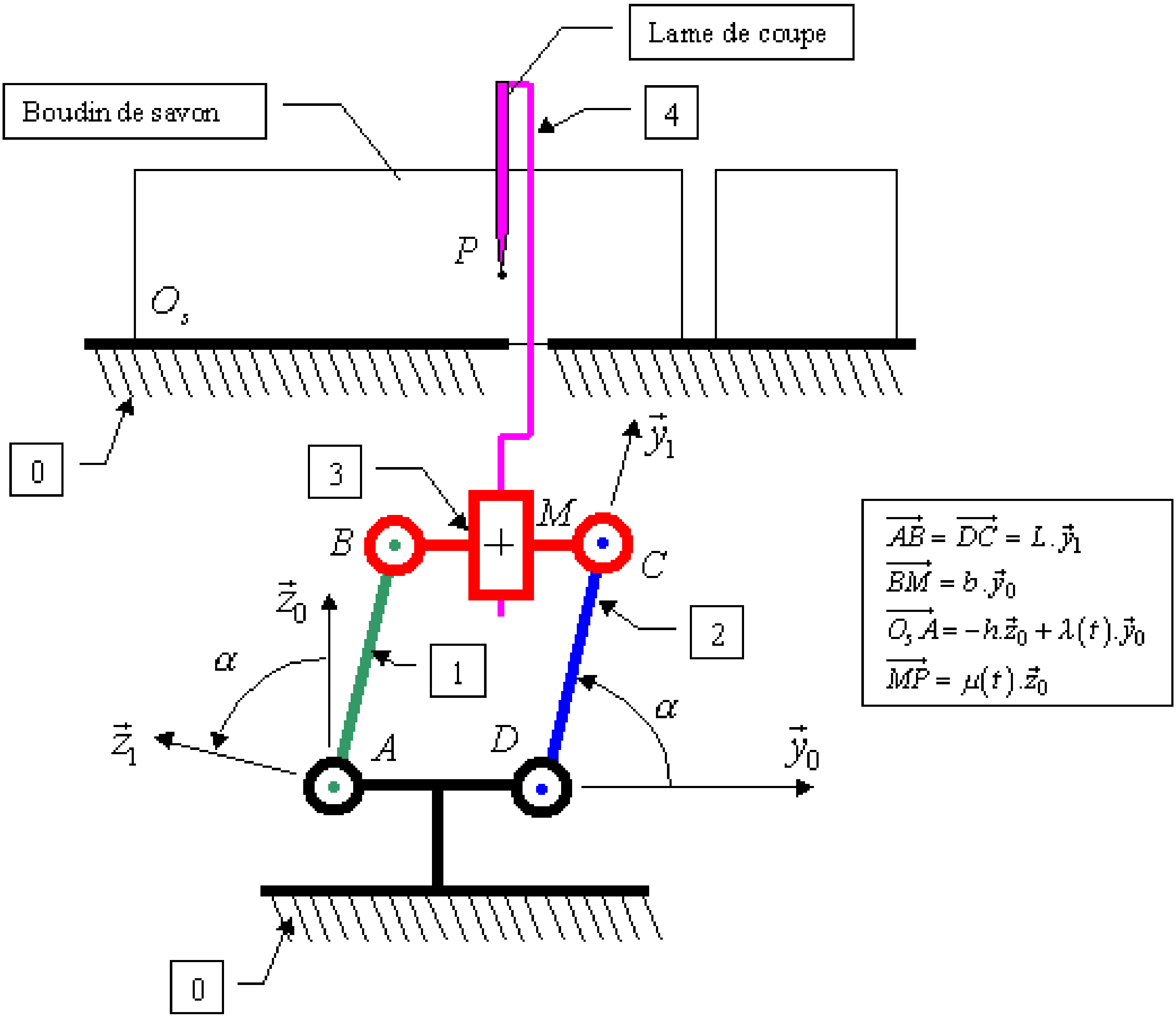
Enoncé *Concours e4a 2000*

Comme tout objet de grande consommation, la savonnette est produite industriellement sur des lignes de production . L'installation de production se décompose en différentes unités :
* Unité de boudinage : Reçoit les différents constituants de la savonnette . Elle réalise le mélange , l'affinage et fabrique un boudin de savon qui sort de l'unité en continu.
* Unité de coupe à longueur : Coupe le boudin de savon formé par la boudineuse en morceaux de savon ou bondons. Cette coupe s'effectue sur le boudin qui défile en continu sur la ligne.
* Unité de formage : Reçoit les bondons et les forme en savonnettes avec marquage.
* Unité de convoyage pour le recyclage : Assure le recyclage des bondons défectueux.
* Unité de conditionnement : Placement des savonnettes dans des caisses.
* Unité de palettisation : Ordonne les caisses sur des palettes en vue de leur expédition.

