}\int_0^a\left[bz-\frac{b}{a}z^2\right]dz$$

$$z_G = \frac{2}{ab}\left[b\frac{a^2}{2} - \frac{b}{a}\frac{a^3}{3}\right] = \frac{a}{3}$$

A.II.4.c Moments quadratiques polaires et produit

A.II.4.c.i Définitions

Le moment quadratique $I(O,\vec{y}_\Sigma)$ de la surface Σ par rapport à l'axe $(O,\vec{y}_\Sigma)$ est défini par :

$$I(O,\vec{y}_\Sigma) = I_{O_{y_\Sigma}} = \int_\Sigma z^2 dS$$

Le moment quadratique $I(O,\vec{z}_\Sigma)$ de la surface Σ par rapport à l'axe $(O,\vec{z}_\Sigma)$ est défini par :

$$I(O,\vec{z}_\Sigma) = I_{O_{z_\Sigma}} = \int_\Sigma y^2 dS$$

Le moment quadratique polaire $I(O)$ de la surface Σ est défini par :

$$I(O) = I_O = \int_\Sigma (y^2 + z^2) dS = I(O,\vec{y}_\Sigma) + I(O,\vec{z}_\Sigma)$$

Le moment produit $I(O,\vec{y}_\Sigma,\vec{z}_\Sigma)$ de la surface Σ par rapport aux axes $(O,\vec{y}_\Sigma)$ et $(O,\vec{z}_\Sigma)$ de son plan est défini par :

$$I(O,\vec{y}_\Sigma,\vec{z}_\Sigma) = \int_\Sigma yz dS$$

Un moment quadratique s'exprime en m^4.

A.II.4.c.ii Remarques

- Si $(O,\vec{y}_\Sigma)$ et $(O,\vec{z}_\Sigma)$ sont orthogonaux
    - si l'un d'eux est axe de symétrie de Σ
      $$I(O,\vec{y}_\Sigma,\vec{z}_\Sigma) = 0$$
    - si $(O,\vec{y}_\Sigma)$ est axe de symétrie de Σ
      $$\forall M \epsilon (O,\vec{y}_\Sigma), I(M,\vec{y}_\Sigma) = I(O,\vec{y}_\Sigma)$$
    - si (O,z_Σ) est axe de symétrie de Σ
      $$\forall M \epsilon (O,\vec{z}_\Sigma), I(M,\vec{z}_\Sigma) = I(O,\vec{z}_\Sigma)$$
- Dans le cas de surfaces présentant une géométrie cylindrique, pensez à passer par les coordonnées cylindriques

$$\int_\Sigma (y^2 + z^2) dS = \int_\Sigma r^2 dS$$

$$\int_\Sigma y^2 dS = \int_\Sigma z^2 dS = \frac{1}{2}\int_\Sigma r^2 dS$$

A.II.4.c.iii Moments quadratiques par rapport à G

Dans la suite, ce seront majoritairement les moments quadratiques des sections droites des poutres par rapport à des axes passant par le centre G qui nous intéresseront.

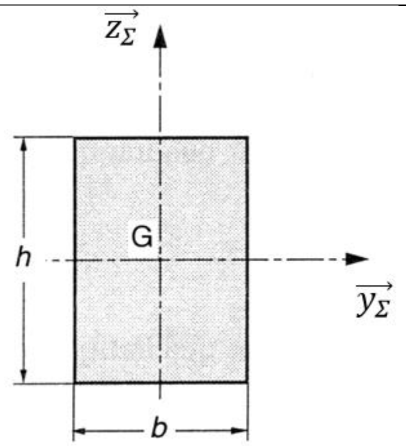
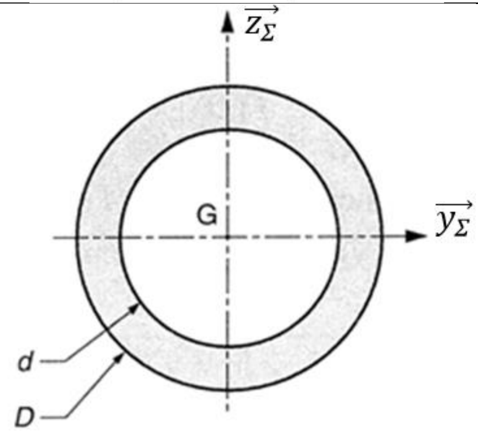
Ils seront donc notés :

