A.VIII. Transformation du mouvement

Reprenons les différents mécanismes de transformation du mouvement que nous avons vu dans le chapitre de cinématique.

On supposera ici que toutes les liaisons sont parfaites. Les relations statiques trouvées entre action mécanique d'entrée et action mécanique de sortie ne seront valables que si les liaisons sont parfaites. Si les liaisons sont imparfaites, les relations cinématiques restent parfaitement valables, mais les relations statiques ne le seront plus, l'action de sortie étant toujours légèrement plus faible que l'action théorique lorsque les liaisons sont supposées parfaites.

Attention, dans tous les mécanismes de transformation du mouvement, il faut veiller à définir les signes des efforts entrant et sortant. La convention généralement choisie, et elle le sera dans la suite, est de considérer une entrée en effort ou couple E_1 de l'extérieur sur la pièce d'entrée, et un effort ou couple transmis de la pièce 2 vers l'extérieur E_2. Ainsi, la pièce 1 est soumise à E_1, la pièce 2 à $-E_2$.

A.VIII.1 Transformation Rotation/Rotation

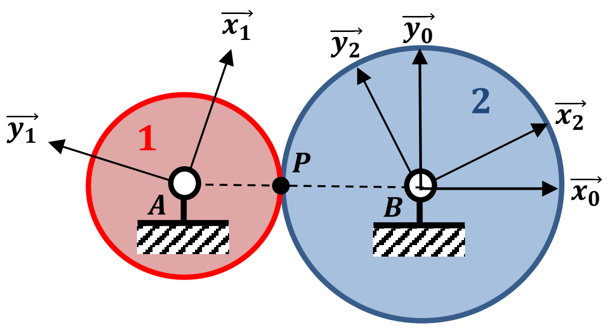
Nous nous intéressons ici aux transformations de mouvement présentant un rapport $k_{s/e}$ constant :

$$\omega_{s/0} = k_{s/e}\omega_{e/0} \quad ; \quad V_{s/0} = k_{s/e}\omega_{e/0} \quad ; \quad V_{s/0} = k_{s/e}V_{e/0}$$

A.VIII.1.a Solution Engrenages

• **<u>Contact extérieur</u>**

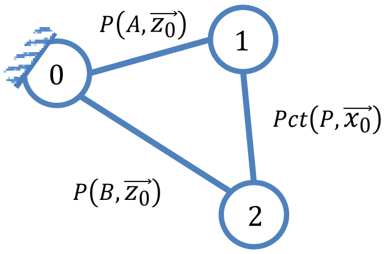
Soit le modèle suivant :



$$\|\overrightarrow{AP}\| = R_1 \; ; \; \|\overrightarrow{PB}\| = R_2$$

$$\theta_{20} = (\widehat{\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_2}}) = (\widehat{\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_2}})$$

$$\theta_{10} = (\widehat{\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1}}) = (\widehat{\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_1}})$$



On suppose qu'il y a roulement sans glissement entre 1 et 2 en P.

Appelons $\overrightarrow{C_1} = C_1\overrightarrow{z_0}$ le couple d'entrée, de l'extérieur sur la pièce 1 selon l'axe $(A,\overrightarrow{z_0})$ et $\overrightarrow{C_2} = C_2\overrightarrow{z_0}$ le couple de sortie, transmis par la pièce 2 à la sortie selon l'axe $(B,\overrightarrow{z_0})$

On note $\{T_{21}\} = \begin{Bmatrix} R_x^{21}\overrightarrow{x_0} + R_y^{21}\overrightarrow{y_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_P$ l'action de la roue dentée 2 sur la roue dentée 1.

On se place en mécanisme plan.

