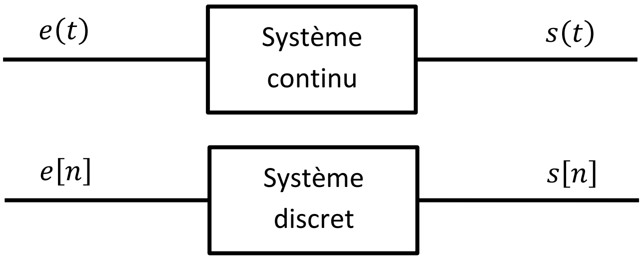
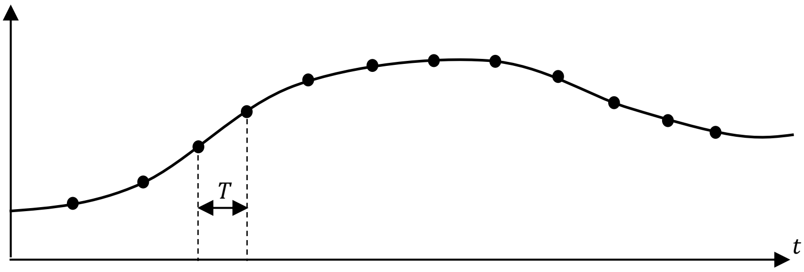
# A.VI. Simulation physique de phénomènes

## A.VI.1 Discrétisation des problèmes

Jusqu'ici, nous avons étudié des systèmes continus. Les variables traitées étaient des fonctions continues du temps.

Dans bon nombre de systèmes, les variables sont échantillonnées et on ne connaît qu'une liste de valeurs à différents temps. On parle de variables discrètes.




Cette figure représente un signal continu en fonction du temps sur lequel ont été prises des valeurs à différents temps espacés d'un temps $T$ supposé ici constant et appelé « période d'échantillonnage ».

# A.VI.2 Problèmes dynamiques à une dimension

## A.VI.2.a Dérivation de variables discrètes – Euler - Taylor

Soit la variable discrète $e$.

Voyons comment déterminer une approximation de ses dérivées successives. On parle de différences finies, de méthode d'Euler, de développement de Taylor.

### *A.VI.2.a.i Dérivée première*

• **Euler explicite**

Proposons le développement de Taylor de la variable $e$ à l'ordre 1

$$e(t+T) = e(t) + T\frac{de(t)}{dt} + o(T)$$

On a donc :

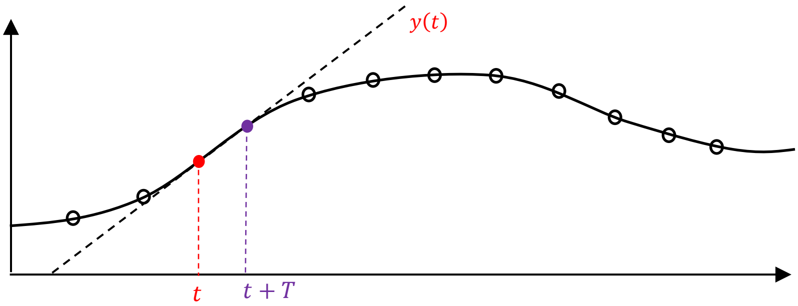
$$e(t+T) \approx e(t) + T\frac{de(t)}{dt}$$

$$T\frac{de(t)}{dt} = e(t+T) - e(t)$$

$$\frac{de(t)}{dt} = \frac{e(t+T) - e(t)}{T}$$

Cette approximation de la dérivée correspond à une méthode Euler Explicite.

Cela revient à approcher la dérivée à un instant $t$ en utilisant la valeur à l'instant $t$ et la valeur à l'instant $t + dt$




$$\boxed{y'(t) = \frac{e(t+T) - e(t)}{T}}$$

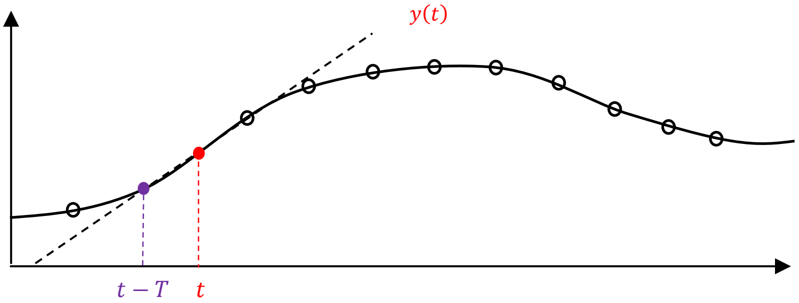
La dérivée à l'instant $t$ est approchée à l'aide de la valeur en $t$ et après

Comme $e(t+T) = Ty'(t) + e(t)$, on trouve la prochaine valeur de $e(t+T)$ en fonction uniquement des anciennes, on dit que ce calcul est explicite.

