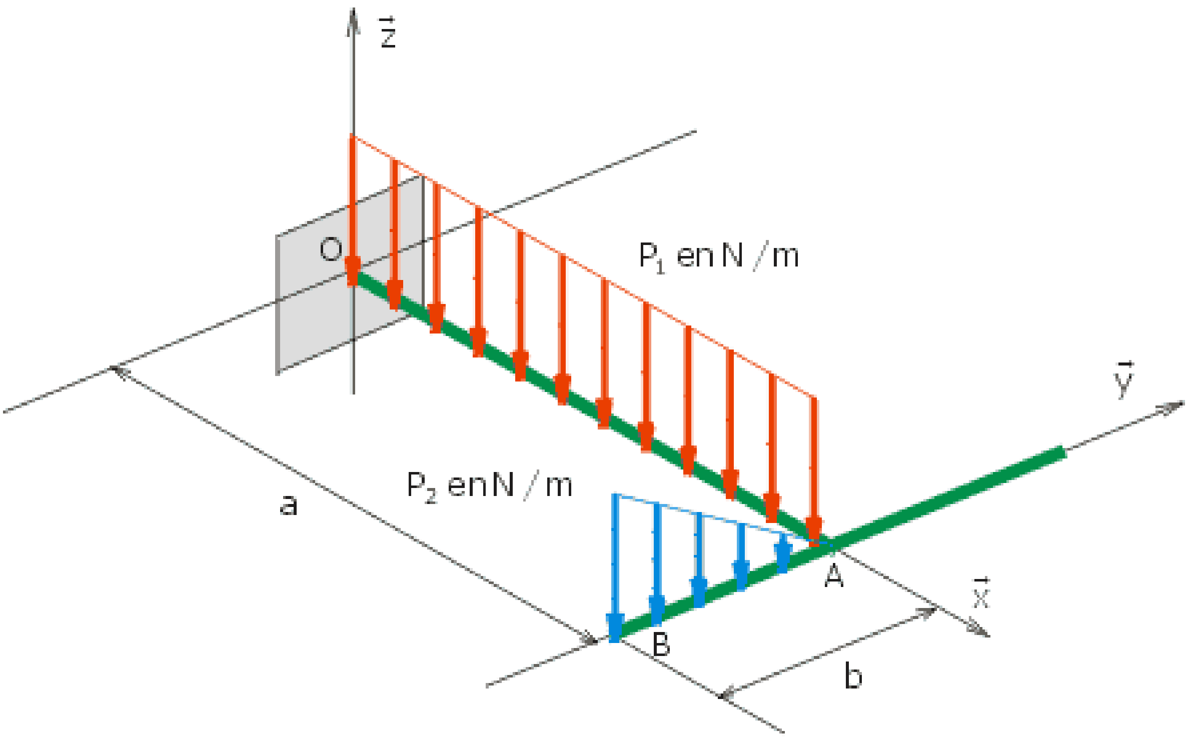
Enoncé

Considérons une poutre encastrée, soumise à des actions linéiques réparties :

Une action répartie, constante, P_1 en N/m le long de la portion $[O, A]$

Une action répartie variable avec $P_{max} = P_2$ en N/m le long de la portion $[B, A]$

Ces répartitions de charge induisent des éléments d'efforts orientés suivant la direction $-\vec{z}$, aux points courant des poutres soumis aux répartitions.



1 Déterminer en O le torseur d'action des actions de répartition sur l'ensemble de la poutre.

Solution

1 Etude du torseur d'action mécanique en O :

En un point courant $M \in [O, A]$ nous pouvons écrire :

$$_{M\in[O,A]}\{dT_{OA}\} = {}_{M\in[O,A]}\begin{Bmatrix} -R_1.dx.\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$_O\{dT_{OA}\} = {}_O\begin{Bmatrix} -R_1.dx.\vec{z} \\ \overrightarrow{OM} \wedge -R_1.dx\vec{z} \end{Bmatrix} = {}_O\begin{Bmatrix} -R_1.dx.\vec{z} \\ R_1.x.dx.\vec{y} \end{Bmatrix}$$

$$_O\{T_{OA}\} = {}_O\begin{Bmatrix} \int_0^a -R_1.dx.\vec{z} \\ \int_0^a R_1.x.dx.\vec{y} \end{Bmatrix} = {}_O\begin{Bmatrix} -R_1.a.\vec{z} \\ -R_1.\dfrac{a^2}{2}.\vec{y} \end{Bmatrix}$$

En un point courant $M \in [B, A]$ nous pouvons écrire :

$$_{M\in[B,A]}\{dT_{BA}\} = {}_{M\in[B,A]}\begin{Bmatrix} -P(y).dy.\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = {}_{M\in[B,A]}\begin{Bmatrix} \dfrac{P_2}{b}.y.dy.\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$_O\{dT_{BA}\} = {}_O\begin{Bmatrix} \dfrac{P_2}{b}.y.dy.\vec{z} \\ \overrightarrow{OM} \wedge \dfrac{P_2}{b}.y.dy\vec{z} \end{Bmatrix}$$

$$= {}_O\begin{Bmatrix} \dfrac{P_2}{b}.y.dy.\vec{z} \\ (a.\vec{x}+y.\vec{y}) \wedge \dfrac{P_2}{b}.y.dy.\vec{z} \end{Bmatrix} = {}_O\begin{Bmatrix} \dfrac{P_2}{b}.y.dy.\vec{z} \\ \left(-a.\dfrac{P_2}{b}.y.\vec{y}+\dfrac{P_2}{b}.y^2.\vec{x}\right).dy \end{Bmatrix}$$

$$_O\{T_{BA}\} = \left\{\begin{matrix} \int_{-b}^{0} \frac{P_2}{b}.y.dy.\vec{z} \\ \int_{-b}^{0}\left(-a.\frac{P_2}{b}.y.\vec{y}+\frac{P_2}{b}.y^2.\vec{x}\right).dy \end{matrix}\right\}_O = \left\{\begin{matrix} -P_2.\frac{b}{2}.\vec{z} \\ a.P_2.\frac{b}{2}.\vec{y}+.P_2.\frac{b^2}{3}.\vec{x} \end{matrix}\right\}_O$$

Le torseur résultant en O sera :

$$_O\{T_{OB}\} = {}_O\{T_{OA}\} + {}_O\{T_{BA}\}$$

$$_O\{T_{OB}\} = \left\{\begin{matrix} -P_1.a.\vec{z} \\ -P_1.\frac{a^2}{2}.\vec{y} \end{matrix}\right\}_O + \left\{\begin{matrix} -P_2.\frac{b}{2}.\vec{z} \\ a.P_2.\frac{b}{2}.\vec{y}+.P_2.\frac{b^2}{3}.\vec{x} \end{matrix}\right\}_O$$

$$\boxed{_O\{T_{OB}\} = \left\{\begin{matrix} -\left(P_1 a+P_2.\frac{b}{2}\right)\vec{z} \\ P_2.\frac{b^2}{3}.\vec{x}+a.\left(P_1.\frac{a}{2}+P_2.\frac{b}{2}\right).\vec{y} \end{matrix}\right\}_O}$$