

Dernière mise à jour	Systèmes régis par une équation différentielle du 1° et 2° ordre	Denis DEFAUCHY
02/09/2016		TD4

# Systemes régis par une équation différentielle du 1° et du 2° ordre

## TD4

### *Etude d'un système régi par une équation différentielle du 1° ordre*

Programme - Compétences		
A31	ANALYSER	Architectures fonctionnelle et structurelle : - chaîne directe - système asservi - commande
A51	ANALYSER	Grandeurs utilisées: - unités du système international - homogénéité des grandeurs
B24	MODELISER	Systèmes linéaires continus et invariants: - Modélisation par équations différentielles - Calcul symbolique - fonction de transfert; gain, ordre, classe, pôles, zéros
B25	MODELISER	Signaux canoniques d'entrée: - échelon
B26	MODELISER	Schéma-bloc: - fonction de transfert en chaîne directe - fonction de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée
B28	MODELISER	Modèles de comportement
C21	RESOUDRE	Réponses temporelle et fréquentielle: - systèmes du 1er et 2e ordre - intégrateur
C23	RESOUDRE	Rapidité des SLCI: - temps de réponse à 5%
D37	EXPERIMENTER	Identification temporelle d'un modèle de comportement

Dernière mise à jour 02/09/2016	Systèmes régis par une équ. diff. du 1° et 2° ordre	Denis DEFAUCHY TD4
------------------------------------	--	-----------------------

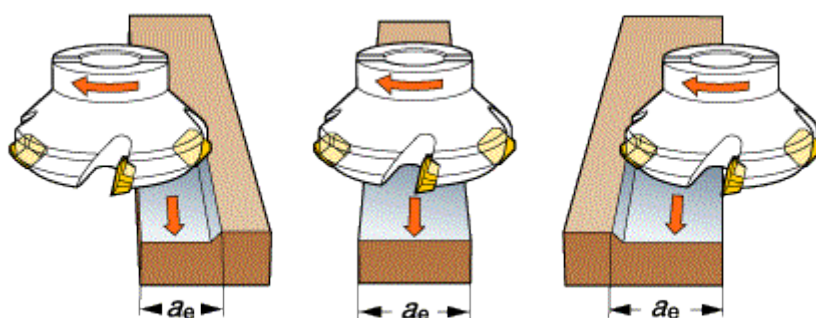
## Exercice 1: Système du 1° ordre

### *Mise en situation*

Une grande partie des pièces mécaniques utilisées aujourd'hui passent dans un centre d'usinage dans le but d'effectuer différentes opérations d'enlèvement de matière en fraisage.



Un outil (fraise) est mis en rotation par un moteur et va usiner les surfaces de la pièce à travailler. Une table support sur laquelle est maintenue la pièce à usiner présente un mouvement d'avance permettant à l'outil de réaliser les surfaces voulues.



La maîtrise de la découpe de l'outil passe par un contrôle précis de la vitesse d'avance, vitesse obtenue par l'intermédiaire d'un asservissement en vitesse, objet de cette étude.

Dernière mise à jour	Systèmes régis par une équ. diff. du 1° et 2° ordre	Denis DEFAUCHY
02/09/2016		TD4

La mise en mouvement de la table (avance) est réalisée à l'aide d'un moteur à courant continu régi par les équations suivantes :

(1)	$u(t) = e(t) + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$	Equations électriques du moteur à courant continu
(2)	$e(t) = K_e \omega_m(t)$	
(3)	$c_m(t) = K_c i(t)$	
(4)	$c_f(t) = f \omega(t)$	Couple de frottement proportionnel à la vitesse de rotation
(5)	$c_m(t) - c_f(t) - c_r(t) = J \frac{d\omega_m(t)}{dt}$	Equation issue du principe fondamental de la dynamique

Avec :

