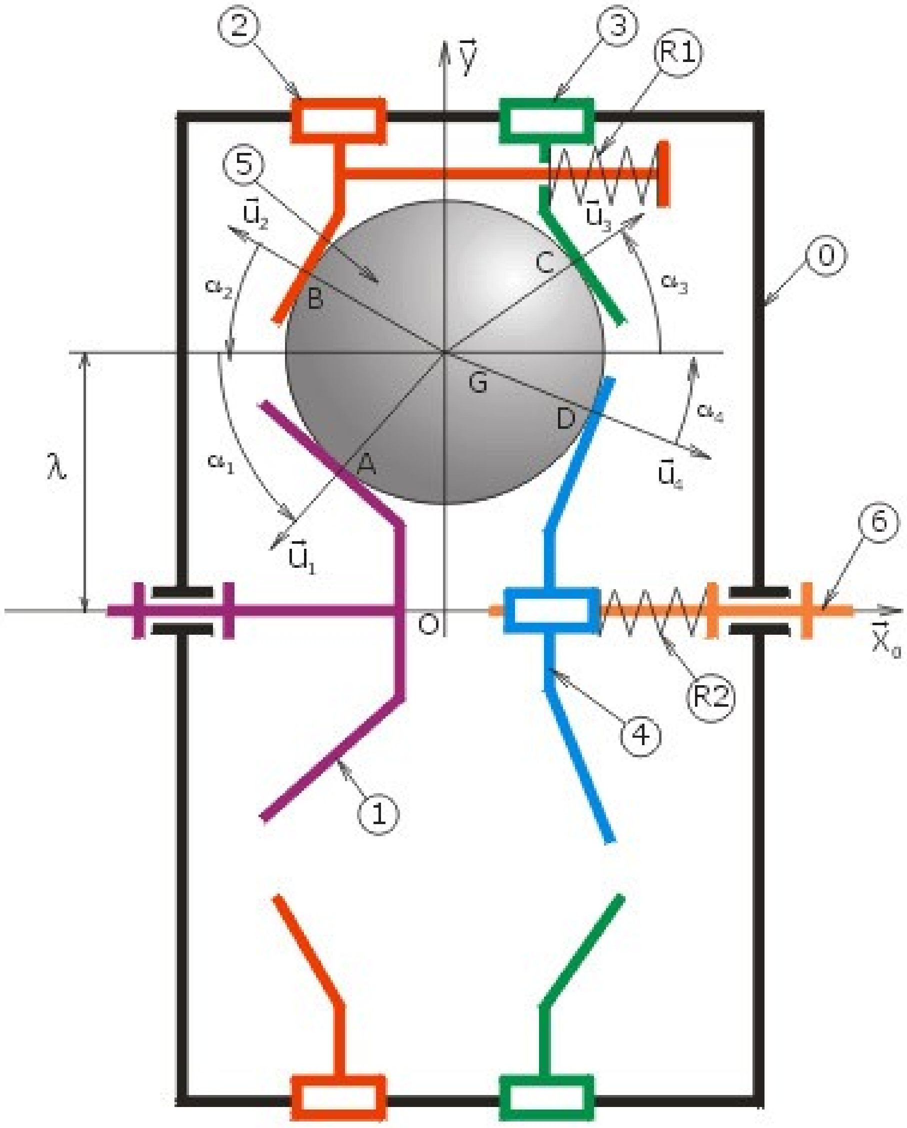
Enoncé *D'après le concours ENS Cachan 1985*

La figure représente un régulateur à cinq billes de rayon r dont les centres sont disposés sur un cercle de rayon λ variable. L'arbre d'entrée est l'arbre (6) et celui de sortie (1). Les billes sont en appui avec des plateaux coniques liés aux solides (1), (2), (3), (4) . Deux ressort R_1 et R_2 assurent le contact entre les différentes billes et les plateaux coniques. Les arbres d'entrée et de sortie sont en liaison pivot $(O, \vec{x}_0)$ par rapport au bâti (0). Le plateau (4) est en liaison glissière de direction $\vec{x}_0$ avec l'arbre d'entrée (6). Les plateaux (2) et (3) sont en liaison glissière de direction $\vec{x}_0$ par rapport au bâti (0). On ne s'intéresse qu'à la cinématique d'une bille. Le plan de représentation $(O, \vec{x}_0, \vec{y})$ de la figure contient le centre d'une bille . Les contacts billes/plateaux sont supposés sans glissement.



