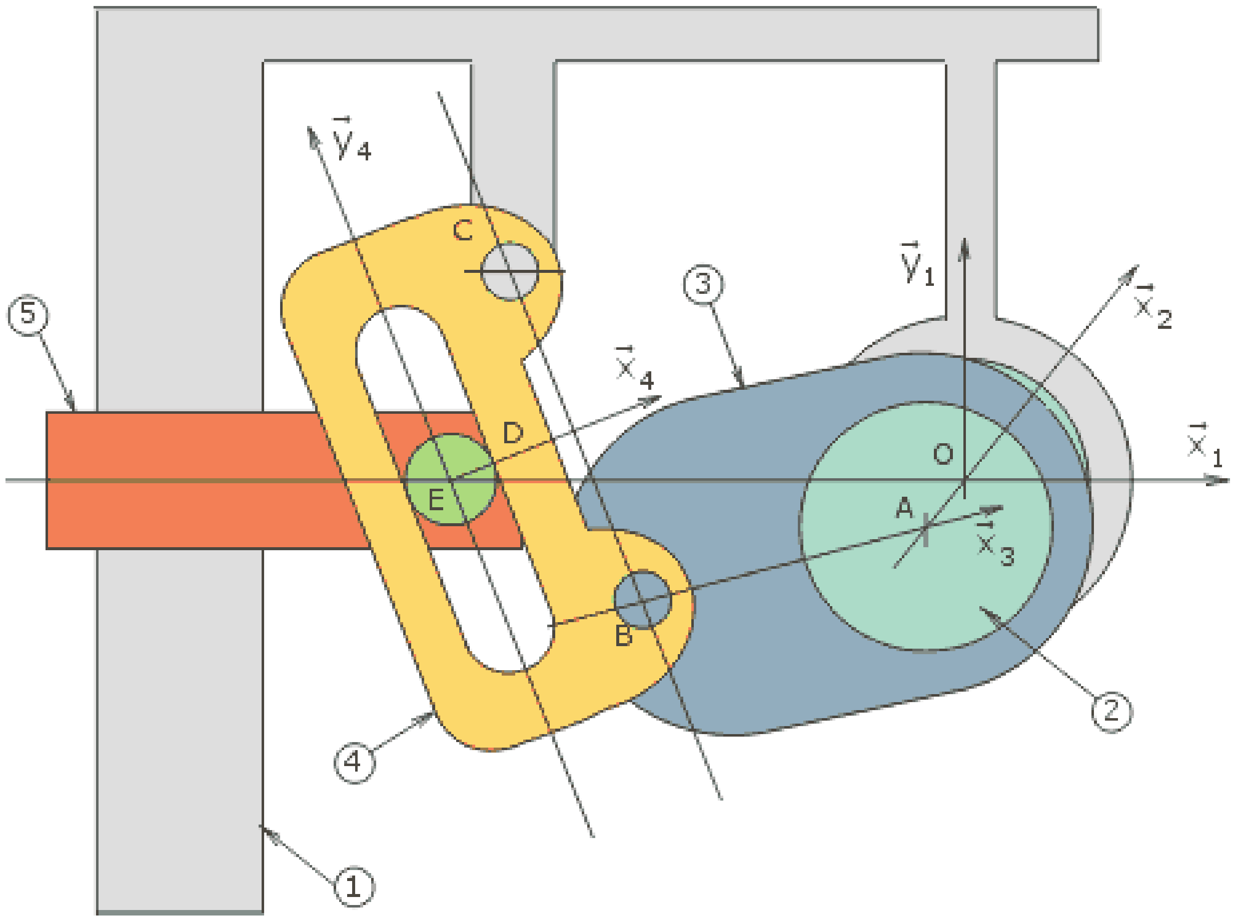
Enoncé

Ce mécanisme plan est utilisé en batteries dans l'industrie chimique pour doser finement en continu différents liquides entrant dans la composition d'un mélange . Le réglage du débit se fait par positionnement du centre de la liaison pivot d'axe $\left(C,\vec{z}_1\right)$ suivant l'axe $\left(C,\vec{y}_1\right)$. Ce système de réglage n'est pas pris en compte lors de cette étude. On supposera donc l'axe de la pivot $\left(C,\vec{z}_1\right)$, fixe par rapport au bâti. Le mouvement d'entrée est un mouvement de rotation continu de la pièce (2) par rapport au bâti (1) tel que $\vec{\Omega}_{2/1} = r_{21}.\vec{z}_1 = \dot{\theta}_{21}.\vec{z}_1$. Cet arbre (2) possède un cylindre excentré d'axe $\left(A,\vec{z}_1\right)$ en liaison pivot suivant ce même axe avec la pièce (3). La pièce (4) , possédant une rainure oblongue d'axe $\left(E,\vec{y}_4\right)$ est d'une part en liaison pivot d'axe $\left(C,\vec{z}_1\right)$ avec le bâti (1) et d'autre part en liaison pivot d'axe $\left(B,\vec{z}_1\right)$ avec la pièce (3). Le mouvement de sortie du mécanisme est un mouvement de translation de direction $\vec{x}_1$ de la tige (5) par rapport au bâti. Cette tige (5) possède à une de ses extrémités une partie cylindrique d'axe $\left(E,\vec{z}_1\right)$ en contact avec la rainure oblongue usinée sur la pièce (4).



Le paramétrage du mécanisme est le suivant :

- Liaison pivot en O 2/1 : $\theta_{21} = \left(\widehat{\vec{x}_2, \vec{x}_1}\right)$
- Liaison pivot en A 3/2 : $\theta_{32} = \left(\widehat{\vec{x}_3, \vec{x}_2}\right)$, $\overrightarrow{OA} = a.\vec{x}_2$
- Liaison pivot en B 4/3 : $\theta_{43} = \left(\widehat{\vec{x}_4, \vec{x}_3}\right)$, $\overrightarrow{AB} = b.\vec{x}_3$ $\overrightarrow{BC} = f.\vec{y}_4$
- Liaison pivot en C 4/1 : $\theta_{41} = \left(\widehat{\vec{x}_4, \vec{x}_1}\right)$, $\overrightarrow{OC} = c.\vec{x}_1 + \mu.\vec{y}_1$
- Liaison ponctuelle en D 5/4 : $\overrightarrow{ED} = d.\vec{x}_4$
