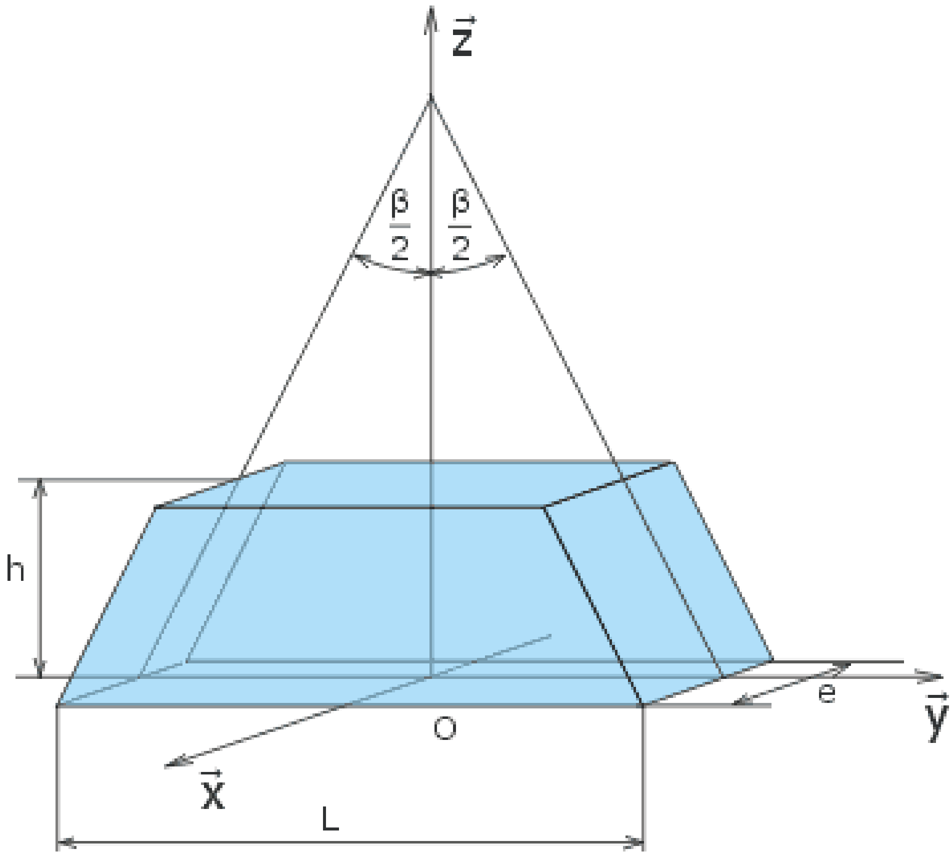
Enoncé

Considérons un solide S , homogène , de masse volumique ρ , possédant deux plans de symétrie. Il est entièrement défini par la figure ci-dessous et par les grandeurs : $L, h, e, \dfrac{\beta}{2}$.



1 Exprimer littéralement la masse m en fonction des données

2 Déterminer la position du centre de gravité G par rapport au repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

Solution

1 La masse est $m = \iiint \rho . dv = \rho . \iiint dv$. En prenant un élément de volume en cartésien : $dv = dx.dy.dz$, l'intégrale devient :

$$m = \iiint \rho . dv \; = \rho . \int_0^h \int_{-\left(-\tan\frac{\beta}{2} z + \frac{L}{2}\right)}^{-\tan\frac{\beta}{2} z + \frac{L}{2}} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} dx.dy.dz = 2.\rho.e. \int_0^h \left(-\tan\frac{\beta}{2}.z + \frac{L}{2}\right).dz$$

.

$$m = -\frac{\rho.e}{\tan\frac{\beta}{2}} . \left[\left(-\tan\frac{\beta}{2}.z + \frac{L}{2}\right)^2\right]_0^h = \rho.e.h.\left(L - h.\tan\frac{\beta}{2}\right)$$

La masse est donc $\boxed{m = \rho.e.h.\left(L - h.\tan\frac{\beta}{2}\right)}$

2 La position du centre de gravité est donnée par la relation : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{V} . \iiint \overrightarrow{OM}.dv$ dans le cas de $\rho = cte$. En explicitant la relation vectorielle, on a :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\rho}{m} . \int_0^h \int_{-\left(-\tan\frac{\beta}{2} z + \frac{L}{2}\right)}^{-\tan\frac{\beta}{2} z + \frac{L}{2}} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \left(x.\vec{x} + y.\vec{y} + z.\vec{z}\right).dx.dy.dz$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\rho}{m} . \int_0^h \int_{-\left(-\tan\frac{\beta}{2} z + \frac{L}{2}\right)}^{-\tan\frac{\beta}{2} z + \frac{L}{2}} e.\left(y.\vec{y} + z\,\vec{z}\right).dy.dz$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\rho.e}{m} . \int_0^h \left[\frac{y^2}{2}.\vec{y} + y.z.\vec{z}\right]_{-\left(-\tan\frac{\beta}{2} z + \frac{L}{2}\right)}^{-\tan\frac{\beta}{2} z + \frac{L}{2}} .dz \; = \frac{2.\rho.e}{m} . \int_0^h \left(\frac{L}{2} - z.\tan\frac{\beta}{2}\right).z.\vec{z}.dz$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{2.\rho.e}{m}.\left[\frac{L}{2}.\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3}.\tan\frac{\beta}{2}\right]_0^h.\vec{z} = \frac{2.\rho.e}{m}.\left(\frac{L}{2}.\frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3}.\tan\frac{\beta}{2}\right).\vec{z}$$

En utilisant l'expression de la masse m trouvée précédemment, nous obtenons :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{2.\rho.e}{\rho.e.h.\left(L - h.\tan\frac{\beta}{2}\right)}.\left(\frac{L}{2}.\frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3}.\tan\frac{\beta}{2}\right).\vec{z} = \frac{h}{\left(L - h.\tan\frac{\beta}{2}\right)}.\left(\frac{L}{2} - \frac{2.h}{3}.\tan\frac{\beta}{2}\right).\vec{z}$$

Le centre de gravité est donc positionné dans $R\left(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right)$ par :

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{h}{\left(L - h\tan\frac{\beta}{2}\right)}.\left(\frac{L}{2} - \frac{2.h}{3}.\tan\frac{\beta}{2}\right).\vec{z}}$$