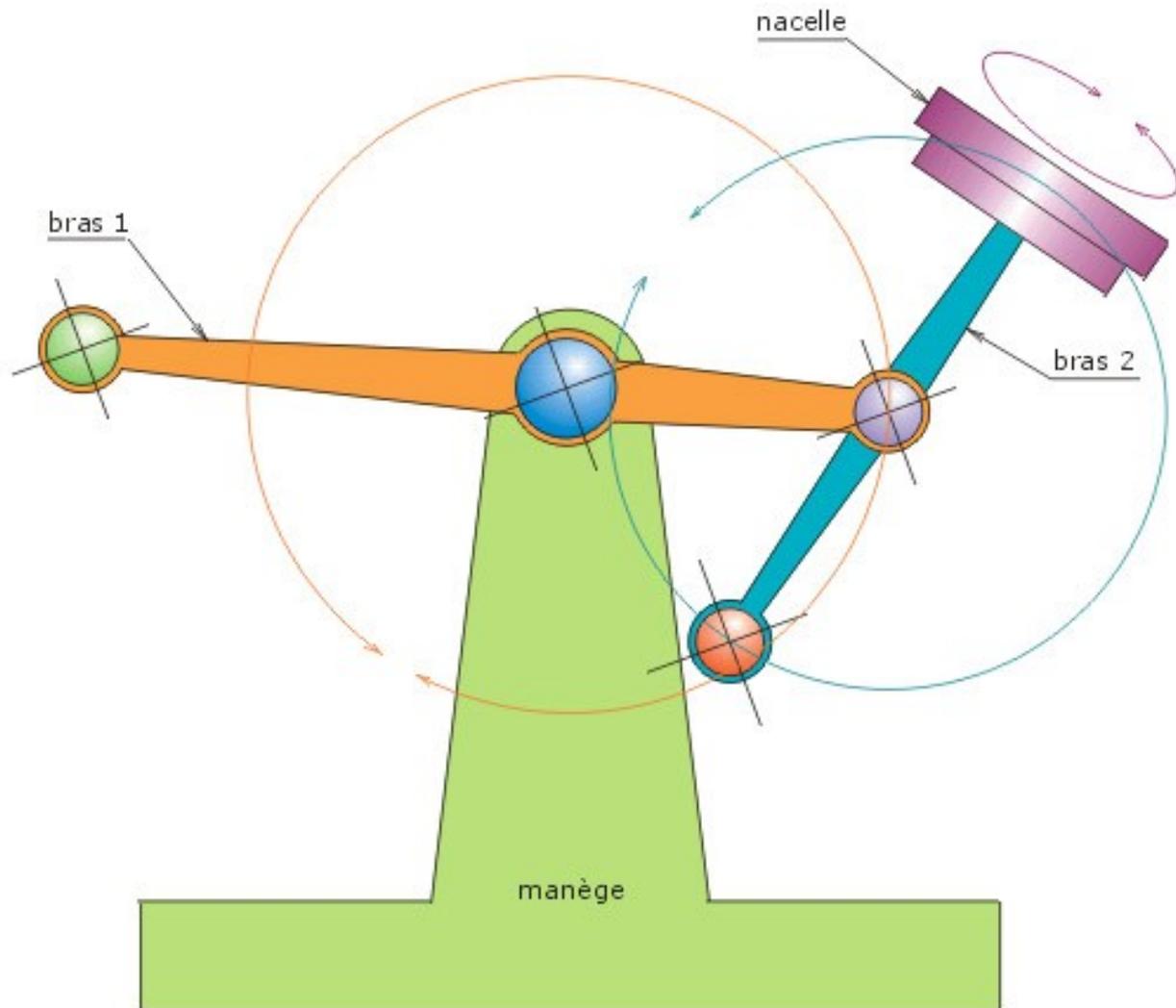


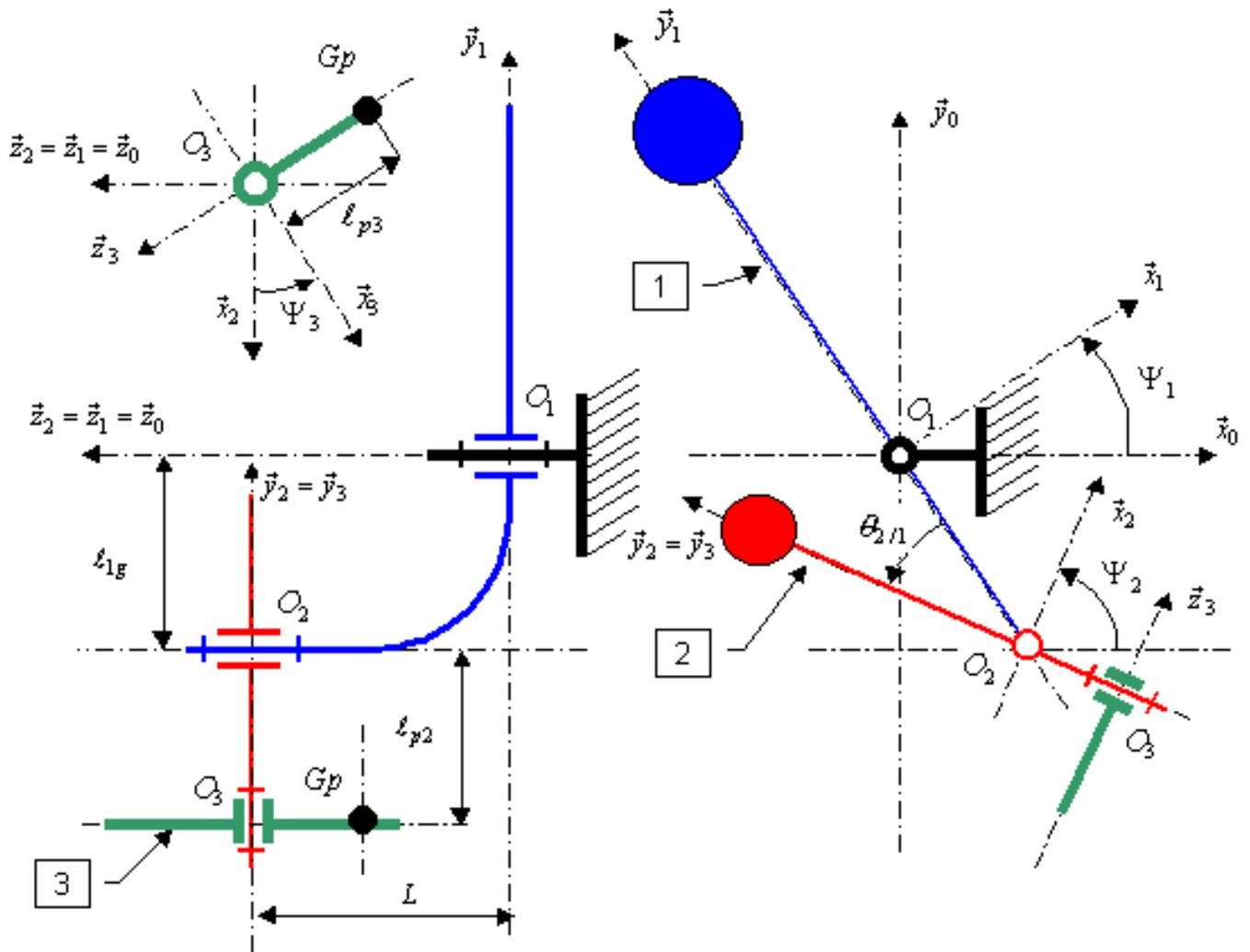
**Enoncé** → D'après concours e4a PSI 1999

Avec le "Magic Arms", la société WAAGNER-BIRO a développé un nouveau manège procurant aux passagers de nouvelles sensations dues à des séquences variées de mouvements. L'installation est composée d'une structure métallique d'environ 12m de haut avec 2 bras mobiles



**Schéma de principe du "Magic Arms"**

Les passagers s'assoient sur 39 sièges en mousse disposés sur une plate-forme tournante au design novateur et sont parfaitement maintenus par un harnais. Dès que tous les passagers sont assis et attachés, le bras principal (bras 1) et le bras pivot (bras 2), liés l'un à l'autre au début du cycle, commencent à tourner. En même temps la nacelle tourne autour de son axe. Après 9 secondes, le maximum de hauteur est atteint et les 2 bras se désindexent et se mettent à tourner indépendamment l'un de l'autre. Tous les mouvements sont pilotés par un ordinateur. Cette installation permet une combinaison de mouvements entièrement nouvelle. Les passagers sont "fous" de ces tours de manège dans des positions verticales ou inclinées, tête en bas ou en haut, incluant des mouvements combinés dans les 3 dimensions. Ils adorent être secoués et faire des looping à une vitesse élevée. Le repère d'étude lié au bâti  $S_0$  est noté  $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ . Le point  $O_0$  est confondu avec  $O_1$ .



