Corrigé du contrôle d'informatique

Question 1. Tout polynôme de degré inférieur ou égal à 3 est combinaison linéaire des polynômes 1, $X-u$, $(X-u)^2$ et $(X-u)^3$ donc par linéarité de l'intégrale il suffit de vérifier que la formule d'approximation de soit vraie pour les quatre fonctions polynomiales associées pour qu'elle soit vraie pour toute fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 3.

$$
\begin{aligned}
f : x \mapsto 1 &\quad \text{impose la condition} \quad \lambda_0 = v-u && (1)\\
f : x \mapsto (x-u) &\quad \text{impose la condition} \quad \frac{1}{2}(v-u)^2 = \lambda_1 + \lambda_2 && (2)\\
f : x \mapsto (x-u)^2 &\quad \text{impose la condition} \quad \frac{1}{3}(v-u)^3 = 2\lambda_2(\xi-u) && (3)\\
f : x \mapsto (x-u)^3 &\quad \text{impose la condition} \quad \frac{1}{4}(v-u)^4 = 3\lambda_2(\xi-u)^2 && (4)
\end{aligned}
$$

Les conditions (3) et (4) donnent $\xi - u = \frac{1}{2}(v-u)$ soit $\xi = \frac{u+v}{2}$. On en déduit $\lambda_2 = \frac{1}{3}(v-u)^2$, puis $\lambda_1 = \frac{1}{6}(v-u)^2$ de la condition (1). La formule d'approximation :

$$\int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t \approx (v-u)f(u) + \frac{1}{6}(v-u)^2 f'(u) + \frac{1}{3}(v-u)^2 f'\Big(\frac{u+v}{2}\Big)$$

est donc au moins d'ordre 3.

Question 2. Pour $f : x \mapsto (x-u)^4$ on calcule $E(f) = \frac{1}{5}(v-u)^5 - \frac{4}{3}(v-u)^2\Big(\frac{v-u}{2}\Big)^3 = \frac{1}{30}(v-u)^5 \neq 0$ donc la méthode est d'ordre 3 mais pas d'ordre 4.

Question 3. Puisque P_f est dans $\mathbb{R}_3[X]$ on a $\int_u^v P_f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda_0 P_f(u) + \lambda_1 P_f'(u) + \lambda_2 P_f'(\xi) = I(f)$ donc $E(f) = \int_u^v \big(f(t) - P_f(t)\big)\mathrm{d}t$.

Question 4. Si f est de classe $\mathscr{C}^4$ il en est de même de φ. Par ailleurs on a $\varphi(u) = \varphi(\xi) = \varphi(t) = 0$ donc entre ces trois valeurs figurent d'après le théorème de Rolle au moins deux racines c_1 et c_2 de φ'.
Mais u et ξ sont encore racines de φ', donc entre les quatre valeurs u, ξ, c_1 et c_2 figurent (toujours d'après le théorème de Rolle) au moins trois racines de φ''. En réitérant cette démarche on justifie l'existence d'au moins deux racines de $\varphi^{(3)}$ dans l'intervalle $]u,v[$ et donc d'au moins une racine c de $\varphi^{(4)}$.
Or puisque P_f est de degré au plus 3, $\varphi^{(4)}(x) = f^{(4)}(x) - K$, et $\varphi^{(4)}(c) = 0 \iff K = f^{(4)}(c)$.

Question 5. L'égalité $\varphi(t) = 0$ peut donc s'écrire : $f(t) - P_f(t) = f^{(4)}(c)\frac{(t-u)^2(t-\xi)^2}{24}$ ce qui conduit à la majoration : $|f(t) - P_f(t)| \leqslant \frac{M_4}{24}(t-u)^2(t-\xi)^2$. Ainsi, $E(f) \leqslant \frac{M_4}{24}\int_u^v (t-u)^2(t-\xi)^2\,\mathrm{d}t$. Cette dernière intégrale se calcule (par exemple à l'aide de deux intégrations par parties successives) et vaut $\frac{1}{30}(v-u)^5$ donc $E(f) \leqslant \frac{M_4}{720}(v-u)^5$.

Question 6. La formule composite correspondante consiste à subdiviser $[a,b]$ en n sous-intervalles réguliers $[x_i, x_{i+1}]$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$ en posant $x_i = a + i\frac{(b-a)}{n}$ et à approcher $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par :

$$\mathscr{I}_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) + \frac{1}{6}\Big(\frac{b-a}{n}\Big)^2 \sum_{i=0}^{n-1} f'(x_i) + \frac{1}{3}\Big(\frac{b-a}{n}\Big)^2 \sum_{i=0}^{n-1} f'\Big(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\Big).$$

L'erreur commise $\mathscr{E}(n) = \Big|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \mathscr{I}_n(f)\Big|$ est majorée par la somme des erreurs élémentaires sur chacun des n intervalles, soit :

$$\mathscr{E}(n) \leqslant n \times \frac{M_4}{720}\Big(\frac{b-a}{n}\Big)^5 = \frac{M_4(b-a)^5}{720 n^4}.$$

Question 7. La fonction demandée dépend des fonctions f et f', des bornes a et b de l'intervalle d'intégration et du nombre n de subdivisions de cet intervalle.

```python
def integral(f, fprime, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    x, y = a, a + h / 2
    s1 = s2 = s3 = 0
    for _ in range(n):
        s1 += f(x)
        s2 += fprime(x)
        s3 += fprime(y)
        x += h
        y += h
    return h * s1 + h**2 / 6 * s2 + h**2 /  3 * s3
```