Enoncé *D'après concours ESM Saint Cyr*

Le principe de base du tissage est essentiellement discontinu à cause du passage de la navette. Le produit obtenu, le tissu, est continu. L'augmentation des vitesses et des rendements de toutes les machines de production passe par la conception de processus continus. Les machines textiles modernes utilisent donc de nombreux dispositifs qui doivent être entraînés de manière synchrone les uns avec les autres, à des vitesses cycliquement variables . Leur entraînement utilise des mécanismes dits à cycle continu : pour une vitesse d'entrée constante, la vitesse de sortie fluctue cycliquement et peut même , pour certains mécanismes s'annuler. L'analyse de l'un de ces mécanismes est le thème de la présente étude.

Le torseur d'action mécanique de la pièce (i) sur la pièce (j) sera noté :

$$\left\{T_{i\to j}\right\} = {}_{M}\begin{Bmatrix} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{Bmatrix}_{(-,-,-)}$$

Le but de cette étude est de déterminer les torseurs d'action entre les différentes pièces du mécanisme , en considérant les liaisons comme parfaites et en négligeant les effets dus aux masses par rapport aux actions mécaniques. Cela implique que la mécanisme fonctionne à faible vitesse. Les résultats doivent être exprimés en fonction des paramètres géométriques . On donne :

*Le contact entre les solides (0) et (2) est de type ponctuel par engrenage droit. L'angle de pression est : $\delta = 20°$.

*Les torseurs extérieurs appliqués au système sont :

$$\left\{T_{ext\to 1}\right\} = {}_{\forall M \in (O,\vec{x}_0)}\begin{Bmatrix} 0 & L_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0,-,-)} \quad \text{et} \quad \left\{T_{ext\to 4}\right\} = {}_{\forall M \in (O,\vec{x}_0)}\begin{Bmatrix} 0 & L_4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0,-,-)}$$

*Les constantes (modules) sont définies par :

$\overrightarrow{OD} = d_1.\vec{x}_0$ $\quad \overrightarrow{OE} = d_4.\vec{x}_0$ $\quad \overrightarrow{IA} = r_2.\vec{y}_1 - d_1.\vec{x}_0$ $\quad \overrightarrow{DI} = r_0.\vec{y}_1$