• **Euler implicite**

On peut aussi associer la dérivée en $t + dt$ à cette expression :

$$y'(t+T) = \frac{e(t+T) - e(t)}{T}$$




Cela revient à écrire :

$$\boxed{y'(t) = \frac{e(t) - e(t-T)}{T}}$$

Cette approximation de la dérivée correspond à une méthode Euler implicite.

La dérivée à l'instant $t$ est approchée à l'aide de la valeur en $t$ et avant.

Comme $e(t+T) = Ty'(t+T) + e(t)$, on trouve la prochaine valeur de $e(t+T)$ en fonction de la dérivée à ce nouveau temps $y'(t+T)$, on dit que ce calcul est implicite.

• **Bilan**

| Euler explicite | Euler implicite |
|---|---|
| $y'(\mathbf{t}) = \frac{e(\mathbf{t+T}) - e(\mathbf{t})}{T}$ | $y'(\mathbf{t+T}) = \frac{e(\mathbf{t+T}) - e(\mathbf{t})}{T}$<br>$y'(t) = \frac{e(t) - e(t-T)}{T}$ |
| Nouvelle valeur dépendant de l'ancienne dérivée : Explicite | Nouvelle valeur dépendant de la nouvelle dérivée : Implicite |

### A.VI.2.a.ii Dérivée seconde

On trouve plusieurs méthodes pour estimer le dérivée seconde d'une variable discrète.

• **Taylor à l'ordre 2**

Proposons deux développements de Taylor de la variable $e$ à l'ordre 2

$$e(t+T) = e(t) + T\frac{de(t)}{dt} + \frac{T^2}{2}\frac{d^2e(t)}{dt^2} + o(T^2)$$

$$e(t-T) = e(t) - T\frac{de(t)}{dt} + \frac{T^2}{2}\frac{d^2e(t)}{dt^2} + o(T^2)$$

Faisons la somme de ces deux expressions :

$$e(t+T) + e(t-T) = 2e(t) + T^2\frac{d^2e(t)}{dt^2}$$

Soit :

$$\frac{d^2e(t)}{dt^2} = \frac{e(t+T) - 2e(t) + e(t-T)}{T^2}$$

Cette approximation calcul la dérivée seconde de manière centrée autour du temps $t$

• **Double Euler explicite**

Ecrivons l'expression de la dérivée seconde de $e$ avec la méthode d'Euler Explicite vue précédemment :

$$\frac{d^2e(t)}{dt^2} = \frac{\frac{de(t+T)}{dt} - \frac{de(t)}{dt}}{T}$$

On a par ailleurs :

$$\frac{de(t)}{dt} = \frac{e(t+T) - e(t)}{T}$$

Soit

$$\frac{d^2e(t)}{dt^2} = \frac{\frac{e(t+2T) - e(t+T)}{T} - \frac{e(t+T) - e(t)}{T}}{T}$$

$$\frac{d^2e(t)}{dt^2} = \frac{e(t+2T) - e(t+T) - e(t+T) + e(t)}{T^2}$$

$$\frac{d^2e(t)}{dt^2} = \frac{e(t+2T) - 2e(t+T) + e(t)}{T^2}$$

On remarque ici que l'approximation de la dérivée est faite avec les valeurs en $t$ et après.

• **Double Euler implicite**

Ecrivons l'expression de la dérivée seconde de $e$ avec la méthode d'Euler Explicite vue précédemment :

$$\frac{d^2e(t)}{dt^2} = \frac{\frac{de(t)}{dt} - \frac{de(t-T)}{dt}}{T}$$

On a par ailleurs :

$$\frac{de(t)}{dt} = \frac{e(t) - e(t-T)}{T}$$

Soit

$$\frac{d^2e(t)}{dt^2} = \frac{\frac{e(t) - e(t-T)}{T} - \frac{e(t-T) - e(t-2T)}{T}}{T}$$

$$\frac{d^2e(t)}{dt^2} = \frac{e(t) - 2e(t-T) + e(t-2T)}{T^2}$$

On remarque ici que l'approximation de la dérivée est faite avec les valeurs en $t$ et avant.