L'étude cinématique proposée s'intéresse à l'unité de coupe à longueur. La modélisation du mécanisme est plane. Le plan de représentation est $\left(A,\vec{y}_0,\vec{z}_0\right)$. Les liaisons L_{0-1} , L_{0-2} , L_{1-3} *et* L_{2-3} sont des liaisons pivots d'axes de direction perpendiculaire au plan $\left(A,\vec{y}_0,\vec{z}_0\right)$. La liaison L_{4-3} est une glissière de direction verticale $\vec{z}_0$. Le repère lié au bâti (0) sera : $R_0\left(A,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0\right)$



1 Le mécanisme étant tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, montrer que $\vec{\Omega}_{3/0} = \vec{0}$ .Quelle est la nature du mouvement de (3) par rapport à (0) ?

2 Exprimer le plus simplement possible $\vec{V}(B \in 1/0)$ en fonction de $\dot{\alpha}$ et des caractéristiques géométriques utiles.

3 Exprimer le plus simplement possible $\vec{V}(M \in 3/0)$ en fonction de $\dot{\alpha}$ et des caractéristiques géométriques utiles.

4 Exprimer le plus simplement possible $\vec{V}(P \in 4/0)$ en fonction de $\dot{\alpha}$, $\dot{\mu}$ et des caractéristiques géométriques utiles.

5 Sachant que le boudin de savon, considéré comme un solide, se déplace en translation rectiligne uniforme de vitesse $V_b . \vec{y}_0$ $(V_b > 0)$ par rapport au bâti (0), donner, à partir de l'instant où la lame

est dans le savon, la composante de $\vec{V}(P \in 4/0)$ suivant $\vec{y}_0$.

6 Exprimer la loi $\dot{\alpha} = f(V_b, \alpha, L)$

7 En déduire $\alpha(t)$ en fonction de V_b et L sachant qu'à $t = 0$, $\alpha(0) = 90°$.

8 Soit O_s , l'origine du repère lié au boudin de savon. Exprimer les équations paramétriques de la trajectoire de P dans le savon. La coupe du boudon est-elle droite ? Justifier la réponse.

Solution

1 En B et C nous pouvons écrire :

$$\vec{V}(B \in 3/0) = \vec{V}(B \in 1/0) = \left.\frac{d\,\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{R_0}$$

$$\vec{V}(C \in 3/0) = \vec{V}(C \in 2/0) = \left.\frac{d\,\overrightarrow{DC}}{dt}\right)_{R_0}$$

Utilisons la relation liant les vitesses de deux points d'un même solide :

$$\underbrace{\vec{V}(B \in 3/0)}_{\left.\frac{d\,\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{R_0}} = \underbrace{\vec{V}(C \in 3/0)}_{\left.\frac{d\,\overrightarrow{DC}}{dt}\right)_{R_0}} + \overrightarrow{BC} \wedge \vec{\Omega}_{3/0}$$

Comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, nous déduisons :

$$\overrightarrow{BC} \wedge \vec{\Omega}_{3/0} = \vec{0}$$

Ces deux vecteurs ne pouvant être colinéaires dans le cas d'une cinématique plane ; le vecteur $\overrightarrow{BC}$ n'étant pas nul, nous déduisons que $\vec{\Omega}_{3/0} = \vec{0}$. Le torseur cinématique de la pièce (3) par rapport au bâti sera :

$$\forall M \left\{\vartheta_{3/0}\right\} = {}_{\forall M}\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{V}(M \in 3/0) \end{Bmatrix}$$

Ce torseur est un torseur couple . C'est le torseur caractéristique d'une translation circulaire. Tout point lié à (3) aura même vitesse par rapport à (0).

2 Pour déterminer $\vec{V}(B \in 1/0)$, utilisons la définition de la vitesse :

$$\vec{V}(B \in 1/0) = \left.\frac{d\,\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{R_0} = \left.\frac{d\,L.\vec{y}_1}{dt}\right)_{R_0} = L.\dot{\alpha}.\vec{z}_1$$

$$\boxed{\vec{V}(B \in 1/0) = L.\dot{\alpha}.\vec{z}_1}$$

3 Pour déterminer $\vec{V}(M \in 3/0)$, utilisons la relation liant les vitesses de deux points d'un même solide :

$$\vec{V}(M \in 3/0) = \underbrace{\vec{V}(B \in 3/0)}_{\vec{V}(B \in 1/0)} + \overrightarrow{MB} \wedge \underbrace{\vec{\Omega}_{3/0}}_{\vec{0}}$$