- $u(t)$  : Tension d'entrée aux bornes du moteur (V)
- $e(t)$  : Force contre électromotrice (V)
- $i(t)$  : Intensité (A)
- $\omega_m(t)$  : Vitesse de rotation du moteur ( $rad. s^{-1}$ )
- $c_m(t)$  : Couple moteur (N.m)
- $c_f(t)$  : Couple de frottement (N.m)
- $c_r(t)$  : Couple résistant (N.m)
- $L$  : Inductance de la bobine (H)
- $f$  : coefficient de frottement visqueux ( $N.m.s.rad^{-1}$ )
- $J$  : Inertie équivalente en rotation de l'arbre moteur ( $Kg.m^2$ )
- $R$  : Résistance électrique du moteur ( $\Omega$ )
- $K_e$  : Constante de force contre-électromotrice ( $V.rad^{-1}.s$ )
- $K_c$  : Constante de couple ( $N.m.A^{-1}$ )

Dans le cadre de cette étude, nous négligerons les frottements, l'inductance du moteur et considérerons qu'il n'y a pas de couple résistant.

On donne :

$$R = 0,45 \Omega$$

$$k_e = 0,169 V.rad^{-1}.s$$

$$k_c = 0,17 Nm/A$$

$$J = 0,01 kg.m^2$$

A sa tension nominale  $U_{nom} = 60 V$ , le moteur tourne à sa vitesse nominale  $\Omega_{nom} = 355 rad/s$ .

Une consigne de vitesse  $V_c$  est envoyée au système qui la convertit par l'intermédiaire d'un gain  $k_v = 10$  en une tension de consigne  $U_c$ . Cette tension est comparée à la tension image de la vitesse de déplacement de la table  $V_t$  mesurée par un capteur de vitesse de gain  $k_v$  avant d'être imposée aux bornes du moteur de fonction de transfert  $H_m(p)$ . En sortie du moteur, un système de vis à billes permet de transformer la vitesse de rotation de l'arbre moteur  $\Omega_m$  en une vitesse de translation de la table. On a :  $V_t = k_{ve} \Omega_m$  ( $k_{ve} = 7,96.10^{-4} m/rad$ ).

Dernière mise à jour	Systèmes régis par une équ. diff. du 1° et 2° ordre	Denis DEFAUCHY
02/09/2016		TD4

Pour avoir de bonnes conditions de coupe, la vitesse d'avance doit être égale à  $V_a = 0,3 \text{ m/s}$  avec une tolérance de 2%. Compte tenu des dimensions de la machine, cette vitesse doit être atteinte en moins d'une seconde et sur une distance de moins de 15 cm. La vitesse peut dépasser la vitesse de consigne de quelques pourcents avant de se stabiliser au plus près de la consigne. Enfin, l'intensité moteur ne doit pas dépasser 35 A au risque de le détériorer.