• **<u>Mélange implicite – explicite</u>**

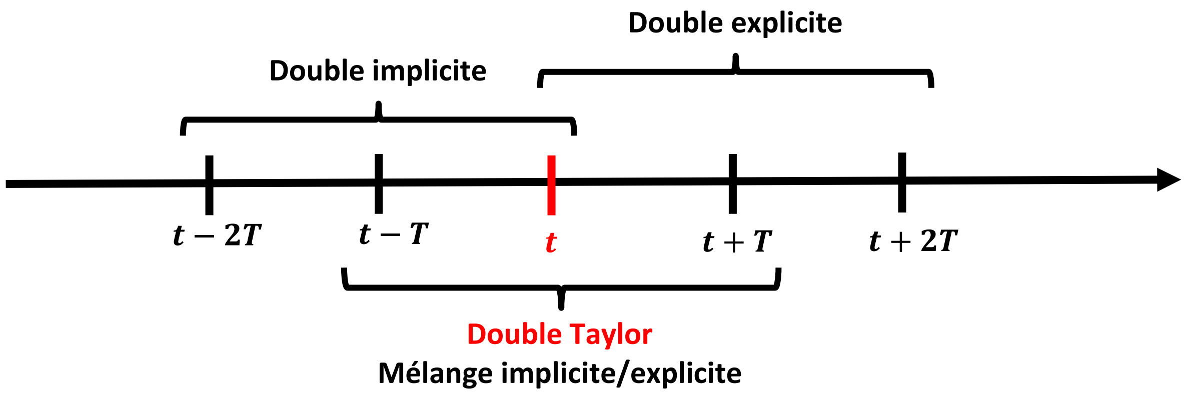
On peut aussi mélanger les méthodes :

| Implicite sur la dérivée seconde et explicite sur la dérivée première | Explicite sur la dérivée seconde et implicite sur la dérivée première |
|---|---|
| $\frac{d^2e(t)}{dt^2} = \frac{\frac{de(t+T)}{dt} - \frac{de(t)}{dt}}{T}$<br>$\frac{de(t)}{dt} = \frac{e(t) - e(t-T)}{T}$<br>$\frac{d^2e(t)}{dt^2} = \frac{\frac{e(t+T) - e(t)}{T} - \frac{e(t) - e(t-T)}{T}}{T}$<br>$\frac{d^2e(t)}{dt^2} = \frac{e(t+T) - 2e(t) + e(t-T)}{T^2}$ | $\frac{d^2e(t)}{dt^2} = \frac{\frac{de(t)}{dt} - \frac{de(t-T)}{dt}}{T}$<br>$\frac{de(t)}{dt} = \frac{e(t+T) - e(t)}{T}$<br>$\frac{d^2e(t)}{dt^2} = \frac{\frac{e(t+T) - e(t)}{T} - \frac{e(t) - e(t-T)}{T}}{T}$<br>$\frac{d^2e(t)}{dt^2} = \frac{e(t+T) - 2e(t) + e(t-T)}{T^2}$ |

Dans les deux cas, on retrouve l'approximation centrée issue de l'application de deux développements de Taylor à l'ordre 2.

• **<u>Conclusion</u>**

La dérivée en t s'exprime en fonction de valeurs de la fonction en :




On veut généralement trouver $f(t+T)$ connaissant $f(t)$ et $f(t-T)$. On préfèrera donc écrire proprement un double développement de Taylor

### *A.VI.2.a.iii Dérivées d'ordre supérieurs*

On pourra procéder de la même manière pour obtenir des dérivées d'ordres supérieurs

### *A.VI.2.a.iv Précision des solutions*

Plus $T$ sera petit, plus les résultats seront proches de la réalité, la dérivée réelle étant la limite de nos formules quand $T$ tend vers 0…

### A.VI.2.b Equations du premier et second ordre

#### *A.VI.2.b.i Equation du premier ordre*

Soit l'équation $y'(t) = f\big(t, y(t)\big)$

Discrétisons $y'(t)$ avec la méthode d'Euler explicite :

$$y'(t) = \frac{y(t+dt) - y(t)}{dt}$$

On a donc :

$$y(t+dt) = y(t) + y'(t)dt$$

Ou encore :

$$y(t+dt) = y(t) + f\big(t, y(t)\big)dt$$

A partir du moment où vous avez défini la fonction $f\big(t, y(t)\big)$, il reste alors à programmer une résolution entre deux valeurs de temps $t_1$ et $t_2$ en définissant la valeur initiale de $y(t_1)$.

#### *A.VI.2.b.ii Equation du second ordre*

Soit l'équation

$$y''(t) = f\big(t, y(t), y'(t)\big)$$

Nous pourrions résoudre cette équation comme vu précédemment en introduisant un développement de Taylor à l'ordre 2 pour $y''(t)$. Voici comment faire autrement.