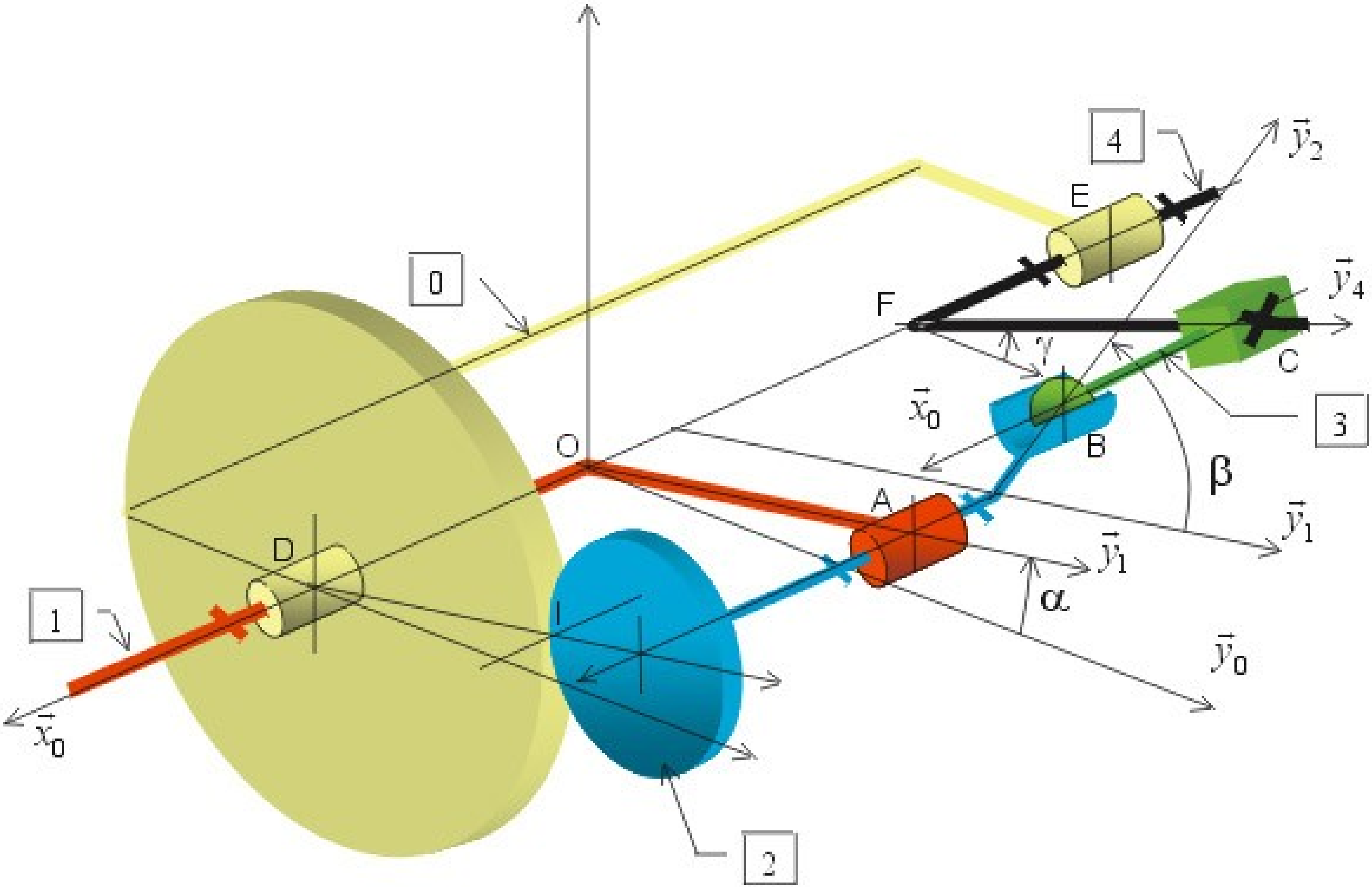
$\overrightarrow{AB} = -d_2.\vec{x}_0 + b.\vec{y}_2$ $\quad \overrightarrow{OF} = -d_3.\vec{x}_0$

*Des paramètres (valeurs algébriques)

$(\widehat{\vec{y}_0,\vec{y}_1}) = \alpha$ $\quad (\widehat{\vec{y}_0,\vec{y}_4}) = \gamma$

$(\widehat{\vec{y}_1,\vec{y}_2}) = \beta$ $\quad \overrightarrow{FC} = \lambda.\vec{y}_4$

*Les repères liés aux pièces (i) seront notés $R_i(\vec{x}_i,\vec{y}_i,\vec{z}_i)$



1 Caractériser les torseurs d'actions mécaniques associés aux liaisons parfaites

2 Déterminer la relation liant L_4 et L_1

3 Déterminer la résultante du torseur d'action mécanique de (3) sur (4), en projection sur R_4 , en fonction de L_1 des paramètres angulaires et des constantes.

Solution

1 Les différents torseurs des liaisons sont :

$$\left\{T_{0\to 1}\right\} = \underset{\forall M \in (D, \vec{x}_0)}{\left\{\begin{array}{c|c} X_{01} & 0 \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & N_{01} \end{array}\right\}}_{(\vec{x}_0,-,-)}$$

$$\left\{T_{1\to 2}\right\} = \underset{\forall M \in (A, \vec{x}_0)}{\left\{\begin{array}{c|c} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{array}\right\}}_{(\vec{x}_0,-,-)}$$

$$\left\{T_{0\to 4}\right\} = \underset{\forall M \in (E, \vec{x}_0)}{\left\{\begin{array}{c|c} X_{04} & 0 \\ Y_{04} & M_{04} \\ Z_{04} & N_{04} \end{array}\right\}}_{(\vec{x}_0,-,-)}$$