1 Déterminer l'axe instantané de rotation du mouvement de la bille (5) par rapport au bâti

2 Déterminer le torseur cinématique de la bille par rapport au bâti en G

3 Déterminer alors le rapport de vitesse $\frac{\omega_{10}}{\omega_{60}}$ sachant que $\vec{\Omega}_{1/0} = \omega_{10}.\vec{x}_0$ et que $\vec{\Omega}_{6/0} = \omega_{60}.\vec{x}_0$

Solution

1 Comme les billes roulent sans glisser sur les différents plateaux, nous pouvons écrire en B et C :

$$\vec{V}(B \in 5/2) = \vec{V}(B \in 5/0) = \vec{0}$$

$$\vec{V}(C \in 5/3) = \vec{V}(C \in 5/0) = \vec{0}$$

D'après le cours sur l'axe central du torseur cinématique, on peut déduire que l'axe central du mouvement de (5) par rapport à (0) passe par B et C , car en ces points les vecteurs vitesses sont minimaux. De plus le vecteur rotation $\vec{\Omega}_{5/0} = \omega_{50}.\frac{\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}$ est orienté suivant la direction $\frac{\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}$.

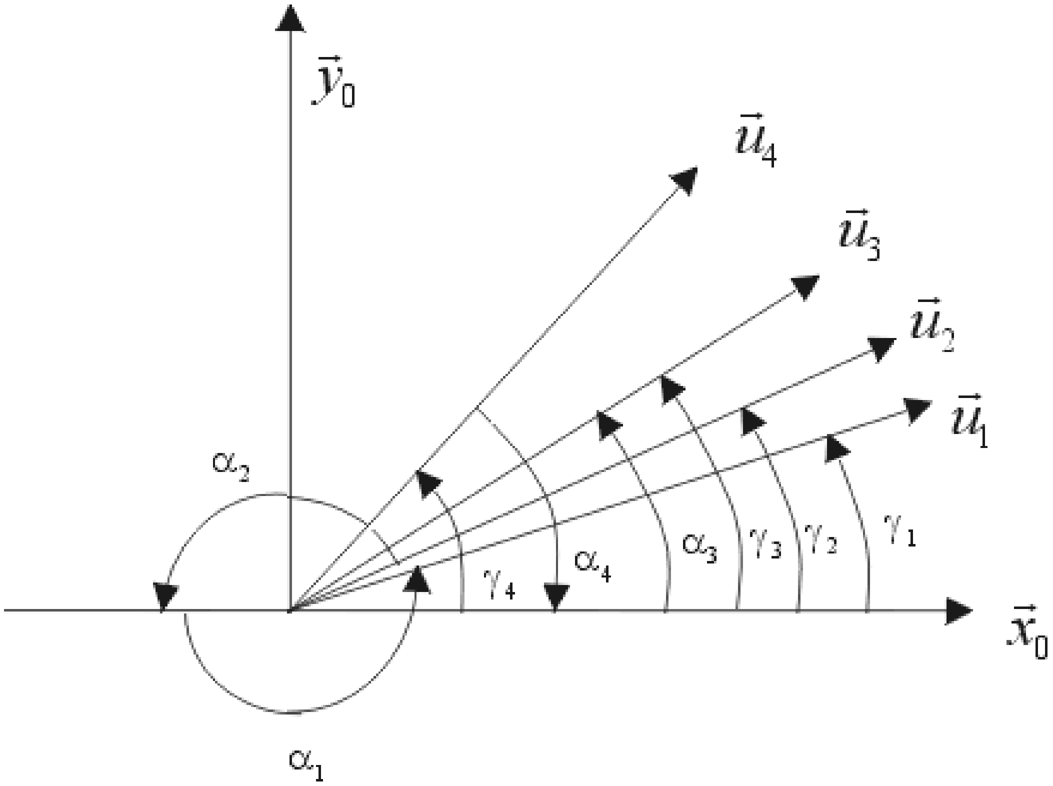
2 Pour déterminer le torseur cinématique de la bille par rapport au bâti, explicitons le non-glissement aux différents points de contact de la bille avec les plateaux.