Soit le vecteur $V(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$

On peut proposer une discrétisation de $y'(t)$ et $y''(t)$ à l'ordre 1 :

$$y'(t) = \frac{y(t+dt) - y(t)}{dt} \quad ; \quad y''(t) = \frac{y'(t+dt) - y'(t)}{dt}$$

On a alors :

$$\begin{cases} y(t+dt) = y(t) + y'(t)dt \\ y'(t+dt) = y'(t) + y''(t)dt = y'(t) + f\big(t, y(t), y'(t)\big)dt \end{cases}$$

$$V(t+dt) = V(t) + dt \begin{pmatrix} y'(t) \\ f\big(t, y(t), y'(t)\big) \end{pmatrix}$$

A partir du moment où vous avez défini la fonction $f\big(t, y(t), y'(t)\big)$, il reste alors à programmer une résolution entre deux valeurs de temps $t_1$ et $t_2$ en définissant la valeur initiale de $y(t_1)$ et $y'(t_1)$.

Exemple :

Soit une masse soumise à la gravité dont on veut déterminer les positions successives en chute libre sous l'action de la gravité et d'une force de frottement fluide. L'application du PFD donne :

$$mg - \mu v = ma$$

$$ma + \mu v = mg$$

$$m\frac{d^2z(t)}{dt^2} + \mu\frac{dz(t)}{dt} = mg$$

$$mz''(t) + \mu z'(t) = mg$$

$$mz''(t) = mg - \mu z'(t)$$

On a donc :

$$f\big(t, z(t), z'(t)\big) = mg - \mu z'$$

On trouve alors la nouvelle position $z(t + dt)$ en $t + dt$, connaissant $z(t)$ et $z'(t)$, en calculant :

$$\begin{pmatrix} z(t+dt) \\ z'(t+dt) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} + dt\begin{pmatrix} z'(t) \\ f\big(t, z(t), z'(t)\big) \end{pmatrix}$$

### A.VI.2.c Modélisation par équations aux différences

A la différence des méthodes vues au paragraphe précédent pour la résolution d'équations simples de la forme $y'(t) = f\big(t, y(t)\big)$ ou $y''(t) = f\big(t, y(t), y'(t)\big)$, on va pouvoir ici résoudre tous types d'équations différentielles ☺. Au concours, c'est plus généralement ce type de fonctions simples qui sont proposées.

La méthode que nous allons aborder ici est toutefois utilisable aussi pour les fonctions ci-dessus !

#### *A.VI.2.c.i Principe*

Soit un système répondant à une équation différentielle à coefficients constants du type :

$$\sum_{i}^{N_s} a_i \frac{d^i s(t)}{dt^i} = \sum_{i}^{N_e} b_i \frac{d^i e(t)}{dt^i}$$

Avec $s$ et $e$ des variables discrètes.

Supposons que $e$ est une entrée connue et $s$ une sortie recherchée.

Pour déterminer, à tout temps $t = t_0 + kT$, on exprimer chacune des dérivées avec les méthodes vues précédemment (Euler, Taylor, différences finies) afin d'obtenir une relation entre divers états de l'entrée et de la sortie et on exprime ensuite à l'aide de cette équation la valeur recherchée en fonction des valeurs connues de l'entrée et des valeurs précédentes de la sortie.

Autrement dit, une équation aux différences est de la forme :

$$s(t + dt) = f\big(t, s(t), s(t - dt), s(t - 2dt)\big) \dots$$

On veillera à traiter correctement les conditions initiales.

### A.VI.2.c.ii Exemple

- **Equation récurrente**

Reprenons l'exemple de la masse en chute libre étudiée avec la méthode précédente, dont l'équation était :

$$mg - \mu v = ma$$

$$ma + \mu v = mg$$

$$m\frac{d^2z(t)}{dt^2} + \mu\frac{dz(t)}{dt} = mg$$

On choisit d'exprimer les dérivées première et seconde de $z$ à l'aide d'un schéma Euler Explicite pour la dérivée première et Euler centré pour la dérivée seconde :

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{z(t+T) - z(t)}{T}$$

$$\frac{d^2z(t)}{dt^2} = \frac{z(t+T) - 2z(t) + z(t-T)}{T^2}$$

On obtient donc l'équation aux différences suivante :

$$m\frac{z(t+T) - 2z(t) + z(t-T)}{T^2} + \mu\frac{z(t+T) - z(t)}{T} = mg$$

On obtient alors la position à tout instant connaissant les positions antérieures :

$$\frac{mz(t+T)}{T^2} - \frac{2mz(t)}{T^2} + \frac{mz(t-T)}{T^2} + \frac{\mu z(t+T)}{T} - \frac{\mu z(t)}{T} = mg$$

$$\left(\frac{m}{T^2} + \frac{\mu}{T}\right)z(t+T) - \frac{2m + \mu T}{T^2}z(t) + \frac{m}{T^2}z(t-T) = mg$$

$$\frac{m + \mu T}{T^2}e(t+T) = \frac{2m + \mu T}{T^2}e(t) - \frac{m}{T^2}e(t-T) + mg$$

$$\boxed{z(t+T) = \frac{2m + \mu T}{m + \mu T}z(t) - \frac{m}{m + \mu T}z(t-T) + \frac{T^2}{m + \mu T}mg}$$

• **Prise en compte des conditions initiales**

Attention, à l'instant initial $t = t_0$, on a $z(t_0)$.