- Liaison glissière 5/1 : $\overrightarrow{EC}.\vec{x}_4 = e$, $\overrightarrow{OE} = \lambda.\vec{x}_1$

Le paramètre de réglage étant μ et celui de sortie étant λ avec $u_{51} = \dot{\lambda}$

Les torseurs cinématiques des liaisons seront notés : $_M\left\{\mathcal{V}_{i/j}\right\} = {}_M\left\{\begin{array}{c|c} p_{ij} & u_{ij} \\ q_{ij} & v_{ij} \\ r_{ij} & w_{ij} \end{array}\right\}_{(-,-,\vec{z}_1)}$

1 Ecrire les torseurs cinématiques des liaisons dans leur base idéale . Donner alors leur expression au point O.

2 Etablir la fermeture géométrique de la chaîne de solides $(1)-(2)-(3)-(4)-(1)$ sous forme torsorielle . Déduire le système d'équations issu de cette fermeture . Montrer alors que ces relations sont issues de la projection sur la base $(\vec{x}_1,\vec{y}_1)$ de la relation vectorielle $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$

3 Etablir la fermeture géométrique de la chaîne de solides $(1)-(4)-(5)-(1)$ sous forme torsorielle .Déduire un second système d'équations issu de cette fermeture. Montrer alors que ces relations sont issues de la projection sur la base $(\vec{x}_4,\vec{y}_4)$ de la relation vectorielle

$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EC}$.

Solution

1 Les torseurs cinématiques , du fait du problème de cinématique plane, auront au maximum trois composantes . Ils seront de la forme : $_M\left\{\mathcal{V}_{i/j}\right\} = {}_M\left\{\begin{array}{c|c} 0 & u_{ij} \\ 0 & v_{ij} \\ r_{ij} & 0 \end{array}\right\}_{(-,-,\vec{z}_1)}$. En analysant les liaisons, nous avons :

$$
{}_O\left\{\vartheta_{2/1}\right\} = {}_O\left\{\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{21} & 0 \end{array}\right\}_{(-,-,\vec{z}_1)}
$$

$$
{}_A\left\{\vartheta_{3/2}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{32} & 0 \end{array}\right\}_{(-,-,\vec{z}_1)} = {}_O\left\{\begin{array}{c|c} 0 & r_{32}.a.\sin\theta_{21} \\ 0 & -r_{32}\,a.\cos\theta_{21} \\ r_{32} & 0 \end{array}\right\}_{(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)}
$$