1- Expression de la vitesse du passager le plus sollicité.

1-1 Exprimer les taux de rotation absolus de chacun des solides  $S_i$ ,  $\vec{\Omega}(S_i / S_0) = \vec{\Omega}(S_i / R_0)$ , en fonction des vitesses articulaires  $(\dot{\Psi}_1, \dot{\Psi}_2, \dot{\Psi}_3)$ , où  $\dot{\Psi}_i = \frac{d\Psi_i}{dt}$

**1.2** Donner, pour chaque solide, l'expression du taux de rotation relatif  $\vec{\Omega}(S_i / S_j)$ . En déduire l'expression des vitesses articulaires relatives  $\dot{\theta}_{i/j}$  en fonction des  $\dot{\Psi}_i$ .

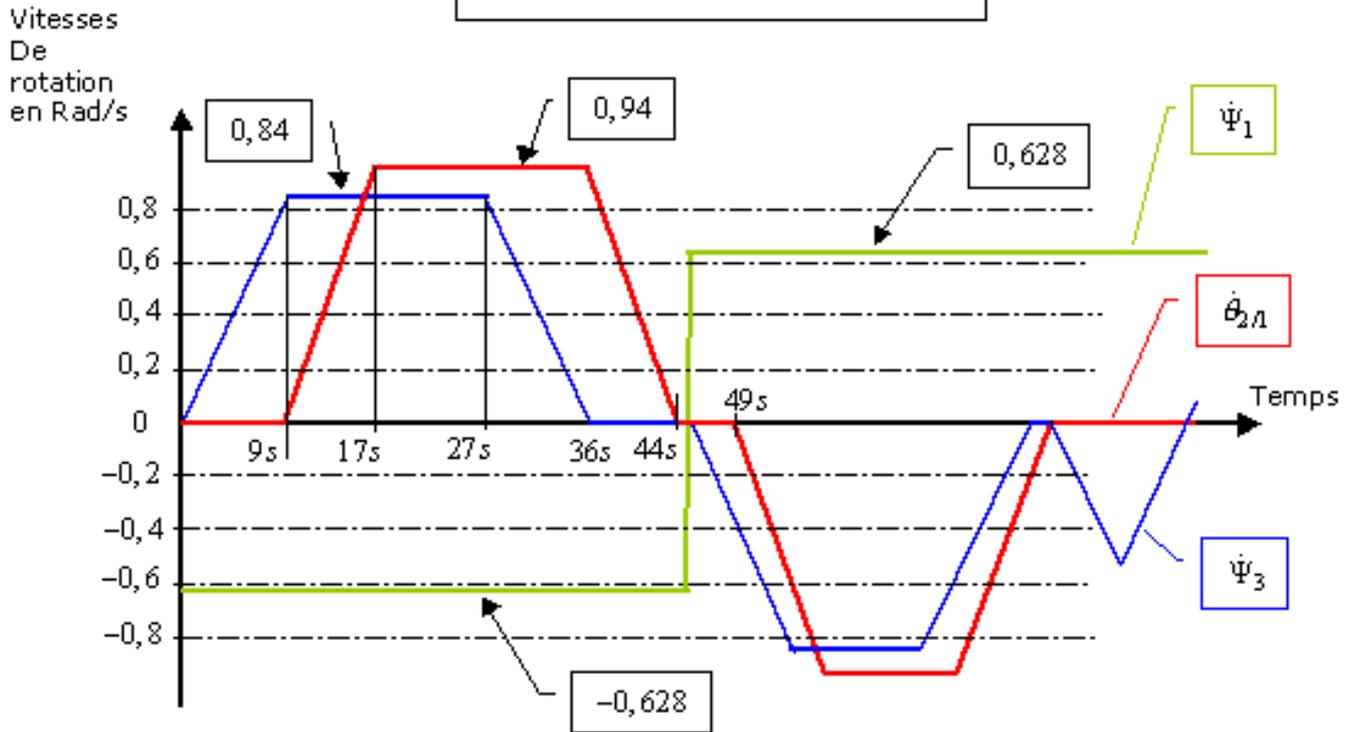
La rotation relative du solide  $S_i$  par rapport au solide  $S_j$  est notée  $\theta_{i/j}$ .