Pour calculer la valeur suivante, il faut $z(t_0)$ et $z(t_0 - T)$. Deux solutions :

- La vitesse initiale est nulle, alors on sait qu'avant $t_0$, $z(t) = z(t_0)$ et on peut donc affecter la valeur en $t_0 - T$ égale à la valeur en $t_0$
- La vitesse initiale est non nulle, on a alors :
$$\frac{dz(t_0)}{dt} = V_0 = \frac{z(t+T) - z(t)}{T}$$
On suppose qu'on a aussi :
$$\frac{dz(t_0)}{dt} = V_0 = \frac{z(t) - z(t-T)}{T}$$
On impose alors :
$$z(t - T) = z(t_0) - V_0 T$$

• **Remarque : Regroupement de termes dépendant de z dans le second membre**

Il serait possible de résoudre l'équation en intégrant la force de frottement fluide en second membre :

$$ma = mg - \mu v$$

A chaque instant, on calcule donc la valeur de $mg - \mu v$ que l'on appellera $A$. Pour calculer $v$ à chaque étape, on utilise Euler explicite à l'ordre 1 :

$$v = \frac{dz(t)}{dt} = \frac{z(t+T) - z(t)}{T}$$

L'équation est donc :

$$ma = A \Leftrightarrow a = \frac{A}{m} \Leftrightarrow \frac{z(t+T) - 2z(t) + z(t-T)}{T^2} = \frac{A}{m}$$

$$\Leftrightarrow z(t+T) - 2z(t) + z(t-T) = \frac{AT^2}{m}$$

$$\Leftrightarrow z(t+T) = \frac{AT^2}{m} + 2z(t) - z(t-T)$$

Cela peut être très utile en présence de termes non linéaires, par exemple une force en carré de la vitesse (frottements fluides réalistes…).

### A.VI.2.d Résolution d'équations et précision

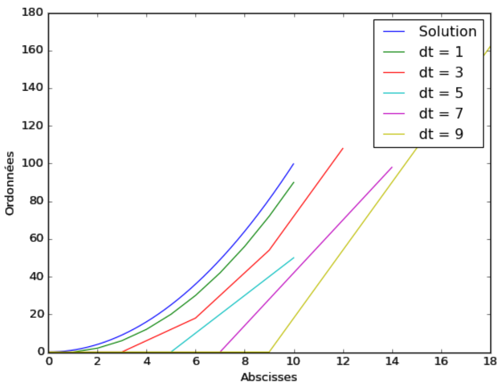
Comme nous l'avons dit, nos approximations de dérivées ne seraient exactes que si le pas de temps était infiniment nul. Ce n'est évidemment pas le cas, et plus le pas de temps est petit, plus les temps de calcul deviennent élevés…

Il faut donc être conscient que la méthode de résolution par discrétisations d'Euler induit des erreurs ! Et celles-ci se cumulent.

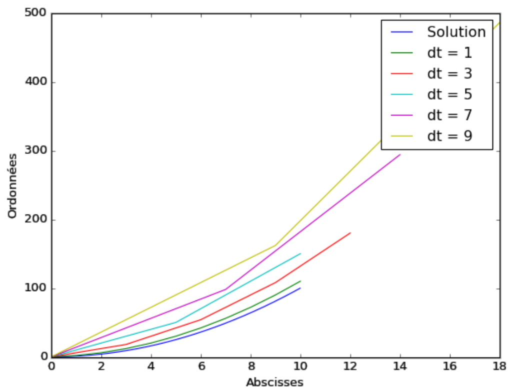
Soit la fonction $f(t) = t^2$.