$$I(G,\vec{y}_\Sigma) - I(G,\vec{z}_\Sigma) - I(G)$$

Il sera donc nécessaire, dans un premier temps, de déterminer la position de G par rapport à un point O arbitrairement choisi, puis :

- soit de faire les intégrales dans le repère centré sur G
- soit de faire, dans le cas de présence de symétries, et uniquement pour les moments quadratiques concernés, les intégrales centrées en un point A tel que
  - si $(G,\vec{y}_\Sigma)$ est axe de symétrie de Σ, A est quelconque sur l'axe $(G,\vec{y}_\Sigma)$ pour le calcul de $I(G,\vec{y}_\Sigma)$
  - si $(G,\vec{z}_\Sigma)$ est axe de symétrie de Σ, A est quelconque sur l'axe $(G,\vec{z}_\Sigma)$ pour le calcul de $I(G,\vec{z}_\Sigma)$
- soit de faire les intégrales en O et d'utiliser le théorème de Huygens

A.II.4.c.iv Exemples

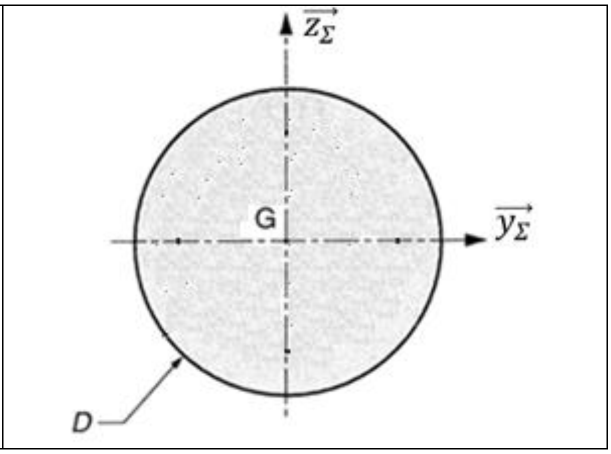
$I(G,\overrightarrow{y_\Sigma}) = \dfrac{bh^3}{12}$ $I(G,\overrightarrow{z_\Sigma}) = \dfrac{hb^3}{12}$ $I(G) = \dfrac{hb(h^2+b^2)}{12}$ $I(G,\overrightarrow{y_\Sigma},\overrightarrow{z_\Sigma}) = 0$	
$I(G,\overrightarrow{y_\Sigma}) = \dfrac{\pi(D^4-d^4)}{64}$ $I(G,\overrightarrow{z_\Sigma}) = \dfrac{\pi(D^4-d^4)}{64}$ $I(G) = \dfrac{\pi(D^4-d^4)}{32}$ $I(G,\overrightarrow{y_\Sigma},\overrightarrow{z_\Sigma}) = 0$	

$$I(G,\overrightarrow{y_\Sigma}) = \frac{\pi D^4}{64}$$

$$I(G,\overrightarrow{z_\Sigma}) = \frac{\pi D^4}{64}$$

$$I(G) = \frac{\pi D^4}{32}$$

$$I(G,\overrightarrow{y_\Sigma},\overrightarrow{z_\Sigma}) = 0$$



Démonstrations :

G est à l'intersection de 2 axes de symétrie.

