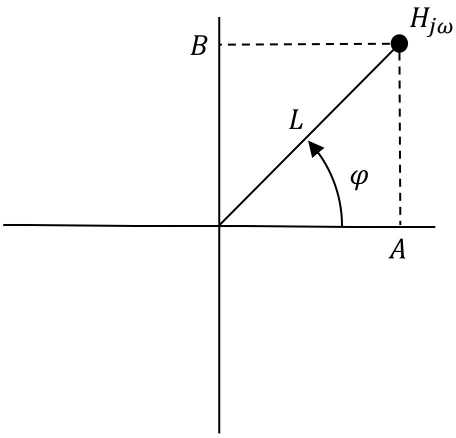
# Fiche pour le calcul d'arguments en SLCI

## A.I. Argument d'un nombre complexe

### A.I.1 Nombre complexe et argument




Soit $H_{j\omega}$ un nombre complexe. Il s'écrit sous la forme :

$$H_{j\omega} = A + iB \quad ; \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

$$|H_{j\omega}| = L = \sqrt{A^2 + B^2}$$

On a :

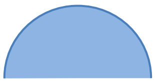
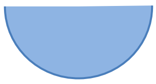
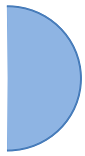
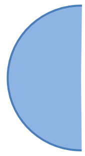
$$\cos\varphi = \frac{A}{L} \quad ; \quad \sin\varphi = \frac{B}{L} \quad ; \quad \tan\varphi = \frac{B}{A}$$

Le problème lié aux calculs d'arguments est issu des domaines de définition des fonctions $cos^{-1}$, $sin^{-1}$ et $tan^{-1}$, en effet :

$$\begin{cases} cos^{-1}(x)\ pour\ x \in [0, \pi] \\ sin^{-1}(x)\ pour\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ tan^{-1}(x)\ pour\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

Il faut donc, pour chacune de ces fonctions, savoir si l'angle que l'on cherche, modulo $2\pi$, se trouve dans l'intervalle de définition de la fonction inversée ou dans son complémentaire à $2\pi$. Autrement dit, selon la fonction utilisée, il faut identifier le demi-plan dans lequel se trouve la solution attendue.

## A.I.2 Calcul de l'argument

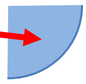
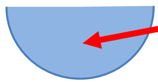
<table>
<tr><td colspan="2">$\cos\varphi = \frac{A}{L}$</td><td colspan="2">$\sin\varphi = \frac{B}{L}$</td><td colspan="2">$\tan\varphi = \frac{B}{A}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Etudier le signe du sinus<br>$\sin\varphi = \frac{B}{L}$</td><td colspan="4">Etudier le signe du cosinus<br>$\cos\varphi = \frac{A}{L}$</td></tr>
<tr><td>$B > 0$</td><td>$B < 0$</td><td colspan="2">$A > 0$</td><td colspan="2">$A < 0$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>$\varphi \in [0, \pi]$</td><td>$\varphi \in [0, -\pi]$</td><td colspan="2">$\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$</td><td colspan="2">$\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$</td></tr>
<tr><td>$\varphi = cos^{-1}\left(\frac{A}{L}\right) [2\pi]$</td><td>$\varphi = -cos^{-1}\left(\frac{A}{L}\right) [2\pi]$</td><td>$\varphi = sin^{-1}\left(\frac{B}{L}\right) [2\pi]$</td><td>$\varphi = \pi - sin^{-1}\left(\frac{B}{L}\right) [2\pi]$</td><td>$\varphi = tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right) [2\pi]$</td><td>$\varphi = tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right) + \pi [2\pi]$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\varphi = \text{sign}\, B * cos^{-1}\left(\frac{A}{L}\right)$<br><br>Formule permettant la détermination d'un angle sur tout le cercle trigonométrique ☺</td><td colspan="4"></td></tr>
</table>

On utilise souvent la tangente d'un angle pour déterminer celui-ci car c'est avec la tangente que l'expression à inverser est la plus simple, il n'y a pas de module au dénominateur qui aurait une forme en racine.