Voici le résultat de la résolution de l'équation $f'(t) = 2t$ par la méthode d'Euler explicite ($y(t + dt) = y(t) + y'(\boldsymbol{t})dt$) et implicite ($y(t + dt) = y(t) + y'(\boldsymbol{t + dt})dt$) décrite au paragraphe précédent entre 0 et 10 pour des pas de temps différents :

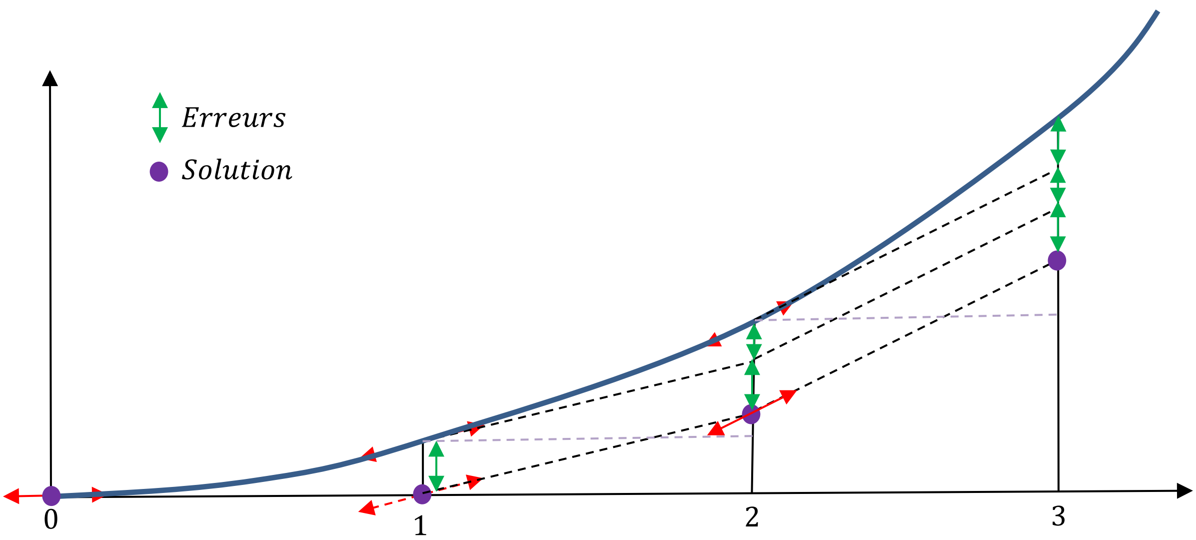
Euler Explicite




Euler Implicite




On remarque bien que plus le pas de temps est petit, plus la courbe tend vers la solution réelle. On peut noter que pour le pas de temps de 9, la première valeur calculée est très fausse. La suivante sera calculée à partir de cette fausse valeur… L'erreur se cumule ! Voici une illustration de ce qu'il se passe en explicite :



## A.VI.3 Problèmes discrets multidimensionnels

Maintenant que nous avons vu comment résoudre des problèmes à une dimension (une variable), voyons comment traiter des problèmes multidimensionnels.

Supposons un problème dont les équations se mettent sous la forme d'un système linéaire à n équations et n inconnues inversible, c'est-à-dire admettant une solution unique, ou encore dit de Cramer.

### A.VI.3.a Mise sous forme matricielle

Soit le système linéaire de $n$ équations à $m$ variables d'entrée $e_i(t)$ et $n$ variables de sortie $s_i(t)$:

$$\begin{cases} a_{11}s_1(t)+a_{12}s_2(t)+\cdots+a_{1n}s_n(t)=b_{11}e_1(t)+b_{12}e_2(t)+\cdots+b_{1m}e_m(t) \\ a_{21}s_1(t)+a_{22}s_2(t)+\cdots+a_{2n}s_n(t)=b_{21}e_1(t)+b_{22}e_2(t)+\cdots+b_{2m}e_m(t) \\ \vdots \\ a_{n1}s_1(t)+a_{n2}s_2(t)+\cdots+a_{nn}s_n(t)=b_{n1}e_1(t)+b_{n2}e_2(t)+\cdots+b_{nm}e_m(t) \end{cases}$$

Avec $a_{ij}$ et $b_{ij}$ des coefficients constants.

On peut alors traduire ce système d'équations sous forme matricielle :

$$K_E E(t)=K_S S(t)$$

Avec :

$$E(t)=\begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ \vdots \\ e_n(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad K_E=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ & & \vdots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

$$S(t)=\begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ \vdots \\ s_n(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad K_S=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Connaissant les entrées, l'objectif est alors de déterminer les sorties.

On peut donc se ramener à la résolution du système suivant :

$$K_S S(t)=B$$

Avec $B=K_E E(t)$ un vecteur dans lequel tout est connu.

## A.VI.3.b Méthode de Gauss avec recherche partielle des pivots

### *A.VI.3.b.i Exemple*

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 10 \\ x + 3y + 4z = 20 \\ x + 5y + z = 30 \end{cases}$$

Notre objectif est d'obtenir un système échelonné, c'est-à-dire dans lequel une première ligne contient une seule inconnue, une seconde ligne contient cette précédente inconnue et une autre, et ainsi de suite. Il sera alors aisé de déterminer chacune d'entre elles les unes après les autres.