## *Etude du moteur*

**Question 1: Mettre en place le schéma bloc du moteur**

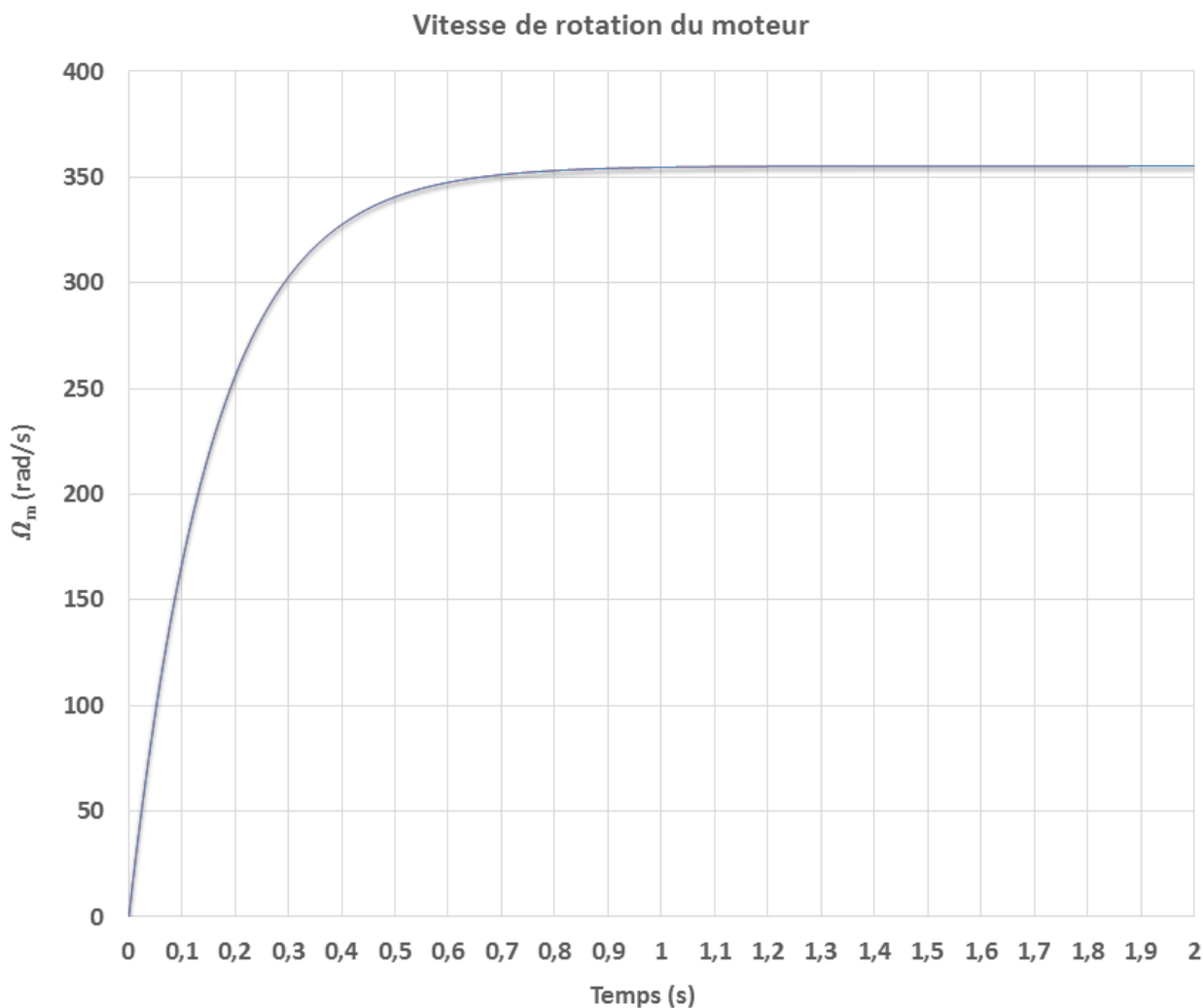
**Question 2: Déterminer la fonction de transfert du moteur  $H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}$**

**Question 3: Mettre cette fonction de transfert sous la forme d'un système du premier ordre  $H_m(p) = \frac{K_m}{1+T_m p}$  en précisant expression littérale et valeur numérique de  $K_m$  et  $T_m$**

**Question 4: En déduire le modèle simple du moteur composé d'un bloc reliant  $\Omega_m(p)$  et  $U(p)$**

**Question 5: Vérifier que la vitesse de rotation nominale  $\Omega_{nom}$  du moteur lorsqu'il est soumis à un échelon en tension égal à sa tension nominale est correcte.**

On donne la courbe de réponse du moteur à un échelon à sa tension nominale.