$$\left\{T_{2\to 3}\right\} = \underset{B}{\left\{\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ Y_{23} & 0 \\ Z_{23} & 0 \end{array}\right\}}_{(\vec{x}_0,-,-)}$$

$$\left\{T_{3\to 4}\right\} = \underset{\forall M}{\left\{\begin{array}{c|c} X_{34} & L_{34} \\ 0 & M_{34} \\ Z_{34} & N_{34} \end{array}\right\}}_{(-,\vec{y}_4,-)}$$

$$\left\{T_{0\to 2}\right\} = \underset{I}{\left\{\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ Y_{02} & 0 \\ Z_{02} & 0 \end{array}\right\}}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_1,\vec{z}_1)} \qquad avec \quad \frac{Y_{02}}{Z_{02}} = \tan\delta \quad et \quad \delta = 20°$$

2 Pour déterminer la relation liant L_4 et L_1 , il faut isoler successivement :

*La pièce 3 :

Caractérisons les actions externes :

$$\left\{T_{4\to 3}\right\} = -\left\{T_{3\to 4}\right\} = \underset{\forall M}{\left\{\begin{array}{c|c} -X_{34} & -L_{34} \\ 0 & -M_{34} \\ -Z_{34} & -N_{34} \end{array}\right\}}_{(-,\vec{y}_4,-)}$$

$$\left\{T_{2\to 3}\right\} = \underset{B}{\left\{\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ Y_{23} & 0 \\ Z_{23} & 0 \end{array}\right\}}_{(\vec{x}_0,-,-)}$$

Appliquons le principe fondamental de la statique à la pièce (3) en B. Elle est soumise à un glisseur : $\left\{T_{2\to 3}\right\}$ et un torseur : $\left\{T_{4\to 3}\right\}$. Pour qu'il y ait équilibre, le torseur $\left\{T_{4\to 3}\right\}$ est aussi un glisseur au point B. On a donc à l'équilibre :

$$\left\{T_{4\to 3}\right\} = {}_B\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -Z_{34} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_4,\vec{z}_4)}$$

$$\left\{T_{2\to 3}\right\} = {}_B\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{23} & 0 \\ Z_{23} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_4,\vec{z}_4)}$$

On déduit donc à l'équilibre :

$$\boxed{\begin{aligned} &Y_{23} = 0 && 1) \\ &Z_{23} - Z_{34} = 0 && 2) \end{aligned}}$$

*La pièce 4 :
caractérisons les actions externes en F :

$$\left\{T_{0\to 4}\right\} = {}_F\begin{Bmatrix} X_{04} & 0 \\ Y_{04} & M_{04} \\ Z_{04} & N_{04} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0,-,-)}$$

$$\left\{T_{ext\to 4}\right\} = {}_F\begin{Bmatrix} 0 & L_4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0,-,-)}$$

$$\left\{T_{3\to 4}\right\} = -\left\{T_{4\to 3}\right\} = {}_B\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{34} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_4,\vec{z}_4)} \qquad \textit{d'après le résultat de l'étude précédente}$$

Nota : le choix de la base d'expression du torseur $\left\{T_{3\to 4}\right\}$ fixe aussi la base du torseur $\left\{T_{2\to 3}\right\}$. (Voir PFS appliqué à (3)).