$$
{}_B\left\{\vartheta_{4/3}\right\} = {}_B\left\{\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{43} & 0 \end{array}\right\}_{(-,-,\vec{z}_1)} = {}_O\left\{\begin{array}{c|c} 0 & r_{43}\left(a.\sin\theta_{21} + b.\sin\left(\theta_{32}+\theta_{21}\right)\right) \\ 0 & -r_{43}\left(a.\cos\theta_{21} + b.\cos\left(\theta_{32}+\theta_{21}\right)\right) \\ r_{43} & 0 \end{array}\right\}_{(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)}
$$

$$
{}_C\left\{\vartheta_{4/1}\right\} = {}_C\left\{\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{41} & 0 \end{array}\right\}_{(-,-,\vec{z}_1)}
$$

$$
= {}_O\left\{\begin{array}{c|c} 0 & r_{41}.\left(a.\sin\theta_{21} + b.\sin\left(\theta_{32}+\theta_{21}\right) + f.\cos\theta_{41}\right) \\ 0 & -r_{41}.\left(a.\cos\theta_{21} + b.\cos\left(\theta_{32}+\theta_{21}\right) - f.\sin\theta_{41}\right) \\ r_{41} & 0 \end{array}\right\}_{(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)}
$$

$$
{}_D\left\{\vartheta_{5/4}\right\} = {}_D\left\{\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & v_{54} \\ r_{54} & 0 \end{array}\right\}_{(\vec{x}_4,\vec{y}_4,\vec{z}_1)} = {}_O\left\{\begin{array}{c|c} 0 & -v_{54}.\sin\theta_{41} + r_{54}.d.\sin\theta_{41} \\ 0 & v_{54}.\cos\theta_{41} - r_{54}.\left(\lambda + d.\cos\theta_{41}\right) \\ r_{54} & 0 \end{array}\right\}_{(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)}
$$

$$
{}_{\forall M}\left\{\vartheta_{5/1}\right\} = {}_{\forall M}\left\{\begin{array}{c|c} 0 & u_{51} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)} = {}_O\left\{\begin{array}{c|c} 0 & u_{51} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)}
$$

2 Pour établir la fermeture géométrique de la chaîne de solides $(1)-(2)-(3)-(4)-(1)$, traduisons le fait que

${}_O\left\{\vartheta_{1/1}\right\} = {}_O\left\{\vartheta_{1/2}\right\} + {}_O\left\{\vartheta_{2/3}\right\} + {}_O\left\{\vartheta_{3/4}\right\} + {}_O\left\{\vartheta_{4/1}\right\} = {}_O\left\{\vec{0}\right\}$. Nous avons donc :

$-{}_O\left\{\vartheta_{2/1}\right\} - {}_O\left\{\vartheta_{3/2}\right\} - {}_O\left\{\vartheta_{4/3}\right\} + {}_O\left\{\vartheta_{4/1}\right\} = {}_O\left\{\vec{0}\right\}$. Ce qui se traduit au point O et en projection dans la base $\left(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1\right)$ par :

$$-\left\{\begin{array}{c|c}0 & 0\\0 & 0\\r_{21} & 0\end{array}\right\}-\left\{\begin{array}{c|c}0 & r_{32}.a.\sin\theta_{21}\\0 & -r_{32}.a.\cos\theta_{21}\\r_{32} & 0\end{array}\right\}-\left\{\begin{array}{c|c}0 & r_{43}\left(a.\sin\theta_{21}+b.\sin\left(\theta_{32}+\theta_{21}\right)\right)\\0 & -r_{43}\left(a.\cos\theta_{21}+b.\cos\left(\theta_{32}+\theta_{21}\right)\right)\\r_{43} & 0\end{array}\right\}$$

$$+\left\{\begin{array}{c|c}0 & r_{41}.\left(a.\sin\theta_{21}+b.\sin\left(\theta_{32}+\theta_{21}\right)+f.\cos\theta_{41}\right)\\0 & -r_{41}.\left(a.\cos\theta_{21}+b.\cos\left(\theta_{32}+\theta_{21}\right)-f.\sin\theta_{41}\right)\\r_{41} & 0\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c|c}0 & 0\\0 & 0\\0 & 0\end{array}\right\}$$