**1.3** Montrer que l'expression de la vitesse du passager (point  $Gp$ ), notée  $\vec{V}(Gp \in S_3 / R_0)$  a la forme suivante :

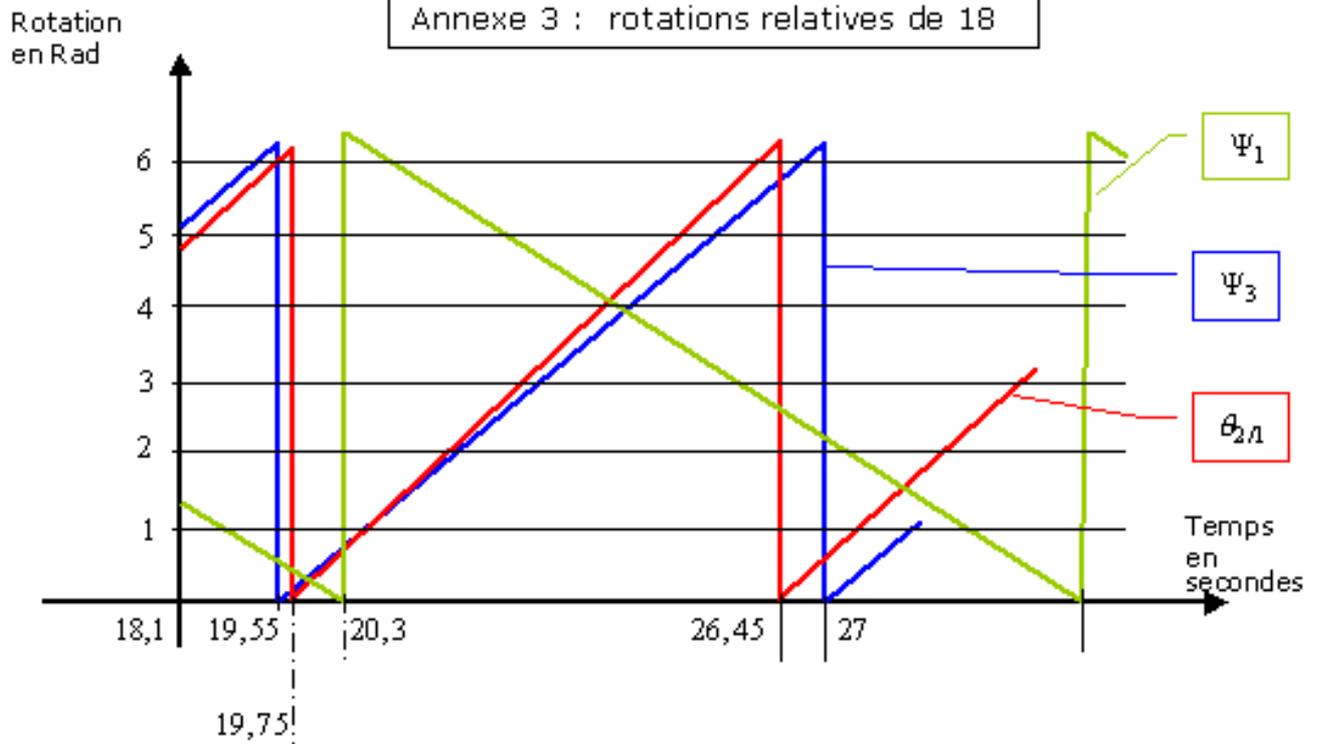
$$\vec{V}(Gp \in S_3 / R_0) = l_{1h} \dot{\theta}_{1/0} \vec{x}_1 + l_{p2} (\dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0}) \vec{x}_2 - l_{p3} \dot{\theta}_{3/2} \vec{x}_3 - \sin \theta_{3/2} l_{p3} (\dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0}) \vec{y}_2$$

**1.4** Exprimer analytiquement les valeurs des angles  $(\theta_{1/0}, \theta_{2/1}, \theta_{3/2})$  dans l'intervalle de temps  $[17, 27]$  secondes à partir de l'annexe 2. Vous donnerez la valeur numérique de ces angles pour  $t = 19,8$  s en les ramenant dans le domaine  $[0, 2\pi]$ .