$$I(G,\overrightarrow{y_\Sigma}) = \int_\Sigma z^2 dS = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dydz = b\left[\frac{z^3}{3}\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I(G,\overrightarrow{z_\Sigma}) = \int_\Sigma y^2 dS = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dydz = h\left[\frac{z^3}{3}\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{hb^3}{12}$$

$$I(G) = I(G,\vec{y}_\Sigma) + I(G,\vec{z}_\Sigma) = \frac{hb(h^2+b^2)}{12}$$

$$I(G,\overrightarrow{y_\Sigma},\overrightarrow{z_\Sigma}) = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} yzdydz = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} ydy \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} zdz = \left[\frac{y^2}{2}\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left[\frac{z^2}{2}\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = 0$$

$$I(G,\vec{y},\vec{z}) = 0$$

G est à l'intersection de tout axe de symétrie passant au centre du cercle.

$$\int_\Sigma (y^2+z^2)dS = \int_\Sigma r^2 dS$$

$$\int_\Sigma y^2 dS = \int_\Sigma z^2 dS = \frac{1}{2}\int_\Sigma r^2 dS$$

$$I(G,\overrightarrow{y_\Sigma}) = I(G,\overrightarrow{z_\Sigma}) = \frac{1}{2}\int_\Sigma r^2 dS = \frac{1}{2}\int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} r^2 dS = \frac{1}{2}\int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} r^2 rdrd\theta = \pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}}$$

$$I(G,\overrightarrow{y_\Sigma}) = I(G,\overrightarrow{z_\Sigma}) = \pi\frac{\frac{D^4}{16}-\frac{d^4}{16}}{4} = \frac{\pi(D^4-d^4)}{64}$$

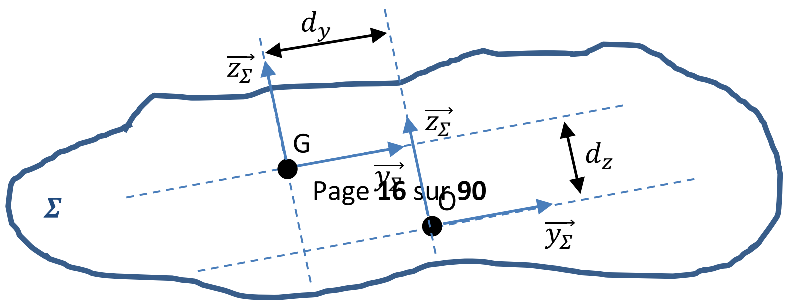
$$I(G) = I(G,\vec{y}_\Sigma) + I(G,\vec{z}_\Sigma) = \frac{\pi(D^4-d^4)}{32}$$

Pour le cylindre creux, il suffit de prendre $d = 0$

A.II.4.c.v Théorème de Huygens

• **<u>Théorème</u>**

Soit S la surface de la section Σ d'une poutre.



Soient deux axes parallèles $(O, \vec{y}_\Sigma)$ et $(G, \vec{y}_\Sigma)$ et d_z la distance entre ces 2 axes, alors :

$$I(O, \vec{y}_\Sigma) = I(G, \vec{y}_\Sigma) + S{d_z}^2 = I(G, \vec{y}_\Sigma) + S\left(\overrightarrow{GO}.\vec{z}_\Sigma\right)^2$$

Soient deux axes parallèles $(O, \vec{z}_\Sigma)$ et $(G, \vec{z}_\Sigma)$ et d_y la distance entre ces 2 axes, alors :

$$I(O, \vec{z}_\Sigma) = I(G, \vec{z}_\Sigma) + S{d_y}^2 = I(G, \vec{z}_\Sigma) + S\left(\overrightarrow{GO}.\vec{y}_\Sigma\right)^2$$

- **Démonstration :**

$$\overrightarrow{OM}.\vec{z}_\Sigma = z = \left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}\right).\vec{z}_\Sigma = z_G + Z_G$$

$$I(O, \vec{y}_\Sigma) = \int_\Sigma z^2 dS = \int_\Sigma (z_G + Z_G)^2 dS = \int_\Sigma {z_G}^2 dS + {Z_G}^2 \int_\Sigma dS + 2Z_G \int_\Sigma z_G dS$$

$$I(O, \vec{y}_\Sigma) = I(G, \vec{y}_\Sigma) + S{Z_G}^2$$

Car $\int_\Sigma z_G dS$ est l'intégrale de l'ordonnée z de G dans le repère lié au point G. C'est donc l'ordonnée Z_G dans ce repère qui est nulle.