$$\boxed{\vec{V}(M \in 3/0) = \vec{V}(B \in 1/0) = L.\dot{\alpha}.\vec{z}_1}$$

4 La vitesse $\vec{V}(P \in 4/0)$ peut être déterminée par la relation sur la composition des vecteurs vitesses :

$$\vec{V}(P\in 4/0)=\vec{V}(P\in 4/3)+\vec{V}(P\in 3/0)$$

Du fait de la cinématique particulière de la pièce (3), nous pouvons écrire :

$$\vec{V}(P\in 3/0)=\vec{V}(M\in 3/0)$$

En reprenant l'expression de $\vec{V}(P\in 4/0)$ il vient :

$$\vec{V}(P\in 4/0)=\underbrace{\vec{V}(P\in 4/3)}_{\left.\frac{d\,\overrightarrow{MP}}{dt}\right)_{R_3}}+\underbrace{\vec{V}(P\in 3/0)}_{\vec{V}(M\in 3/0)}$$

$$\boxed{\vec{V}(P\in 4/0)=\dot{\mu}.\vec{z}_0+L.\dot{\alpha}.\vec{z}_1}$$

5 Cherchons $\vec{V}(P\in 4/0).\vec{y}_0$:

Comme le boudin de savon est considéré comme un solide, et que le point P de la lame doit rester au contact du boudin, nous devons avoir :

$$\boxed{\vec{V}(P\in 4/0).\vec{y}_0=V_b}$$

6 La relation de contact précédente se traduira alors par :

$$\vec{V}(P\in 4/0).\vec{y}_0=(\dot{\mu}.\vec{z}_0+L.\dot{\alpha}.\vec{z}_1).\vec{y}_0=V_b$$

ce qui donnera :

$-L.\dot{\alpha}.\sin\alpha=V_b$ et donc $\boxed{\dot{\alpha}=\dfrac{V_b}{-L.\sin\alpha}}$ 1)

7 Par intégration entre l'instant initial $t = 0$, $\alpha(0) = 90°$ et l'instant $t, \alpha(t)$ nous avons :

$-\dot{\alpha}.\sin\alpha = \frac{V_b}{L}$ qui par intégration donnera : $\boxed{\cos\alpha = \frac{V_b}{L}.t}$

8 Cherchons l'expression du vecteur position $\overrightarrow{O_s P}$:

$$\overrightarrow{O_s P} = \overrightarrow{O_s A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MP}$$

$$\overrightarrow{O_s P} = -h.\vec{z}_0 + \lambda(t).\vec{y}_0 + \underbrace{L.\vec{y}_1}_{(\cos\alpha.\vec{y}_0 + \sin\alpha.\vec{z}_0)} + b.\vec{y}_0 + \mu(t).\vec{z}_0$$

Les coordonnées du point $P(y_P, z_P)$ dans le repère plan $(O_s, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au savon sont :

$$\boxed{\begin{array}{ll} /\vec{y}_0 & y_P = \lambda(t) + L.\cos\alpha + b \\ /\vec{z}_0 & z_P = -h + L.\sin\alpha + \mu(t) \end{array}}$$

Pour obtenir une coupe droite, il faut que dans le repère plan $(O_s, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$:

$y_P = \lambda(t) + L.\cos\alpha + b = cte$

Cette condition sera réalisée si $\frac{d\,y_P}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d\left(\lambda(t) + L.\cos\alpha + b\right)}{dt} = 0$. La condition

pour laquelle la coupe du savon est droite est donc : $\boxed{\dot{\lambda}(t) - L.\dot{\alpha}.\sin\alpha = 0}$ 2)

Comme le mouvement du savon par rapport au bâti est un mouvement de translation rectiligne à vitesse constante, tout point du savon a même vitesse par rapport au bâti (0).

$$\left.\frac{d\,\overrightarrow{AO_s}}{dt}\right)_{R_0} = \left.\frac{d\left(h.\vec{z}_0 - \lambda(t).\vec{y}_0\right)}{dt}\right)_{R_0} = -\dot{\lambda}(t).\vec{y}_0 = V_b.\vec{y}_0$$

Nous pouvons alors déduire que $\boxed{-\dot{\lambda}(t) = V_b}$ 3)

Par combinaison des relations 1) et 3) : $\dot{\alpha} = \frac{V_b}{-L.\sin\alpha}$ et $-\dot{\lambda}(t) = V_b$ nous retrouvons l'expression

2) : $\dot{\lambda}(t) - L.\dot{\alpha}.\sin\alpha = 0$ qui traduit le fait que la découpe du savon sera bien droite.