Annexe 2 : Vitesses de



Annexe 3 : rotations relatives de 18



1.5 Après avoir exprimé  $\vec{V}(G_p \in S_3 / R_0)$  dans la base  $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ , vérifier que la relation trouvée à la question 1.3 pour le temps  $t = 19,8$  s nous donne une norme de vitesse  $\|\vec{V}(G_p \in S_3 / R_0)\| = 10 \text{ m/s}$ . On

$$\text{prendra : } \begin{cases} \ell_{1k} = 3,9m \\ \ell_{p2} = 2,87m \\ \ell_{p3} = 2,61m \end{cases}$$

2- Expression de l'accélération du passager pour l'intervalle de temps [17, 27]

**2.1** Exprimer  $\vec{\Gamma}(Gp \in S_3 / R_0)$  dans la base  $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$

**Solution**

**1.1** En utilisant le paramétrage proposé, il vient :

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}_{S_1/R_0} &= \dot{\Psi}_1 \vec{z}_0 \\ \vec{\Omega}_{S_2/R_0} &= \dot{\Psi}_2 \vec{z}_0 \\ \vec{\Omega}_{S_3/R_0} &= \dot{\Psi}_3 \vec{y}_2 + \dot{\Psi}_2 \vec{z}_0 \end{aligned}$$

**1.2** Déterminons ensuite les taux de rotations relatifs :

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}_{S_3/S_2} &= \dot{\theta}_{3/2} \vec{y}_2 = \dot{\Psi}_3 \vec{y}_2 \\ \vec{\Omega}_{S_2/S_1} &= \dot{\theta}_{2/1} \vec{z}_0 = (\dot{\Psi}_2 - \dot{\Psi}_1) \vec{z}_0 \\ \vec{\Omega}_{S_1/S_0} &= \dot{\theta}_{1/0} \vec{z}_0 = \dot{\Psi}_1 \vec{z}_0 \end{aligned}$$

**1.3** Pour déterminer la vitesse  $\vec{V}(Gp \in S_3 / R_0)$ , dérivons le vecteur position  $\overrightarrow{O_1 Gp}$ .

$$\vec{V}(Gp \in S_3 / R_0) = \left. \frac{d\overrightarrow{O_1 Gp}}{dt} \right)_{R_0} = \left. \frac{d\overrightarrow{O_1 O_2} + \overrightarrow{O_2 O_3} + \overrightarrow{O_3 Gp}}{dt} \right)_{R_0} =$$

$$\left. \frac{d(-\ell_{1g} \cdot \vec{y}_1 + L \cdot \vec{z}_0) + (-\ell_{p2} \cdot \vec{y}_2) + (-\ell_{p3} \cdot \vec{z}_3)}{dt} \right)_{R_0} \text{ on a donc}$$

$$\vec{V}(Gp \in S_3 / R_0) = -\ell_{1g} \cdot \left. \frac{d\vec{y}_1}{dt} \right)_{R_0} - \ell_{p2} \cdot \left. \frac{d\vec{y}_2}{dt} \right)_{R_0} - \ell_{p3} \cdot \left. \frac{d\vec{z}_3}{dt} \right)_{R_0} . \text{ En utilisant la dérivée d'un vecteur par}$$

rapport à deux bases nous avons :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{y}_1}{dt} \right)_{R_0} &= \left. \frac{d\vec{y}_1}{dt} \right)_{R_1} + \vec{y}_1 \wedge \vec{\Omega}_{0/1} = \vec{0} + \underbrace{\vec{y}_1 \wedge -\dot{\Psi}_1 \cdot \vec{z}_0}_{-\dot{\Psi}_1 \cdot \vec{x}_1} \\ \left. \frac{d\vec{y}_2}{dt} \right)_{R_0} &= \left. \frac{d\vec{y}_2}{dt} \right)_{R_2} + \vec{y}_2 \wedge \vec{\Omega}_{0/2} = \vec{0} + \underbrace{\vec{y}_2 \wedge -\dot{\Psi}_2 \cdot \vec{z}_0}_{-\dot{\Psi}_2 \cdot \vec{x}_2} \\ \left. \frac{d\vec{z}_3}{dt} \right)_{R_0} &= \left. \frac{d\vec{z}_3}{dt} \right)_{R_3} + \vec{z}_3 \wedge \vec{\Omega}_{0/3} = \vec{0} + \underbrace{\vec{z}_3 \wedge -(\dot{\Psi}_3 \vec{y}_2 + \dot{\Psi}_2 \cdot \vec{z}_0)}_{\dot{\Psi}_3 \cdot \vec{x}_3 + \dot{\Psi}_2 \cdot \sin \Psi_3 \vec{y}_2} \end{aligned}$$

