

Calcul approché d'une intégrale

Exercice 1. Calcul approché d'une intégrale par les méthodes de NEWTON-CÔTES

a) Nous avons étudié en cours quatre méthodes élémentaires pour calculer la valeur approchée d'une intégrale sur un segment : la méthode du rectangle, la méthode du point milieu, la méthode du trapèze et la méthode de SIMPSON. Implémenter les version composites de chacune de ces quatre méthodes. Chacune de ces fonctions prendra en paramètre la fonction à intégrer, les bornes de l'intervalle et le nombre de subdivisions choisi. Vous vérifierez la validité de vos fonctions en les testant sur une intégrale dont vous connaissez la valeur, par exemple $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) dt = 1$.

b) On rappelle que la fonction `quad` du module `scipy.integrate` permet le calcul approché de l'intégrale d'une fonction entre deux bornes (finies ou infinies). Utiliser cette fonction pour calculer une valeur approchée de l'intégrale $I = \int_0^1 e^{-t^2} dt$. Cette valeur sera dorénavant considérée comme exacte.

Une fois cette valeur calculée, rédiger une fonction `precision(methode, n)` qui prend en arguments une méthode d'intégration numérique M (l'une des quatre définies à la question précédente) et un rang n et qui renvoie la différence en valeur absolue entre la valeur exacte de I et la valeur retournée par la méthode M pour une subdivision de longueur n .

c) En déduire une fonction `rang_min(methode, epsilon)` qui prend en argument une méthode M et une précision ϵ et qui retourne le rang n_0 à partir duquel la précision de méthode M pour calculer I devient inférieure ou égale à ϵ . On procédera pour cela à une recherche dichotomique une fois trouvé un rang n vérifiant la précision demandée.

d) À l'aide de cette fonction, déterminer le rang à partir duquel chacune des quatre méthodes ci-dessus approche I avec une précision inférieure ou égale à 10^{-4} . À quel rang faut-il aller pour atteindre une précision égale à 10^{-8} pour les trois dernières ? Pousser jusqu'à 10^{-12} pour la méthode de SIMPSON. À l'aide de l'étude de l'erreur de ces méthodes faite en cours, évaluer le rang à partir duquel cette précision de 10^{-12} serait atteinte pour chacune des trois autres méthodes.

Exercice 2. Méthode de ROMBERG

La méthode de ROMBERG consiste à appliquer un procédé d'accélération de la convergence¹ à la méthode des trapèzes. Nous admettons le résultat suivant :

THÉORÈME. — Si f est de classe \mathcal{C}^{2k} sur $[a, b]$ et si $T(h)$ désigne l'approximation de $I = \int_a^b f(t) dt$ par la méthode des trapèzes pour un pas égal à $h = \frac{b-a}{n}$ alors on dispose du développement limité suivant :

$$T(h) = I + a_1 h^2 + a_2 h^4 + \dots + a_{k-1} h^{2k-2} + O(h^{2k})$$

où les coefficients a_i ne dépendent ni de h ni de n .

Ainsi, on a $T(h) = I + a_1 h^2 + O(h^4)$ et $T(h/2) = I + a_1 h^2/4 + O(h^4)$ donc $\frac{4T(h/2) - T(h)}{3} = I + O(h^4)$.

Alors que l'erreur d'approximation de I par $T(h)$ est un $O(h^2)$, on constate que l'erreur d'approximation de I par $\frac{4T(h/2) - T(h)}{3}$ est un $O(h^4)$: la précision s'en trouve augmentée.

a) Montrer en la développant que la formule $\frac{4T(h/2) - T(h)}{3}$ correspond à la méthode de SIMPSON de pas h .

Cette première observation montre que cette méthode est convaincante. Rien n'interdit de poursuivre cette idée.

On introduit désormais les notations suivantes :

- pour tout entier $q \geq 0$ on pose $R_{0,q} = T\left(\frac{b-a}{2^q}\right)$ (méthode des trapèzes) ;
- pour tout entier $q \geq 1$ on pose $R_{1,q} = \frac{4R_{0,q} - R_{0,q-1}}{3}$ (première accélération).

1. Ce procédé porte le nom d'accélération de la convergence de RICHARDSON.

Avec $h = \frac{b-a}{2^{q-1}}$ on dispose d'un développement limité $R_{1,q-1} = I + b_1 h^4 + O(h^6)$ et donc aussi de $R_{1,q} = I + b_1 \frac{h^4}{16} + O(h^6)$. Pour accélérer encore la convergence on introduit la quantité :

– pour tout entier $q \geq 2$ on pose $R_{2,q} = \frac{16R_{1,q} - R_{1,q-1}}{15}$ (deuxième accélération).