• **Raisonnement sur le système**

On appelle pivot la première variable de la première ligne dont le coefficient est non nul. Dans notre cas, le pivot est donc la variable x :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} + y + 2z = 10 \\ x + 3y + 4z = 20 \\ x + 5y + z = 30 \end{cases}$$

On soustrait à chacune des lignes suivantes la première ligne afin d'y faire disparaître le pivot en multipliant si besoin par coefficient :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} + y + 2z = 10 \\ x - x + 3y - y + 4z - 2z = 20 - 10 \\ x - x + 5y - y + z - 2z = 30 - 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 10 \\ 2y + 2z = 10 \\ 4y - z = 20 \end{cases}$$

On procède ainsi pour chaque nouveau système à partir de la ligne suivante. Ainsi, le nouveau pivot du second système est y :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 10 \\ 2\boldsymbol{y} + 2z = 10 \\ 4y - 2 * 2y - z - 2 * 2z = 20 - 2 * 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 10 \\ 2y + 2z = 10 \\ -5z = 0 \end{cases}$$

On peut alors résoudre le système car une équation donne une première inconnue puis chacune des autres permet de trouver une inconnue supplémentaire :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 10 \\ 2y + 2z = 10 \\ -5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 10 \\ 2y = 10 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 5 = 10 \\ y = 5 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \\ z = 0 \end{cases}$$

• **Raisonnement matriciel**

$$\begin{cases} x+y+2z=10 \\ x+3y+4z=20 \\ x+5y+z=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Les opérations successives sur le système se traduisent ainsi :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 2 \\ 1-1 & 3-1 & 4-2 \\ 1-1 & 5-1 & 1-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20-10 \\ 30-10 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{2} & 2 \\ 0 & 4-2*2 & -1-2*2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 20-2*10 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{2} & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On voit qu'il est donc possible d'obtenir une matrice triangulaire, dite échelonnée, traduisant le même système linéaire que le système initial :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ \mathbf{0} & 2 & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -5 \end{bmatrix}$$

### *A.VI.3.b.ii Méthode générale*

**• Préliminaires**

Soit le système $S(t) = B$ inversible. Appelons $L_i$ la ligne $i$ du système $K_S S(t) = B$ et $C_i$ la colonne $i$ de la matrice $K_S$. Notre objectif est de procéder à des opérations permettant d'arriver à un système échelonné, c'est-à-dire à une forme de matrice $K_S$ dont un triangle (inférieur ou supérieur) est plein (diagonale incluse) et ou le reste est vide.

Théorème de Gauss-Jordan : Tout système linéaire se ramène à un système échelonné équivalent en utilisant 3 types d'opérations élémentaires :

- Permutation de 2 équations : $L_i \leftrightarrow L_j$
- Permutation de l'ordre des inconnues : $C_i \leftrightarrow C_j$
- Remplacement d'une équation (transvection) : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

Attention : ces opérations doivent être réalisées les unes après les autres, et non en même temps. En effet, il est alors possible de transformer le système et de ne plus avoir les mêmes solutions. Imaginons par exemple remplacer en même temps chaque ligne d'un système à n équations par le somme de toutes les lignes… On obtient alors n fois la même équation… Le système n'est plus inversible.

**• Notations**

Soit la matrice $K_S = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, le vecteur $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ et le vecteur solution $S = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}$

**• Algorithme de transformation**

Attention aux indices pris ci-dessous comme allant de 1 à n (0 à n-1 dans Python).

A la ligne $i \in [1, n-1]$ du système dont la matrice représentative est $\begin{bmatrix} a_{ii} & a_{i,i+1} & \dots & a_{in} \\ & \vdots & & \\ a_{ni} & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$:

- Si $a_{ii} \neq 0$ : On remplace les lignes $L_j, i \in [i+1, n]$ telles que : $L_j \leftarrow L_j - \frac{a_{ji}}{a_{ii}} L_i$ – C'est-à-dire qu'il faut modifier à la fois $K_S$ et $B$. Cette étape s'appelle la « transvection »
- Si $a_{ii} = 0$ :
  - On permute deux lignes (même système) ou deux colonnes (ie inconnues) afin d'obtenir un coefficient $a_{ii}$ différent de 0 – Préférer permuter des lignes afin de ne pas modifier l'ordre des inconnues et donc de simplifier la résolution
  - On procède comme proposé lorsque $a_{ii} \neq 0$

Remarque : si $a_{ii} = 0$ , et si le système traité est inversible, le sous système $\begin{bmatrix} a_{ii} & a_{i,i+1} & \dots & a_{in} \\ & \vdots & & \\ a_{ni} & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_i \\ b_{i+1} \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_i \\ b_{i+1} \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ de $n-i+1$ équations à $n-i+1$ inconnues ne peut présenter une première ligne ou colonne nulle, il existe donc obligatoirement un terme non nul dans la première ligne et la première colonne.