Appliquons le PFS à (4) en F, théorème du moment statique en projection sur $\vec{x}_0$:

$$\sum \vec{M}_{F\,\overline{4}\to 4} \cdot \vec{x}_0 = 0$$

$$\boxed{L_4 + \lambda.Z_{34} = 0 \quad 3)}$$

*La pièce 2 :
Caractérisons les actions externes sur (2):

$$\left\{T_{1\to 2}\right\} = \left\{\begin{matrix} X_{12} \\ Y_{12} \\ Z_{12} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ M_{12} \\ N_{12} \end{matrix}\right\}_{A\,(\vec{x}_0,\vec{y}_1,\vec{z}_1)}$$

$$\left\{T_{0\to 2}\right\} = \left\{\begin{matrix} 0 \\ Y_{02} \\ Z_{02} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\}_{I\,(\vec{x}_0,\vec{y}_1,\vec{z}_1)} \qquad avec \quad \frac{Y_{02}}{Z_{02}} = \tan\delta \qquad et \quad \vec{M}_{A\,0\to 2}\cdot\vec{x}_0 = -r_2 . Z_{02}$$

$$\left\{T_{3\to 2}\right\} = -\left\{T_{2\to 3}\right\} = \left\{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -Z_{23} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\}_{B\,(\vec{x}_0,\vec{y}_4,\vec{z}_4)} \qquad avec\ les\ résultats\ précédents$$

Appliquons le PFS à (2), théorème de la résultante statique en projection sur $\vec{z}_1$:

$$\sum \vec{F}_{\bar{4}\to 4}\cdot\vec{z}_1 = 0$$

$$\vec{M}_{O\,2\to 1}\cdot\vec{x}_0 = -(r_0 + r_2).Z_{12}$$

Appliquons le PFS à (2) en A, théorème du moment statique en projection $\vec{x}_0$:

$$\sum \vec{M}_{A\,\bar{4}\to 4}\cdot\vec{x}_0 = 0$$

$$\boxed{-r_2 . Z_{02} - b.\cos\left((\alpha+\beta)-\gamma\right).Z_{23} = 0 \quad 5)}$$

*La pièce 1 :
caractérisons les actions externes en O :

$$\left\{T_{0\to 1}\right\} = \left\{\begin{matrix} X_{01} \\ Y_{01} \\ Z_{01} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ M_{01} \\ N_{01} \end{matrix}\right\}_{O\,(\vec{x}_0,-,-)}$$

$$\left\{T_{ext\to 1}\right\} = \left\{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\}_{\forall M \in (O,\vec{x}_0)\,(\vec{x}_0,-,-)}$$

$$\left\{T_{2\to 1}\right\} = -\left\{T_{1\to 2}\right\} = \left\{\begin{matrix} -X_{12} \\ -Y_{12} \\ -Z_{12} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ -M_{12} \\ -N_{12} \end{matrix}\right\}_{A\,(\vec{x}_0,\vec{y}_1,\vec{z}_1)} \qquad \text{avec } \vec{M}_{O\,2\to 1}\cdot\vec{x}_0 = -(r_0 + r_2).Z_{12}$$

Appliquons le PFS à la pièce (1) , théorème du moment statique en O, en projection sur $\vec{x}_0$:

$$\boxed{L_1 - (r_0 + r_2).Z_{12} = 0 \quad 6)}$$

En combinant alors les relations 2), 3), 4), 5) et 6) on obtient :

$$\boxed{L_1 = -\left(r_2.\cos(\gamma - \alpha) + b.\cos\left(\gamma - (\alpha + \beta)\right)\right).\left(\frac{r_0 + r_2}{r_2}\right).\frac{L_4}{\lambda}}$$

3 La résultante d'action de la pièce (3) sur la pièce (4) est :

$\vec{F}_{3\to 4} = X_{34}.\vec{x}_0 + Z_{34}.\vec{z}_4$

La relation 3) nous donne Z_{34} : $Z_{34} = -\dfrac{L_4}{\lambda}$

Pour obtenir X_{34}, appliquons le PFS à (3), $\sum \vec{F}_{\bar{3}\to 3}.\vec{x}_0 = 0$, il vient : $X_{34} = -X_{43} = 0$

On a donc : $\boxed{\vec{F}_{3\to 4} = \dfrac{L_1}{\left(r_2.\cos(\gamma - \alpha) + b.\cos\left(\gamma - (\alpha + \beta)\right)\right).\left(\dfrac{r_0 + r_2}{r_2}\right)}.\vec{z}_4}$