Dernière mise à jour	Systèmes régis par une équa. diff. du 1° et 2° ordre	Denis DEFAUCHY
02/09/2016		TD4

**Question 6: Déterminer les coefficients caractéristiques du moteur à l'aide de sa réponse temporelle**

Dernière mise à jour	Systèmes régis par une équ. diff. du 1° et 2° ordre	Denis DEFAUCHY
02/09/2016		TD4

## *Etude de l'asservissement en vitesse*

**Question 7:** Etablir le schéma bloc de l'asservissement en vitesse de la table support de pièce

**Question 8:** En déduire la fonction de transfert  $H(p) = \frac{V_t(p)}{V_c(p)}$  du système.

**Question 9:** Mettre cette fonction de transfert sous la forme d'un système du premier ordre  $H(p) = \frac{K}{1+Tp}$  en précisant expression littérale et valeur numérique de K et T

**Question 10:** En déduire le modèle simple du système composé d'un bloc reliant  $V_t(p)$  et  $V_c(p)$

**Question 11:** Donner le temps de réponse à 5% du système

**Question 12:** Déterminer la vitesse de translation  $V$  de la table obtenue par cet asservissement

**Question 13:** Conclure vis-à-vis du cahier des charges

On ajoute un correcteur de fonction de transfert  $C(p)$  dans la boucle d'asservissement en vitesse avant le moteur.

**Question 14:** Donner le schéma bloc du système avec ce correcteur

**Question 15:** Déterminer la fonction de transfert  $H'(p)$  du système avec ce correcteur

On choisit un correcteur à action proportionnelle :  $C(p) = A > 1$

**Question 16:** Mettre la fonction de transfert sous la forme  $H'(p) = \frac{K'}{1+T'p}$

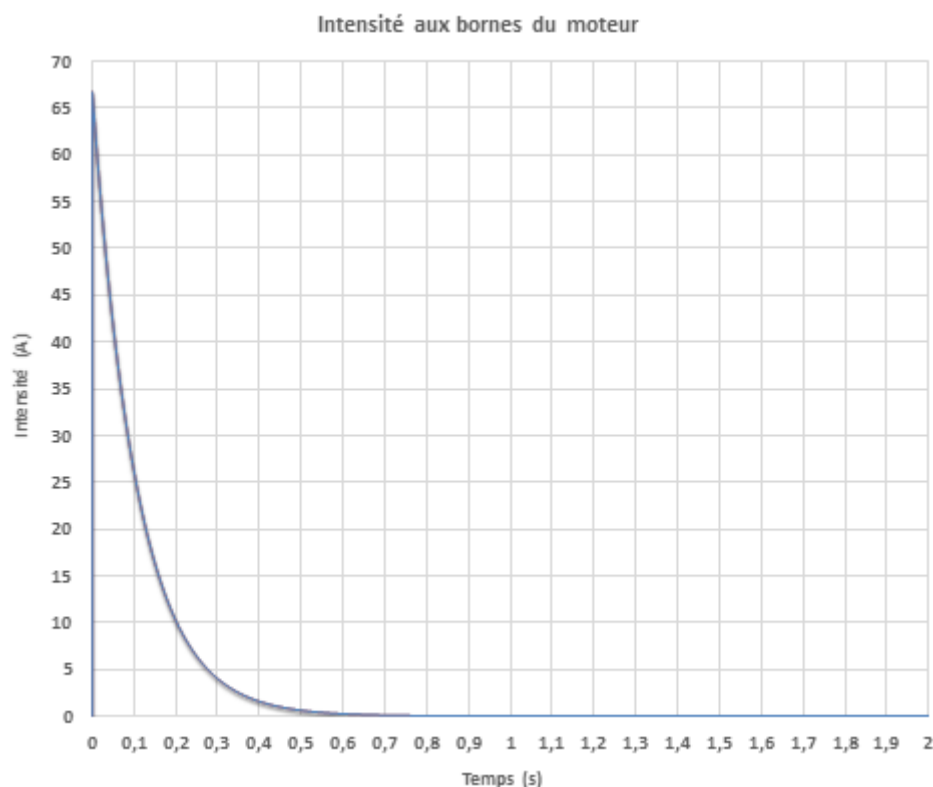
**Question 17:** En déduire le modèle simple du système composé d'un bloc reliant  $V_t(p)$  et  $V_c(p)$

