Contrôle d'informatique

Durée : 1 heure

Ce contrôle est constitué de deux exercices indépendants.

Exercice 1

On considère une fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ainsi que son intégrale $\mathrm{I} = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$ on note $(x_{n,0}, x_{n,1}, \ldots, x_{n,n})$ la subdivision de pas régulier de $[a,b]$ en n intervalles, et :

- $\mathrm{R}_n(f)$ le résultat du calcul approché de I par la méthode du rectangle gauche composite pour cette subdivision ;
- $\mathrm{M}_n(f)$ le résultat du calcul approché de I par la méthode du point milieu composite pour cette subdivision ;
- $\mathrm{T}_n(f)$ le résultat du calcul approché de I par la méthode du trapèze composite pour cette subdivision.

Question 1.

a) Rappeler l'expression de $x_{n,k}$ en fonction de n et de k, puis l'expression de $\mathrm{R}_n(f)$ en fonction de n et des $x_{n,k}$.

b) Prouver que $\mathrm{T}_n(f) = \mathrm{R}_n(f) + \dfrac{b-a}{n}\Big(\dfrac{f(b)-f(a)}{2}\Big)$.

c) Pour $j \in [\![0, n-1]\!]$, exprimer $x_{2n,2j}$ et $x_{2n,2j+1}$ en fonction de $x_{n,j}$ et $x_{n,j+1}$, puis prouver que

$$\mathrm{R}_{2n}(f) = \frac{\mathrm{R}_n(f) + \mathrm{M}_n(f)}{2}.$$

Question 2. Rédiger en Python une fonction `milieu` qui prend en arguments la fonction f, les réels a et b et un entier n et qui renvoie la valeur de $\mathrm{M}_n(f)$.

La *méthode dichotomique des trapèzes* consiste à calculer les termes de la suite $(\mathrm{T}_{2^p}(f))$ jusqu'à réaliser la condition d'arrêt $|\mathrm{T}_{2^p}(f) - \mathrm{T}_{2^{p-1}}(f)| \leqslant \varepsilon$.

Question 3.

a) À l'aide des questions 1b et 1c, donner pour $p \geqslant 1$ l'expression de $\mathrm{T}_{2^p}(f)$ en fonction de $\mathrm{T}_{2^{p-1}}(f)$ et $\mathrm{M}_{2^{p-1}}(f)$.

b) En utilisant cette formule et la fonction `milieu`, rédiger en Python une fonction `trap_dicho` qui prend en arguments la fonction f, les réels a et b et la précision ε et qui renvoie le première valeur de $\mathrm{T}_{2^p}(f)$ qui réalise la condition $|\mathrm{T}_{2^p}(f) - \mathrm{T}_{2^{p-1}}(f)| \leqslant \varepsilon$.

Exercice 2

Dans tout cet exercice, f désigne une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, vérifiant la condition : $\forall x \in \mathbb{R}$, $-2 \leqslant f'(x) \leqslant -1$.

Question 4. Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, et en déduire l'existence d'un unique réel c vérifiant $f(c) = 0$.

On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée d'une condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence $x_{n+1} = g(x_n)$, où g est la fonction $g : x \mapsto x + \alpha f(x)$, avec $\alpha \in \,]0,1[$ fixé.

Question 5.

a) Montrer l'existence d'un réel $k \in \,]0,1[$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|g'(x)| \leqslant k$.

b) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - c| \leqslant k^n |x_0 - c|$ et en déduire la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Question 6. Montrer que la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est d'ordre 1 si $\alpha \neq -\dfrac{1}{f'(c)}$, et au moins d'ordre 2 sinon.

Question 7.

a) Peut-on dans la pratique choisir $\alpha = -\dfrac{1}{f'(c)}$? Si on choisit de remplacer α par $-\dfrac{1}{f'(x_n)}$ dans la relation de récurrence, quelle méthode obtient-on ?

b) Pour une valeur de α arbitraire, comment peut-on interpréter graphiquement la construction de x_{n+1} à partir de x_n ?