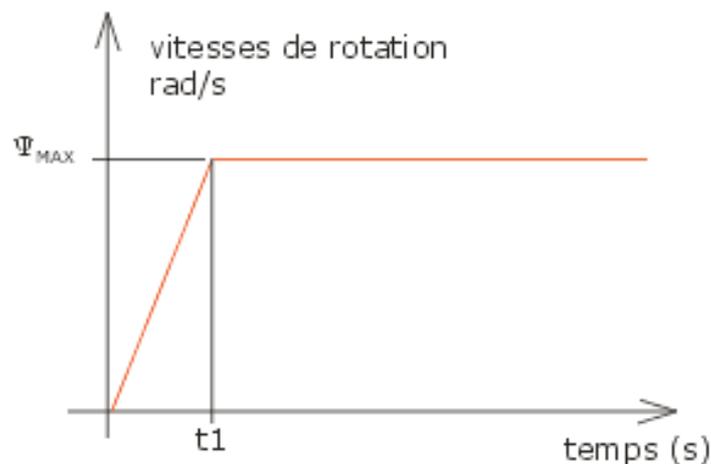
Nous obtenons ainsi :

$$\vec{V}(Gp \in S_3 / R_0) = \ell_{1g} \cdot \dot{\Psi}_1 \cdot \vec{x}_1 + \ell_{p2} \cdot \dot{\Psi}_2 \cdot \vec{x}_2 - \ell_{p3} (\dot{\Psi}_3 \cdot \vec{x}_3 + \dot{\Psi}_2 \cdot \sin \Psi_3 \vec{y}_2)$$

En fonction des taux de rotation relatifs, l'expression deviendra :

$$\vec{V}(Gp \in S_3 / R_0) = \ell_{1g} \cdot \dot{\theta}_{1/0} \cdot \vec{x}_1 + \ell_{p2} \cdot (\dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0}) \cdot \vec{x}_2 - \ell_{p3} (\dot{\theta}_{3/2} \cdot \vec{x}_3 + (\dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0}) \cdot \sin \Psi_3 \cdot \vec{y}_2)$$

**1.4** A partir des courbes fournies en annexe 2 et 3, nous pouvons retrouver l'expression des angles  $(\theta_{1/0}, \theta_{2/1}, \theta_{3/2})$ . Pour cela, dans un premier temps, intéressons-nous au cas général d'une loi de variation de vitesse en trapèze pour laquelle :  $\dot{\Psi}(t=0) = 0$  et  $\Psi(t=0) = 0$



Pour  $t \in [0, t_1]$ , nous avons :  $\frac{d\dot{\Psi}}{dt} = cte = \frac{\dot{\Psi}_{\max}}{t_1}$ . On déduit par intégration :  $\dot{\Psi}(t) = \frac{\dot{\Psi}_{\max}}{t_1} \cdot t + \underbrace{C_1}_{cte}$  avec

$C_1 = 0$  pour  $t = 0$ . En intégrant une seconde fois :  $\Psi(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\dot{\Psi}_{\max}}{t_1} t^2 + \underbrace{C_2}_{cte}$  avec  $C_2 = \Psi_0$  pour  $t = 0$ .

On a donc 
$$\Psi(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\dot{\Psi}_{\max}}{t_1} t^2 + \Psi_0$$

Pour  $t \in [t_1, \dots]$ , nous avons :  $\dot{\Psi} = cte = \dot{\Psi}_{\max}$ . On déduit par intégration :  $\Psi(t) = \dot{\Psi}_{\max} \cdot t + C_3$  avec pour

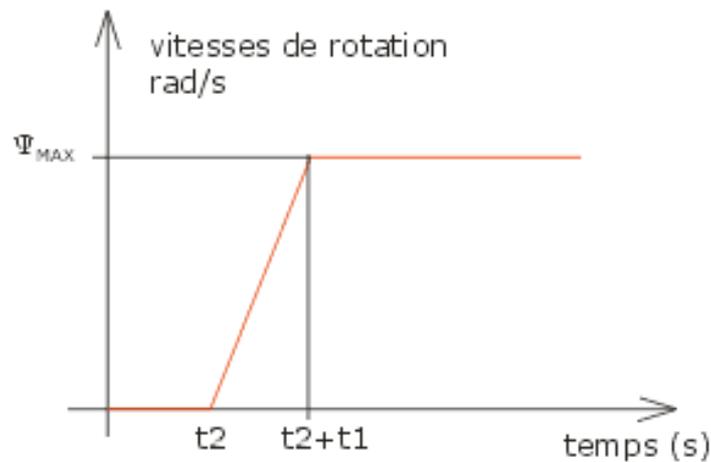
$$t = t_1, \Psi(t_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\dot{\Psi}_{\max}}{t_1} t_1^2 + \Psi_0 = \frac{1}{2} \cdot \dot{\Psi}_{\max} t_1 + \Psi_0$$