**Question 18:** Que peut-on dire du temps de réponse du système corrigé

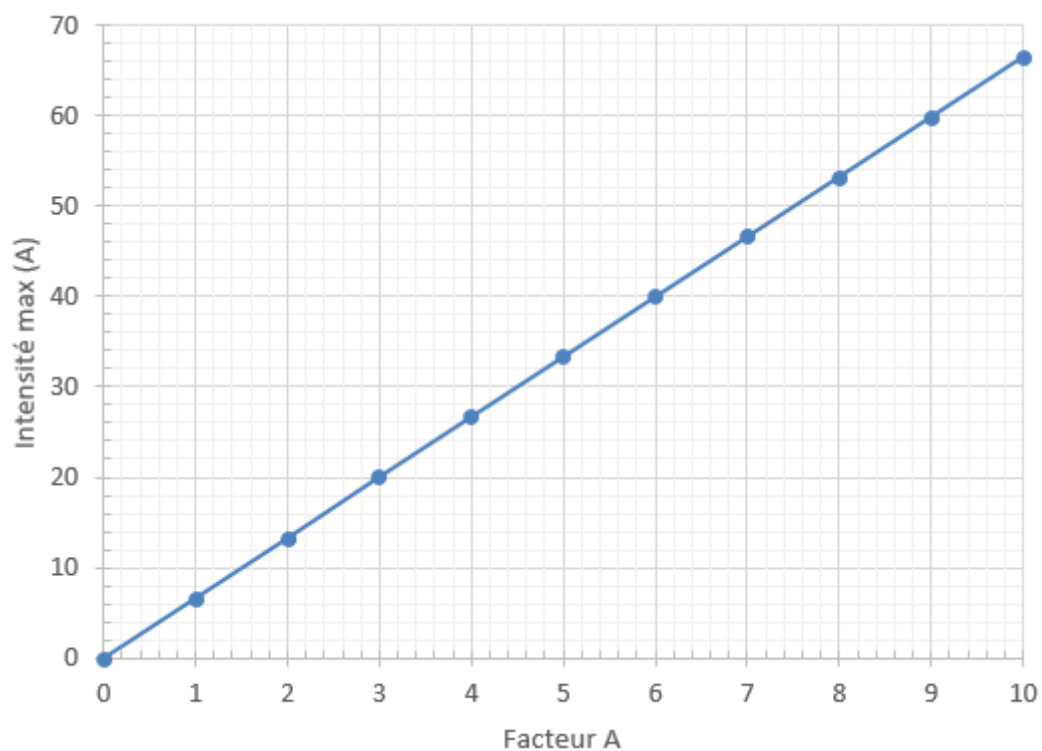
**Question 19:** Comment faire pour que l'écart statique soit le plus faible possible

Dernière mise à jour	Systèmes régis par une équa. diff. du 1° et 2° ordre	Denis DEFAUCHY
02/09/2016		TD4

On présente ci-dessous la courbe d'évolution de l'intensité entrant dans le moteur en fonction du temps pour  $A = 10$  :



On remarque que l'intensité maximale entrant dans le moteur est obtenue au démarrage.  
On propose ci-dessous une courbe donnant l'intensité maximale entrant dans le moteur en fonction du facteur  $A$  :



Dernière mise à jour	Systèmes régis par une équa. diff. du 1° et 2° ordre	Denis DEFAUCHY
02/09/2016		TD4

**Question 20: Compte tenu du cahier des charges, préciser la valeur limite  $A_{max}$  que l'on peut prendre**

**Question 21: En déduire les performances les meilleures que ce correcteur permet d'atteindre et conclure vis-à-vis du cahier des charges**

Nous proposerons dans le prochain TD une correction différente permettant d'améliorer les performances de ce système en passant à un second ordre.