## A.II. Arguments en SLCI

L'avantage des arguments en SLCI pour les 1° et seconds ordres, c'est que l'on connaît l'intervalle de recherche :

Privilégier **Tangente**

| 1° ordre | 2° ordre |
|---|---|
| $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ | $\varphi \in [-\pi, 0]$ |
|  |  |

Privilégier **Cosinus**

Même si l'on peut utiliser l'une des 6 formules vues précédemment, on privilégiera :

- La tangente dans le cas d'un 1° ordre car la formule est la plus simple et l'inversion peut être directement réalisée
- Le cosinus pour un 2° ordre afin de ne pas avoir à distinguer le cas $\varphi \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$ ou cas $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

Pour éviter différentes erreurs, il est recommandé de transformer les nombres complexes quand ceux-ci n'ont pas la forme $A + iB$, par exemple, éviter de garder un – devant l'argument et dans le nombre complexe :

$$\arg\left(\frac{1}{A + iB}\right) = -\arg(A + iB) = \arg(A - iB) = \arg(A + iB')$$

On mène alors la réflexion sur $A$ et $B'$ comme vu précédemment.

Parfois, on mène un calcul différent amenant au même résultat :

$$\arg\left(\frac{1}{A + iB}\right) = \arg\left(\frac{A - iB}{(A + iB)(A - iB)}\right) = \arg\left(\frac{A - iB}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right) = \arg(A - iB) = \arg(A + iB')$$

**Toujours se ramener à une forme $+\arg(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{iB})$**

## A.II.1 1° ordre

### A.II.1.a Fonction de transfert

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T}$$

### A.II.1.b Mise en forme de l'argument

$$\varphi = \arg H(j\omega) = \arg\left(\frac{K}{1 + j\omega T}\right) = \arg(K) - \arg(1 + j\omega T)$$

$$\varphi = -\arg(1 + j\omega T) = \arg(1 - j\omega T)$$

$$\varphi = \arg(A + jB)$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = -\omega T \end{cases}$$

### A.II.1.c Expressions des cos, sin et tan

$$\tan(\varphi) = \frac{B}{A} \; ; \; \cos(\varphi) = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \; ; \; \sin(\varphi) = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\tan(\varphi) = -\omega T \; ; \; \cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \; ; \; \sin(\varphi) = \frac{-\omega T}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}$$

### A.II.1.d Choix et résolution

$$\cos(\varphi) > 0 \Rightarrow \varphi \in \left[\frac{\pi}{2} ; -\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}(-\omega T)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\varphi = -\tan^{-1}(\omega T)}}$$

## A.II.2 2° ordre

### A.II.2.a Fonction de transfert

$$H(p)=\frac{K}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{{\omega_0}^2}p^2}=\frac{K}{ap^2+bp+1} \quad ; \quad \begin{cases} a=\frac{1}{{\omega_0}^2} \\ b=\frac{2z}{\omega_0} \end{cases}$$

$$H(j\omega)=\frac{K}{a(j\omega)^2+bj\omega+1}=\frac{K}{(1-a\omega^2)+jb\omega}$$

### A.II.2.b Mise en forme de l'argument

$$\varphi=\arg H(j\omega)=\arg\left(\frac{K}{(1-a\omega^2)+jb\omega}\right)=\arg(K)-\arg\big((1-a\omega^2)+jb\omega\big)$$

$$\varphi=-\arg\big((1-a\omega^2)+jb\omega\big)=\arg\big((1-a\omega^2)-jb\omega\big)$$

$$\varphi=\arg(A+jB) \quad ; \quad \begin{cases} A=1-a\omega^2 \\ B=-b\omega \end{cases}$$

### A.II.2.c Expressions des cos, sin et tan

$$\tan(\varphi)=\frac{B}{A}=\frac{-b\omega}{1-a\omega^2}$$

$$\cos(\varphi)=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{1-a\omega^2}{\sqrt{(1-a\omega^2)^2+(b\omega)^2}}$$

$$\sin(\varphi)=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{-b\omega}{\sqrt{(1-a\omega^2)^2+(b\omega)^2}}$$

### A.II.2.d Choix et résolution

$$\Rightarrow \varphi=\operatorname{sign}(B)\cos^{-1}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$$

$$\operatorname{sign}(B)=\operatorname{sign}(-b\omega)\leq 0 \;\forall(\omega,z)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\varphi=-\cos^{-1}\left(\frac{1-a\omega^2}{\sqrt{(1-a\omega^2)^2+(b\omega)^2}}\right)}}$$

$$\varphi=-\cos^{-1}\left(\frac{1-\frac{\omega^2}{{\omega_0}^2}}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{{\omega_0}^2}\right)^2+\left(2z\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}\right)$$

## A.III. Erreurs classiques

Soit la fonction de transfert numérique d'un système du second ordre simplifiée suivante :

$$H(j\omega) = \frac{10}{-99 + 10\mathrm{j}}$$

Calculons son argument.