* <u>Non glissement en D</u> :

$$\vec{V}(D \in 5/4) = \vec{0} \Rightarrow \underbrace{\vec{V}(D \in 5/0)}_{\underbrace{\vec{V}(C \in 5/0)}_{\vec{0}} + \overrightarrow{DC} \wedge \vec{\Omega}_{5/0}} = \underbrace{\vec{V}(D \in 4/0)}_{\underbrace{\vec{V}(O \in 4/0)}_{\vec{0}} + \overrightarrow{DO} \wedge \vec{\Omega}_{4/0}} = \underbrace{\omega_{40}}_{\omega_{60}}.(\lambda - r.\sin\alpha_4).\vec{z}$$

Explicitons $\overrightarrow{DC} \wedge \vec{\Omega}_{5/0}$:

$\overrightarrow{DC} \wedge \vec{\Omega}_{5/0} = \left(\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GC}\right) \wedge \omega_{50}.\frac{\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|} = \frac{r^2.\omega_{50}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}.\left((-\vec{u}_4 + \vec{u}_3) \wedge (-\vec{u}_2 + \vec{u}_3)\right)$. Il reste alors à déterminer $\left\|\overrightarrow{BC}\right\|$ et $(-\vec{u}_4 + \vec{u}_3) \wedge (-\vec{u}_2 + \vec{u}_3)$. Re-paramétrons les angles orientant les différents vecteurs unitaires $\vec{u}_i$.



Les angles permettant d'effectuer les produits vectoriels sont notés γ_i et sont compris entre $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. Sur cette figure plane on a replacé les angles α_i ; ce qui permet de trouver les relations qui existent entre les γ_i et les α_i .

$$\left|\begin{array}{l}\gamma_1=\alpha_1-\pi\\ \gamma_2=\pi-\alpha_2\\ \gamma_3=\alpha_3\\ \gamma_4=-\alpha_4\end{array}\right. \text{ On a alors : } \left|\begin{array}{l}\vec{u}_4\wedge\vec{u}_2=-\sin(\gamma_4-\gamma_2).\vec{z}=-\sin\left(-\alpha_4-(\pi-\alpha_2)\right).\vec{z}=\sin(\alpha_2-\alpha_4).\vec{z}\\ -\vec{u}_4\wedge\vec{u}_3=-\left(-\sin(\gamma_4-\gamma_3)\right).\vec{z}=\sin(-\alpha_4-\alpha_3).\vec{z}=-\sin(\alpha_4+\alpha_3).\vec{z}\\ -\vec{u}_3\wedge\vec{u}_2=-\left(-\sin(\gamma_3-\gamma_2)\right).\vec{z}=\sin\left(\alpha_3-(\pi-\alpha_2)\right).\vec{z}=-\sin(\alpha_3+\alpha_2).\vec{z}\end{array}\right.$$

Pour déterminer $\left\|\overrightarrow{BC}\right\|$, remarquons que :

$$\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2=\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC}=r^2.\underbrace{(\vec{u}_3-\vec{u}_2).(\vec{u}_3-\vec{u}_2)}_{2-2\vec{u}_3\vec{u}_2}=2.r^2.\left(1-\cos(\gamma_3-\gamma_2)\right)=2.r^2.\left(1+\cos(\alpha_3+\alpha_2)\right)$$

L'expression de ω_{50} est donc : $\omega_{50}=-\dfrac{\omega_{60}.(\lambda-r.\sin\alpha_4).\sqrt{2.\left(1+\cos(\alpha_3+\alpha_2)\right)}}{r.\left(\sin(\alpha_4+\alpha_3)+\sin(\alpha_3+\alpha_2)-\sin(\alpha_2-\alpha_4)\right)}$

Pour obtenir la vitesse du point G, utilisons la relation liant les vitesses de deux points d'un même solide :

$$\vec{V}(G\in 5/0)=\underbrace{\vec{V}(C\in 5/0)}_{\vec{0}}+\overrightarrow{GC}\wedge\vec{\Omega}_{5/0}=r.\vec{u}_3\wedge\omega_{50}.\frac{\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}=\frac{r^2.\omega_{50}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}.\underbrace{\left((\vec{u}_3)\wedge(-\vec{u}_2+\vec{u}_3)\right)}_{-\sin(\alpha_3+\alpha_2).\vec{z}}$$

On a donc : $\vec{V}(G\in 5/0) = -\dfrac{r.\omega_{50}}{\sqrt{2.\left(1+\cos(\alpha_3+\alpha_2)\right)}}.\sin\left(\alpha_3+\alpha_2\right)\vec{z}$