On obtient l'expression générale pour  $t \in [t_1, \dots]$  :

$$\Psi(t) = \dot{\Psi}_{\max} \cdot (t - t_1) + \frac{1}{2} \cdot \dot{\Psi}_{\max} t_1 + \Psi_0$$

Cette expression est valable sur un intervalle de temps sur lequel la vitesse est constante.

En considérant un retard  $t_2$



l'expression devient :

$$\Psi(t) = \dot{\Psi}_{\max} \cdot (t - t_1 - t_2) + \frac{1}{2} \cdot \dot{\Psi}_{\max} t_1 + \Psi_0$$

Nous pouvons maintenant appliquer ce travail aux trois cas proposés pour  $t \in [17, 27]$  :

\*Pour  $\Psi_1(t) = \theta_{1/0}(t)$  on a :

$$\begin{cases} t_1 = 9 \\ t_2 = 0 \\ \dot{\Psi}_{1_{\max}} = 0,84 \\ \Psi_1(0) = -12,64rd \approx -4\pi \end{cases}$$

On obtient l'expression de  $\Psi(0)$  à partir de l'annexe 3 sur laquelle on a  $\Psi_1(t = 19,55s) = 0$ .

$$\boxed{\Psi_1(t) = 0,84 \cdot (t - 9) - 8,86}$$

\*Pour  $\theta_{2/1}(t)$  on a :

$$\begin{cases} t_1 = 8 \\ t_2 = 9 \\ \dot{\theta}_{2/1_{\max}} = 0,94 \\ \theta_{2/1}(0) = -6,4rd \approx -2\pi \end{cases}$$

On obtient l'expression de  $\theta_{2/1}(0)$  à partir de l'annexe 3 sur laquelle on a  $\theta_{2/1}(t = 19,75s) = 0$ .

$$\boxed{\theta_{2/1}(t) = 0,94 \cdot (t - 17) - 2,47}$$

\*Pour  $\Psi_3(t) = \theta_{3/2}(t)$  on a :

$$\begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 0 \\ \dot{\Psi}_3(t)_{\max} = -0,628 \\ \Psi_3(t) = 12,75rd \approx 4\pi \end{cases}$$

On obtient l'expression de  $\theta_{3/2}(0)$  à partir de l'annexe 3 sur laquelle on a  $\theta_{3/2}(t = 20,3s) = 0$ .

$$\boxed{\theta_{3/2}(t) = -0,628 \cdot t + 12,75}$$

**1.5** Pour obtenir l'expression  $\vec{V}(Gp \in S_3 / R_0)$  dans la base  $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ , cherchons les composantes de  $\vec{x}_1$  et  $\vec{x}_3$  dans cette base :

$$\vec{x}_1 = \cos(\Psi_2 - \Psi_1) \cdot \vec{x}_2 - \sin(\Psi_2 - \Psi_1) \cdot \vec{y}_2$$

$$\vec{x}_3 = \cos \Psi_3 \cdot \vec{x}_2 - \sin \Psi_3 \cdot \vec{z}_2$$

La vitesse est donc :

$$\vec{V}(Gp \in S_3 / R_0) \left| \begin{array}{l} \ell_{1k} \dot{\theta}_{1/0} \cdot \underbrace{\cos(\Psi_2 - \Psi_1)}_{\theta_{2/1}} + \ell_{p2} \cdot (\dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0}) - \ell_{p3} \cdot \dot{\theta}_{3/2} \cdot \underbrace{\cos \Psi_3}_{\theta_{3/2}} \\ -\ell_{1k} \dot{\theta}_{1/0} \cdot \underbrace{\sin(\Psi_2 - \Psi_1)}_{\theta_{2/1}} - \ell_{p3} \cdot (\dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0}) \cdot \underbrace{\sin \Psi_3}_{\theta_{3/2}} \\ \ell_{p3} \cdot \dot{\theta}_{3/2} \cdot \underbrace{\sin \Psi_3}_{\theta_{3/2}} \end{array} \right. \quad (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$$

A.N :

$$\vec{V}(Gp \in S_3 / R_0) \left| \begin{array}{l} 10,02 \\ -34,8 \cdot 10^{-3} \\ 9 \cdot 10^{-3} \end{array} \right. \quad (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$$

et on trouve bien une norme  $\|\vec{V}(Gp \in S_3 / R_0)\| = 10m/s$ .