### A.III.1 Méthode privilégiée

On utilise l'inverse du cosinus après avoir mis sous la forme $\arg(\mathrm{A} + \mathrm{iB})$

$$\varphi = \arg\left(\frac{10}{-99 + 10\mathrm{j}}\right) = -\arg(-99 + 10\mathrm{j}) = \arg(-99 - 10\mathrm{j}) = -\cos^{-1}\left(\frac{-99}{\sqrt{99^2 + 10^2}}\right)$$
$$= -3{,}04\, rd = -174{,}23°$$

### A.III.2 Méthodes avec erreur

Toutes ces erreurs, aussi bêtes soient elles, sont souvent commises. C'est pourquoi il me semble opportun de vous les présenter. L'idéal restera toujours d'appliquer les méthodes préconisées plus haut.

#### A.III.2.a Utilisation du cosinus avec – devant l'argument

$$\varphi = \arg\left(\frac{10}{-99 + 10\mathrm{j}}\right) = -\arg(-99 + 10\mathrm{j}) = -\left[-\cos^{-1}\left(\frac{-99}{\sqrt{99^2 + 10^2}}\right)\right] = 3{,}04\, rd = 174{,}23°$$

L'erreur vient de l'application par cœur de la formule où on se souvient qu'il faut écrire $-\cos^{-1}(\dots)$ alors que dans ce cas, ce n'est pas vrai. Le $-$, est le signe de $B$. Il aurait fallu écrire :

$$\varphi = \arg\left(\frac{10}{-99 + 10\mathrm{j}}\right) = -\arg(-99 + 10\mathrm{j}) = -\left[\cos^{-1}\left(\frac{-99}{\sqrt{99^2 + 10^2}}\right)\right] = -3{,}04\, rd = -174{,}23°$$

#### A.III.2.b Utilisation de la tangente et domaine de définition

$$\varphi = \arg\left(\frac{10}{-99 + 10\mathrm{j}}\right) = -\arg(-99 + 10\mathrm{j}) = \arg(-99 - 10\mathrm{j}) = \tan^{-1}\left(\frac{-10}{-99}\right) = 0{,}1\, rd$$

L'angle recherché n'est pas dans le domaine de définition $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, l'utilisation directe de $\tan^{-1}$ est fausse.

Solution :

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{-10}{-99}\right) - \pi = 0{,}1 - \pi = -3{,}04\, rd$$

### A.III.2.c Utilisation de la tangente et signe – devant l'argument

On utilise la tangente en se doutant qu'il faut faire attention car on sait que l'on cherche un angle dans $\left[\pi,-\frac{\pi}{2}\right]$, mais en définissant un angle intermédiaire, on se trompe lorsque l'on se demande si la solution est + ou - $\pi$

$$\theta = \arg(-99+10j)$$

On pose :

$$\varphi = -\theta$$

$$\theta = \arg(-99+10j) = \tan^{-1}\left(\frac{10}{-99}\right) - \pi = -0{,}1 - \pi = -3{,}24\ rd$$

Sachant que l'on cherche un angle dans l'intervalle $\left[\pi,-\frac{\pi}{2}\right]$, on se dit qu'il ne faut pas ajouter $\pi$ pour ne pas passer en positif, donc on le soustrait… Le résultat n'est pas dans l'intervalle $\left[\pi,-\frac{\pi}{2}\right]$ !!! Et on oublie de changer le signe. Ou alors on y pense, et on bloque car on sait qu'il y a une erreur.

Solution :

$$\theta = -0{,}1 + \pi = 3{,}04$$

$$\varphi = -3{,}04$$

On ne développera pas l'erreur consistant en plus de celle-ci à se tromper avec le domaine de définition de la tangente vue précédemment.