Contrôle d'informatique

Durée : 1 heure

Exercice 1 On considère une fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ainsi que son intégrale $\mathrm{I} = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Pour tout entier $n \geqslant 1$ on note :

- $\mathrm{M}_n(f)$ le résultat du calcul approché de I par la méthode du point milieu pour une subdivision de pas régulier en n intervalles ;
- $\mathrm{T}_n(f)$ le résultat du calcul approché de I par la méthode des trapèzes pour cette même subdivision.

a) Montrer que $\mathrm{M}_n(f) = 2\mathrm{T}_{2n}(f) - \mathrm{T}_n(f)$, et en déduire une expression de $\mathrm{T}_{2^{p+1}}(f)$ en fonction de $\mathrm{T}_{2^p}(f)$ et $\mathrm{M}_{2^p}(f)$.

b) Rédiger en Python une fonction `milieu` qui prend en arguments la fonction f, les réels a et b et un entier n et qui retourne la valeur de $\mathrm{M}_n(f)$.

c) La *méthode dichotomique des trapèzes* consiste à calculer les termes de la suite $(\mathrm{T}_{2^p}(f))$ à l'aide de la formule établie au a. jusqu'à réaliser la condition $|\mathrm{T}_{2^p} - \mathrm{T}_{2^{p-1}}| \leqslant \varepsilon$.
Rédiger en Python une fonction `trap_dicho` qui prend en arguments la fonction f, les réels a et b et la précision ε et qui retourne le première valeur de T_{2^p} qui réalise la condition $|\mathrm{T}_{2^p} - \mathrm{T}_{2^{p-1}}| \leqslant \varepsilon$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^3$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifiant :

(i) $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$ et $f''(\alpha) \neq 0$;

(ii) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha\},\ f'(x) \neq 0$.

On se propose de calculer une valeur approchée de α en utilisant le schéma de Newton-Raphson.

Question 1. On définit une fonction $h : \mathbb{R} \setminus \{\alpha\} \to \mathbb{R}$ en posant : $\forall x \neq \alpha,\ f(x) = (x-\alpha)^2 h(x)$.

a) Quelle valeur attribuer à $h(\alpha)$ pour que la fonction h soit de classe $\mathscr{C}^0$ sur $\mathbb{R}$? On suppose désormais ce prolongement par continuité effectué.

b) Montrer qu'ainsi prolongée, la fonction h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Question 2. On note $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par la méthode de Newton-Raphson appliquée à la fonction f, et on suppose que cette suite converge vers α.

a) On pose $e_n = x_n - \alpha$. Prouver que $\lim \dfrac{e_{n+1}}{e_n} = \dfrac{1}{2}$. Quelle est l'ordre de la méthode pour une telle fonction f ?

b) On modifie légèrement la méthode en considérant désormais la relation de récurrence :

$$x_{n+1} = x_n - p\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

et on suppose toujours que $\lim x_n = \alpha$.
Quelle valeur attribuer à p pour que cette nouvelle méthode soit au moins d'ordre 2 ?

♦ ♦
♦