Corrigé du contrôle d'informatique

Question 1.

a) En posant $z = y'$ on obtient le système différentiel suivant : $\forall t \in \mathrm{I}$, $\begin{cases} y'(t) = z(t) \\ z'(t) = f(y(t)) \end{cases}$

b) On en déduit $y(t_{i+1}) - y(t_1) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} y'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_i}^{t_{i+1}} z(t)\,\mathrm{d}t$ et $z(t_{i+1}) - z(t_1) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} z'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(y(t))\,\mathrm{d}t$.

Question 2.

a) Dans le schéma d'Euler on approche $y(t_{i+1}) - y(t_i)$ par $(t_{i+1} - t_i)z(t_i) = hz(t_i)$ et $z(t_{i+1}) - z(t_i)$ par $(t_{i+1} - t_i)f(y(t_i)) = hf(y(t_i))$, ce qui conduit à définir les suites $(y_i)_{i \in \mathrm{J}_n}$ et $(z_i)_{i \in \mathrm{J}_n}$ à l'aide des conditions initiales y_0 et z_0 et des relations :

$$\forall i \in [\![0, n-2]\!], \qquad \begin{cases} y_{i+1} = y_i + hz_i \\ z_{i+1} = z_i + hf(y_i) \end{cases}$$

b) Ceci conduit à la définition suivante :

```python
def euler(f, tmin, tmax, n, y0, z0):
    y, z = [y0], [z0]
    h = (tmax - tmin) / (n - 1)
    for i in range(n-1):
        y.append(y[i] + h * z[i])
        z.append(z[i] + h * f(y[i]))
    return y, z
```

Question 3.

a) Pour tout $t \in \mathrm{I}$, $y'(t)y''(t) + \omega^2 y'(t)y(t) = 0$, ce qui donne en intégrant : $\frac{1}{2}y'(t)^2 + \frac{\omega^2}{2}y(t)^2 = \mathrm{C}^{\text{te}}$. On peut donc poser $\mathrm{E} = y'(t)^2 + \omega^2 y(t)^2$.

b) On a donc $\mathrm{E}_i = z_i^2 + \omega^2 y_i^2$ et :

$$\mathrm{E}_{i+1} - \mathrm{E}_i = z_{i+1}^2 - z_i^2 + \omega^2(y_{i+1}^2 - y_i^2) = -(2z_i - h\omega^2 y_i)h\omega^2 y_i + \omega^2(2y_i + hz_i)hz_i = h^2\omega^4 y_i^2 + h^2\omega^2 z_i^2 = h^2\omega^2\mathrm{E}_i.$$

c) Les courbes d'équation $\mathrm{E} = z^2 + \omega^2 y^2$ sont des ellipses ; le fait d'obtenir une spirale illustre la non conservation de la quantité E_i. Plus précisément, cette spirale est orienté de l'intérieur vers l'extérieur, ce qui traduit la croissance de E_i au cours du temps. Cette croissance est confirmée par le calcul de la question précédente, qui montre que $\mathrm{E}_{i+1} - \mathrm{E}_i = h^2\omega^2\mathrm{E}_i > 0$.

Question 4.

a) On définit la fonction `verlet` avec les mêmes arguments que la fonction `euler` :

```python
def verlet(f, tmin, tmax, n, y0, z0):
    y, z = [y0], [z0]
    h = (tmax - tmin) / (n - 1)
    for i in range(n-1):
        y.append(y[i] + h * z[i] + h**2 / 2 * f(y[i]))
        z.append(z[i] + h / 2 * (f(y[i]) + f(y[i+1])))
    return y, z
```

b) Le graphe de la figure 2 ressemble maintenant à une ellipse ; le fait que le graphe soit fermé traduit la périodicité du couple $(y(t), z(t))$ et laisse penser que les variations de la quantité E_i sont beaucoup plus faibles que pour la méthode d'Euler.

c) On a $\mathrm{E}_i = z_i^2 + \omega^2 y_i^2$ avec ici $y_{i+1} = y_i + hz_i - \frac{h^2}{2}\omega^2 y_i$ et $z_{i+1} = z_i - \omega^2 \frac{h}{2}(y_i + y_{i+1})$ donc :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_{i+1} - \mathrm{E}_i = z_{i+1}^2 - z_i^2 + \omega^2(y_{i+1}^2 - y_i^2) &= -\omega^2 \frac{h}{2}(y_i + y_{i+1})\Big(2z_i - \omega^2 \frac{h}{2}(y_i + y_{i+1})\Big) + \omega^2(y_i + y_{i+1})\Big(hz_i - \omega^2 \frac{h^2}{2} y_i\Big) \\
&= \omega^2(y_i + y_{i+1})\Big(-hz_i + \omega^2 \frac{h^2}{4}(y_i + y_{i+1}) + hz_i - \omega^2 \frac{h^2}{2} y_i\Big) \\
&= \omega^2(y_i + y_{i+1})\frac{h^2}{4}(y_{i+1} - y_i)
\end{aligned}$$

Mais $(y_{i+1} - y_i) \sim hz_i = \mathrm{O}(h)$, donc $\mathrm{E}_{i+1} - \mathrm{E}_i = \mathrm{O}(h^3)$.

d) Aucune des deux méthodes n'est strictement conservative : on a pas $\mathrm{E}_{i+1} - \mathrm{E}_i = 0$. Cependant les variations de l'estimation de la quantité E sont plus faibles pour la méthode de Verlet : $\mathrm{E}_{i+1} - \mathrm{E}_i = \mathrm{O}(h^3)$ alors que $\mathrm{E}_{i+1} - \mathrm{E}_i = \mathrm{O}(h^2)$ pour la méthode d'Euler.

Une autre observation plaide en faveur de la seconde méthode. Pour la méthode d'Euler on a toujours $\mathrm{E}_{i+1} - \mathrm{E}_i > 0$; l'approximation de la quantité E ne peut que croitre. En revanche, pour la méthode de Verlet, un calcul un peu plus poussé donne $\mathrm{E}_{i+1} - \mathrm{E}_i \sim \omega^2 y_i z_i \frac{h^3}{2}$. Puisque les quantités y_i et z_i changent de signe, les variations de E_i ne sont pas de signe constant, ce qui peut laisser espérer un phénomène de « compensation » au cours d'une période (c'est en tout cas ce que laisse penser le graphe de la figure 2).

La conclusion de cette étude est que le schéma de Verlet semble mieux adapté à la simulation des systèmes conservatifs que la méthode d'Euler.