On dispose maintenant du développement limité : $R_{2,q} = I + O(h^6)$.

b) Exprimer $R_{3,q}$ en fonction de $R_{2,q}$ et de $R_{2,q-1}$ pour obtenir un développement limité de la forme : $R_{3,q} = I + O(h^8)$ puis plus généralement donner l'expression de $R_{p,q}$ en fonction de $R_{p-1,q}$ et $R_{p-1,q-1}$ de manière à obtenir un développement limité de la forme : $R_{p,q} = I + O(h^{2p+2})$.

Ces résultats peuvent être rassemblés dans un tableau :

$h = b - a$	$h = \frac{b-a}{2}$	$h = \frac{b-a}{4}$	$h = \frac{b-a}{8}$
$R_{0,0}$	$R_{0,1}$	$R_{0,2}$	$R_{0,3}$
	$R_{1,1} = \frac{4R_{0,1} - R_{0,0}}{3}$	$R_{1,2} = \frac{4R_{0,2} - R_{0,1}}{3}$	$R_{1,3} = \frac{4R_{0,3} - R_{0,2}}{3}$
		$R_{2,2} = \frac{16R_{1,2} - R_{1,1}}{15}$	$R_{2,3} = \frac{16R_{1,3} - R_{1,2}}{15}$
			$R_{3,3} = \dots$

La valeur la plus précise se trouve en principe dans la case située en bas à droite de ce tableau. On peut en théorie itérer indéfiniment le procédé précédent (du moins lorsque f est de classe \mathcal{C}^∞) mais dans la pratique les erreurs d'arrondi nous incitent à être prudents. Il vaut mieux ne pas aller au delà de 10 pour p et q , mais ainsi les résultats obtenus sont très satisfaisants.

c) Rédiger une fonction baptisée romberg qui prend en arguments la fonction f , les bornes a et b de l'intervalle et un entier q et qui renvoie la valeur de $R_{q,q}$.

Remarque. Pour écrire cette fonction vous aurez besoin de créer un tableau bi-dimensionnel de taille $(q+1) \times (q+1)$. Le plus simple est de le définir par compréhension :

```
r = [ [0 for j in range(q+1)] for i in range(q+1)]
```

Pour $(i, j) \in \llbracket 0, q \rrbracket^2$ la case d'indice (i, j) est désormais accessible par le biais de la syntaxe $r[i][j]$.

Cela étant dit, les plus avertis remarqueront qu'un tableau uni-dimensionnel est suffisant pour calculer $R_{q,q}$.

d) A l'instar de ce que nous avons fait dans le premier exercice, déterminer la valeur de q nécessaire pour obtenir une approximation de l'intégrale $\int_0^1 e^{-t^2} dt$ avec une précision de 10^{-12} par la méthode de ROMBERG.

Exercice 3. Méthode de Monte-Carlo

On qualifie de méthode de *Monte-Carlo* toute démarche visant à calculer une valeur numérique en utilisant un procédé aléatoire. Dans le cas du calcul de l'intégrale $I = \int_a^b f(t) dt$ d'une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ à valeurs positives dont on connaît un majorant M , on peut par exemple tirer aléatoirement un grand nombre de couples $(x_i, y_i) \in [a, b] \times [0, M]$ pour $1 \leq i \leq n$ puis calculer la proportion $\frac{u_n}{n}$ de couples (x_i, y_i) vérifiant $y_i \leq f(x_i)$. La loi des grands nombres nous assure que plus n est grand, plus forte est la probabilité que $\frac{u_n}{n}$ soit une bonne approximation de $\frac{1}{M(b-a)} \int_a^b f(t) dt$.

a) Rédiger une fonction baptisée montecarlo qui prend en paramètres la fonction f , les valeurs de a , b , M et n et qui retourne la quantité $M(b-a) \frac{u_n}{n}$.

b) Calculer la précision moyenne obtenue en calculant une valeur approchée de l'intégrale $\int_0^1 e^{-t^2} dt$ par la méthode ci-dessus pour $n = 10\,000$ (on calculera la moyenne sur 100 expériences).

c) Adapter la démarche pour qu'elle puisse s'appliquer à une fonction de signe quelconque sur $[a, b]$.

Quelle précision obtient-on lorsqu'on calcule par cette méthode $\int_{1/2}^2 \ln(t) dt$ avec $n = 100\,000$?