**2.1** Pour déterminer l'accélération  $\vec{\Gamma}(Gp \in S_3 / R_0)$ , dérivons le vecteur vitesse déduit précédemment :

$$\vec{\Gamma}(Gp \in S_3 / R_0) = \frac{d(\vec{V}(Gp \in S_3 / R_0))}{dt} \Bigg|_{R_0} \left| \begin{array}{l} \left( -\ell_{1k} \dot{\theta}_{1/0} \dot{\theta}_{2/1} \sin \theta_{2/1} + \ell_{p3} \dot{\theta}_{3/2}^2 \sin \theta_{3/2} \right) \vec{x}_2 \\ + \left( \ell_{1k} \dot{\theta}_{1/0} \cos \theta_{2/1} + \ell_{p2} (\dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0}) - \ell_{p3} \dot{\theta}_{3/2} \cos \theta_{3/2} \right) \cdot \frac{d\vec{x}_2}{dt} \Bigg|_{R_0} \\ - \left( \ell_{1k} \dot{\theta}_{1/0} \dot{\theta}_{2/1} \cos \theta_{2/1} + \ell_{p3} (\dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0}) \dot{\theta}_{3/2} \cos \theta_{3/2} \right) \vec{y}_2 \\ - \left( \ell_{1k} \dot{\theta}_{1/0} \sin \theta_{2/1} + \ell_{p3} (\dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0}) \sin \theta_{3/2} \right) \cdot \frac{d\vec{y}_2}{dt} \Bigg|_{R_0} \\ + \ell_{p3} \dot{\theta}_{3/2}^2 \cos \theta_{3/2} \vec{z}_2 \end{array} \right.$$

Cherchons à présent  $\frac{d\vec{x}_2}{dt} \Bigg|_{R_0}$  et  $\frac{d\vec{y}_2}{dt} \Bigg|_{R_0}$ . Nous avons, à partir de la relation sur la dérivée d'un vecteur par

rapport à deux bases :

$$\frac{d\vec{x}_2}{dt} \Bigg|_{R_0} = \underbrace{\frac{d\vec{x}_2}{dt} \Bigg|_{R_3}}_{\vec{0}} + \vec{x}_2 \wedge \vec{\Omega}_{0/2} = -\vec{x}_2 \wedge (\dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0}) \vec{z}_2 = (\dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0}) \vec{y}_2$$

$$\left. \frac{d\vec{y}_2}{dt} \right)_{R_0} = \underbrace{\left. \frac{d\vec{y}_2}{dt} \right)_{R_2}}_{\vec{0}} + \vec{y}_2 \wedge \vec{\Omega}_{0/2} = -\vec{y}_2 \wedge (\dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0}) \cdot \vec{z}_2 = -(\dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0}) \cdot \vec{x}_2$$

L'expression générale de l'accélération sur l'intervalle de temps [17, 27] est donc :

$\vec{\Gamma}(G_p \in S_3 / R_0) =$	$\begin{aligned} & \ell_{1h} \cdot \dot{\theta}_{1/0}^2 \sin \theta_{2/1} + \ell_{p3} \cdot \left( \dot{\theta}_{3/2}^2 + (\dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0})^2 \right) \cdot \sin \theta_{3/2} \\ & \ell_{1h} \cdot \dot{\theta}_{1/0}^2 \cos \theta_{2/1} + \ell_{p2} \cdot (\dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0})^2 - 2 \cdot \ell_{p3} \cdot (\dot{\theta}_{2/1} + \dot{\theta}_{1/0}) \cdot \dot{\theta}_{3/2} \cdot \cos \theta_{3/2} \\ & \ell_{p3} \cdot \dot{\theta}_{3/2}^2 \cdot \cos \theta_{3/2} \end{aligned}$
	$(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$