On obtient ainsi un système de trois équations:

$$\boxed{\left|\begin{array}{lr}\left(-r_{32}-r_{43}+r_{41}\right).a.\sin\theta_{21}+\left(r_{41}-r_{43}\right).b.\sin\left(\theta_{32}+\theta_{21}\right)+r_{41}.f.\cos\theta_{41}=0 & 1)\\-\left(-r_{32}-r_{43}+r_{41}\right).a.\cos\theta_{21}-\left(r_{41}-r_{43}\right).b.\cos\left(\theta_{32}+\theta_{21}\right)+r_{41}.f.\sin\theta_{41}=0 & 2)\\-r_{21}-r_{32}-r_{43}+r_{41}=0 & 3)\end{array}\right.}$$

A partir de la combinaison de 1) et 3) nous obtenons :

$r_{21}.a.\sin\theta_{21}+\left(r_{32}+r_{21}\right).b.\sin\left(\theta_{32}+\theta_{21}\right)+r_{41}.f.\cos\theta_{41}=0$ ce qui donne après intégration : $-a.\cos\theta_{21}-b.\cos\left(\theta_{32}+\theta_{21}\right)+f.\sin\theta_{41}=cte=-c$. Cette relation est issue de la fermeture géométrique : $\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right).\vec{x}_1=\overrightarrow{OC}.\vec{x}_1$

A partir de la combinaison de 2) et 3) nous obtenons :

$-r_{21}.a.\cos\theta_{21}-\left(r_{32}+r_{21}\right).b.\cos\left(\theta_{32}+\theta_{21}\right)+r_{41}.f.\sin\theta_{41}=0$. Après intégration nous avons : $-a.\sin\theta_{21}-b.\sin\left(\theta_{32}+\theta_{21}\right)-f.\cos\theta_{41}=cte=-\mu$. Cette relation est issue de la fermeture géométrique : $\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right).\vec{y}_1=\overrightarrow{OC}.\vec{y}_1$

3 Pour établir la fermeture géométrique de la chaîne de solides $(1)-(4)-(5)-(1)$, traduisons le fait que :
${}_O\{\vartheta_{1/1}\}={}_O\{\vartheta_{1/4}\}+{}_O\{\vartheta_{4/5}\}+{}_O\{\vartheta_{5/1}\}={}_O\{\vec{0}\}$. Nous avons donc :

$-{}_O\{\vartheta_{4/1}\}-{}_O\{\vartheta_{5/4}\}+{}_O\{\vartheta_{5/1}\}={}_O\{\vec{0}\}$. Ce qui se traduit au point O et en projection dans la base $\left(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1\right)$ par :

$$-\begin{Bmatrix} 0 & \Big| & r_{41}.\mu \\ 0 & \Big| & -r_{41}.c \\ r_{41} & \Big| & 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 & \Big| & -v_{54}.\sin\theta_{41} + r_{54}.d.\sin\theta_{41} \\ 0 & \Big| & v_{54}.\cos\theta_{41} - r_{54}.\left(\lambda + d.\cos\theta_{41}\right) \\ r_{54} & \Big| & 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 & \Big| & u_{51} \\ 0 & \Big| & 0 \\ 0 & \Big| & 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & \Big| & 0 \\ 0 & \Big| & 0 \\ 0 & \Big| & 0 \end{Bmatrix}$$

On obtient alors un système à trois équations:

$$\boxed{\left\|\begin{array}{lr} -r_{41}\mu + v_{54}.\sin\theta_{41} - r_{54}.d.\sin\theta_{41} + u_{51} = 0 & 4) \\ r_{41}.c - v_{54}.\cos\theta_{41} + r_{54}.\left(\lambda + d.\cos\theta_{41}\right) = 0 & 5) \\ \qquad -r_{41} - r_{54} = 0 & 6) \end{array}\right.}$$

En effectuant la sommation terme à terme de : $4).\cos\theta_{41} + 5).\sin\theta_{41}$ on obtient la relation suivante : $-r_{41}\left(\mu.\cos\theta_{41} - c.\sin\theta_{41}\right) - r_{41}.\lambda.\sin\theta_{41} + \underbrace{u_{51}}_{\dot{\lambda}}.\cos\theta_{41} = 0$ qui nous donne par intégration : $-\left(u.\sin\theta_{41} + c.\cos\theta_{41}\right) + \lambda.\cos\theta_{41} = cte = e$. Cette relation est issue de la relation géométrique : $\overrightarrow{OC}.\vec{x}_4 = \overrightarrow{OE}.\vec{x}_4 + \overrightarrow{EC}.\vec{x}_4$