- **Application**

Lorsqu'une surface Σ de centre G est composée d'un ensemble de surfaces Σ_1, Σ_2, …, Σ_n telles que :

$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \ldots \cup \Sigma_n$$

$$\Sigma_i \cap \Sigma_j = \emptyset \ \forall i \neq j$$

Si, pour chaque surface Σ_i, on connaît le centre G_i, la surface S^i et les moments quadratiques ${I_{G_{i_y}}}^i$ et ${I_{G_{i_z}}}^i$, on a :

$$I_{G_y} = \int_\Sigma z^2\, dS = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Sigma_i} z^2\, dS = \sum_{i=1}^{n} {I_{G_y}}^i$$

$$I_{G_z} = \int_\Sigma y^2\, dS = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Sigma_i} y^2\, dS = \sum_{i=1}^{n} {I_{G_z}}^i$$

Avec :

$${I_{G_y}}^i = {I_{G_{i_y}}}^i + S^i\left(\overrightarrow{GG_i}.\vec{z}\right)^2$$

$${I_{G_z}}^i = {I_{G_{i_z}}}^i + S^i\left(\overrightarrow{GG_i}.\vec{y}\right)^2$$

Remarque : S'il existe i et j tels que $\Sigma_i \cap \Sigma_j \neq \emptyset$, la démarche sera applicable en considérant en plus de tous les calculs précédents la partie commune et en retranchant ses caractéristiques propres.

A.III. Poutres et milieu extérieur

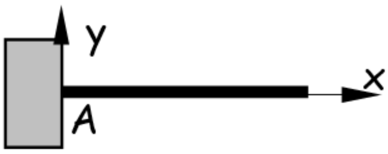
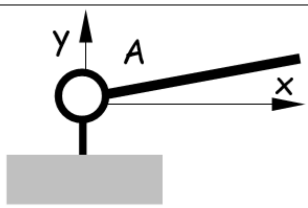
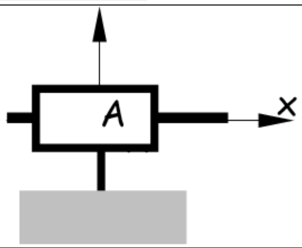
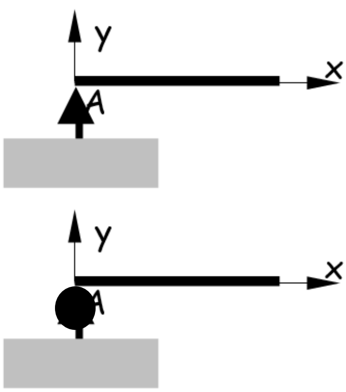
A.III.1 Liaisons

On modélise les liaisons de la poutre avec son environnement à l'aide des liaisons élémentaires définies dans le cours de modélisation des liaisons.

En résistance des matériaux, on associe aux différentes liaisons les conditions cinématiques qu'elles imposent, c'est-à-dire des positions et des orientations, soit des coordonnées et des dérivées de ces coordonnées.

Le cas le plus souvent rencontré est le cas des poutres à plan moyen chargées dans le plan de symétrie, ceci conduit à un problème plan.

On appelle $x(M)$ et $y(M)$ les mouvements possible suivant $\vec{x}$ et $\vec{y}$ du point M de la poutre.

Type d'appui	Schéma	Conditions cinématiques
Encastrement		$x(A) = y(A) = 0$ $x'(A) = y'(A) = 0$
Pivot ou articulation		$x(A) = y(A) = 0$
Glissière		$y(A) = 0$ $y'(A) = 0$
Ponctuelle		$y(A) = 0$

On peut utiliser des petits chariots sur roulettes afin de représenter cinématiquement les déformations possibles et les conditions géométriques associées aux conditions aux limites.