La matrice ainsi obtenue s'écrit sous la forme :

$$K'_S = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a'_{nn} \end{bmatrix}$$

Tel que :

$$K'_S\, S(t) = B'$$

• **Algorithme de résolution**

Ce qui suit n'est valable qu'en cas de permutations de lignes dans la méthode précédente, sinon l'ordre des inconnues peut avoir changé.

- Ligne $n$ :

$$a'_{nn} s_n = b'_n$$
$$\Rightarrow s_n = \frac{b'_n}{a'_{nn}}$$

- Ligne $n-1$ :

$$a'_{n-1,n-1} s_{n-1} + a'_{n-1,n} s_n = b'_{n-1}$$
$$\Rightarrow s_{n-1} = \frac{b'_{n-1} - a'_{n-1,n} s_n}{a'_{n-1,n-1}}$$

- Ligne $n-2$ :

$$a'_{n-2,n-2} s_{n-2} + a'_{n-2,n-1} s_{n-1} + a'_{n-2,n} s_n = b'_{n-2}$$
$$\Rightarrow s_{n-2} = \frac{b'_{n-2} - a'_{n-2,n} s_n - a'_{n-2,n-1} s_{n-1}}{a'_{n-2,n-2}}$$

Donc, d'une manière générale, à la ligne $i$ en résolvant de $n$ à 1 :

$$s_i = \frac{b'_i - \sum_{k=i}^{n} a'_{i,k} s_k}{a'_{ii}}$$

### *A.VI.3.b.iii Complexité*

• **Mise sous forme échelonnée**

En supposant qu'il n'est pas nécessaire d'effectuer de permutations de lignes, la transformation du système général en système échelonné s'effectue en $N$ opérations (ensemble d'aditions, soustractions, multiplications et ou divisions dont le nombre est fixe) telles que :

Pour chaque ligne $i$ du système de 1 à $n-1$, on effectue $N_i$ opérations avec :

- Une opération aux $(n-i)$ lignes en dessous et aux $(n-i+1)$ termes de chacune de ces lignes de $K$
- Une opération aux $(n-i)$ lignes en dessous de $B$

$$N_i = \sum_{j=1}^{n-i}(n-i+2) = (n-i)(n-i+2)$$

Soit au total :

$$N = \sum_{i=1}^{n-1} N_i = \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)(n-i+2) = \sum_{i=1}^{n-1}(n^2 - ni + 2n - ni + i^2 - 2i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1}(n(n+2) - 2(n+1)i + i^2)$$

$$= (n-1)n(n+2) - 2(n+1)\sum_{i=1}^{n-1} i + \sum_{i=1}^{n-1} i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

Soit :

$$N = (n-1)n(n+2) - 2(n+1)\frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$N = (n-1)n\left[(n+2) - (n+1) + \frac{(2n-1)}{6}\right] = (n-1)n\left[1 + \frac{(2n-1)}{6}\right]$$

$$N = \frac{(n-1)n(2n+5)}{6}$$

La complexité de la transformation en système échelonné dans le meilleur des cas est en :

$$O(n^3)$$

A ce nombre, dans le pire des cas, il faut effectuer pour chaque ligne $i$ un test sur les $(n-i)$ lignes en dessous puis une inversion afin d'avoir un terme $K_{ii}$ non nul, ce qui ajoute pour chaque ligne $N_i'$ opérations telles que :

$$N_i' = \left(\sum_{j=1}^{n-i} 1\right) + k = n - i + k$$

Avec $k$ coût de l'échange des $(n-i+1)$ termes à priori non nuls de K et du terme de B : $k = (n-i+1)+1$

$$N_i' = n - i + n - i + 2 = 2(n+1) - 2i$$

Et donc un coût supplémentaire de :

$$N' = \sum_{i=1}^{n-1} N_i' = \sum_{i=1}^{n-1} 2(n+1) - 2i = \sum_{i=1}^{n-1} 2(n+1) - 2\sum_{i=1}^{n-1} i$$

$$N' = 2(n-1)(n+1) - 2\frac{n(n-1)}{2}$$

$$N' = 2(n-1)(n+1) - n(n-1) = n(n-1)(2n+2-n) = n(n-1)(n+2)$$

La nombre d'opérations dans le pire des cas étant la somme $N + N'$, la complexité globale reste inchangée, en $O(n^3)$.

• **Résolution triangulaire**

A chaque ligne du système, une opération est réalisée… Complexité en $O(n)$.

• **Bilan**

La méthode de résolution de systèmes linéaires par pivot de Gauss est de complexité $O(n^3)$ quel que soit le système inversible initial.