Le torseur cinématique en G de la bille (5) par rapport au bâti (0) est donc :

$$\boxed{\left\{\vartheta_{5/0}\right\} = {}_G\begin{Bmatrix}\vec{\Omega}_{5/0} = \omega_{50}\cdot\dfrac{\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|} \\ \vec{V}(G\in 5/0)\end{Bmatrix} = {}_G\begin{Bmatrix}-\dfrac{\omega_{60}\cdot\left(\lambda - r.\sin\alpha_4\right).\left(-\vec{u}_2+\vec{u}_3\right)}{r.\left(\sin\left(\alpha_4+\alpha_3\right)+\sin\left(\alpha_3+\alpha_2\right)-\sin\left(\alpha_2-\alpha_4\right)\right)} \\ -\dfrac{r.\omega_{50}}{\sqrt{2.\left(1+\cos(\alpha_3+\alpha_2)\right)}}.\sin\left(\alpha_3+\alpha_2\right).\vec{z}\end{Bmatrix}}$$

3 Pour déterminer le rapport de vitesse sortie/entrée, utilisons le non-glissement en A et D :

* <u>En A nous pouvons écrire</u> :

$\vec{V}(A\in 5/1) = \vec{0}$

Ce qui entraîne donc :

$$\underbrace{\underbrace{\vec{V}(B\in 5/0)}_{\vec{0}} + \overrightarrow{AB}\wedge\vec{\Omega}_{5/0}}^{\vec{V}(A\in 5/0)} = \underbrace{\underbrace{\vec{V}(O\in 1/0)}_{\vec{0}} + \overrightarrow{AO}\wedge\vec{\Omega}_{1/0}}^{\vec{V}(A\in 1/0)}$$

$$= \omega_{10}\cdot\underbrace{\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GO}\right)}_{-r.\vec{u}_1-\lambda.\vec{y}}\wedge\vec{x}_0 = \omega_{10}\cdot\left(\lambda - r.\sin\alpha_1\right).\vec{z}$$

On a donc : $\underbrace{\overrightarrow{AB}\wedge\vec{\Omega}_{5/0}}_{\left(-r.\vec{u}_1+r.\vec{u}_2\right)\wedge\vec{\Omega}_{5/0}} = \omega_{10}\cdot\left(\lambda - r.\sin\alpha_1\right).\vec{z}$. Il reste à déterminer $\left(-\vec{u}_1+\vec{u}_2\right)\wedge\left(-\vec{u}_2+\vec{u}_3\right)$

$$\left|\begin{array}{l}\vec{u}_1\wedge\vec{u}_2 = -\vec{u}_2\wedge\vec{u}_1 = \sin\left(\gamma_2-\gamma_1\right).\vec{z} = \sin\left(\left(\pi-\alpha_2\right)-\left(\alpha_1-\pi\right)\right).\vec{z} = -\sin\left(\alpha_2+\alpha_1\right).\vec{z} \\ -\vec{u}_1\wedge\vec{u}_3 = \vec{u}_3\wedge\vec{u}_1 = -\sin\left(\gamma_3-\gamma_1\right)\vec{z} = -\sin\left(\alpha_3-\left(\alpha_1-\pi\right)\right)\vec{z} = \sin\left(\alpha_3-\alpha_1\right)\vec{z} \\ \vec{u}_2\wedge\vec{u}_3 = -\vec{u}_3\wedge\vec{u}_2 = -\sin\left(\alpha_3+\alpha_2\right).\vec{z}\end{array}\right.$$

La relation vectorielle est alors la suivante :

$$-\frac{\omega_{60}\cdot\left(\lambda-r.\sin\alpha_4\right).r.\left(-\sin\left(\alpha_2+\alpha_1\right)+\sin\left(\alpha_3-\alpha_1\right)-\sin\left(\alpha_3+\alpha_2\right)\right).\vec{z}}{r.\left(\sin\left(\alpha_4+\alpha_3\right)+\sin\left(\alpha_3+\alpha_2\right)-\sin\left(\alpha_2-\alpha_4\right)\right)} = \omega_{10}\cdot\left(\lambda-r.\sin\alpha_1\right).\vec{z}$$

Le rapport de vitesse est donc :

$$\boxed{\frac{\omega_{10}}{\omega_{60}}=\frac{\left(\lambda-r.\sin\alpha_4\right).\left(\sin\left(\alpha_2+\alpha_1\right)+\sin\left(\alpha_1-\alpha_3\right)+\sin\left(\alpha_3+\alpha_2\right)\right)}{\left(\lambda-r.\sin\alpha_1\right).\left(\sin\left(\alpha_4+\alpha_3\right)+\sin\left(\alpha_3+\alpha_2\right)-\sin\left(\alpha_2-\alpha_4\right)\right)}}$$