Equilibre pièce 1	$\left\{\begin{matrix} \vec{0} \\ C_1\overrightarrow{z_0} \end{matrix}\right\}_A + \left\{\begin{matrix} X_{01}\overrightarrow{x_0}+Y_{01}\overrightarrow{y_0} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_A + \left\{\begin{matrix} R_x^{21}\overrightarrow{x_0}+R_y^{21}\overrightarrow{y_0} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_P = \{0\}$ $\overrightarrow{M_A}(\overrightarrow{R_{21}}) = \overrightarrow{M_P}(\overrightarrow{R_{21}}) + \overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{R_{21}} = R_1\overrightarrow{x_0}\wedge(R_x^{21}\overrightarrow{x_0}+R_y^{21}\overrightarrow{y_0}) = R_1R_y^{21}\overrightarrow{z_0}$ $\left\{\begin{matrix} \vec{0} \\ C_1\overrightarrow{z_0} \end{matrix}\right\}_A + \left\{\begin{matrix} X_{01}\overrightarrow{x_0}+Y_{01}\overrightarrow{y_0} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_A + \left\{\begin{matrix} R_x^{21}\overrightarrow{x_0}+R_y^{21}\overrightarrow{y_0} \\ R_1R_y^{21}\overrightarrow{z_0} \end{matrix}\right\}_A = \{0\}$ $\left\{\begin{matrix} X_{01}\overrightarrow{x_0}+Y_{01}\overrightarrow{y_0}+R_x^{21}\overrightarrow{x_0}+R_y^{21}\overrightarrow{y_0}=\vec{0} \\ C_1\overrightarrow{z_0}+R_1R_y^{21}\overrightarrow{z_0}=\vec{0} \end{matrix}\right.$ Equation en moment suivant $\overrightarrow{z_0}$: $C_1+R_1R_y^{21}=0$
Equilibre pièce 2	$\left\{\begin{matrix} \vec{0} \\ -C_2\overrightarrow{z_0} \end{matrix}\right\}_B + \left\{\begin{matrix} X_{02}\overrightarrow{x_0}+Y_{02}\overrightarrow{y_0} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_B + \left\{\begin{matrix} R_x^{12}\overrightarrow{x_0}+R_y^{12}\overrightarrow{y_0} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_P = \{0\}$ $\overrightarrow{M_B}(\overrightarrow{R_{12}}) = \overrightarrow{M_P}(\overrightarrow{R_{12}}) + \overrightarrow{BP}\wedge\overrightarrow{R_{12}} = -R_2\overrightarrow{x_0}\wedge(R_x^{12}\overrightarrow{x_0}+R_y^{12}\overrightarrow{y_0}) = -R_2R_y^{12}\overrightarrow{z_0}$ $\left\{\begin{matrix} \vec{0} \\ -C_2\overrightarrow{z_0} \end{matrix}\right\}_B + \left\{\begin{matrix} X_{02}\overrightarrow{x_0}+Y_{02}\overrightarrow{y_0} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_B + \left\{\begin{matrix} R_x^{12}\overrightarrow{x_0}+R_y^{12}\overrightarrow{y_0} \\ -R_2R_y^{12}\overrightarrow{z_0} \end{matrix}\right\}_B = \{0\}$ $\left\{\begin{matrix} X_{02}\overrightarrow{x_0}+Y_{02}\overrightarrow{y_0}+R_x^{12}\overrightarrow{x_0}+R_y^{12}\overrightarrow{y_0}=\vec{0} \\ -C_2\overrightarrow{z_0}-R_2R_y^{12}\overrightarrow{z_0}=\vec{0} \end{matrix}\right.$ Equation en moment suivant $\overrightarrow{z_0}$: $-C_2-R_2R_y^{12}=0$

Soit :

$$\left\{\begin{matrix} C_1+R_1R_y^{21}=0 \\ C_2+R_2R_y^{12}=0 \end{matrix}\right.$$

D'après le théorème des actions réciproques :

$$R_y^{21}=-R_y^{12}$$

Les équations en moment donnent :

$$\left\{\begin{matrix} C_1+R_1R_y^{21}=0 \\ -C_2-R_2R_y^{12}=0 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} C_1=-R_1R_y^{21} \\ C_2=-R_2R_y^{12}=R_2R_y^{21} \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} R_y^{21}=-\frac{C_1}{R_1} \\ R_y^{21}=\frac{C_2}{R_2} \end{matrix}\right. \Rightarrow -\frac{C_1}{R_1}=\frac{C_2}{R_2}$$

Or :

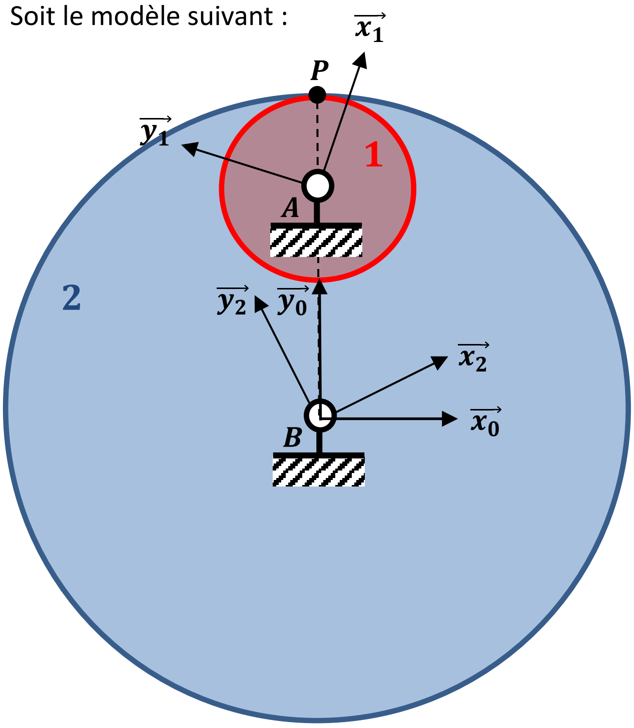
$$\frac{\Omega_{20}}{\Omega_{10}}=-\frac{R_1}{R_2}=-\frac{Z_1}{Z_2}=k$$

Soit :

$$\boxed{\frac{C_2}{C_1}=-\frac{R_2}{R_1}=-\frac{Z_2}{Z_1}=\frac{\Omega_{10}}{\Omega_{20}}=\frac{1}{k}}$$

• **Contact intérieur**

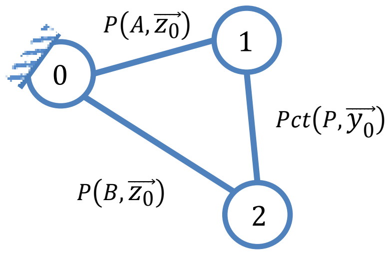
Soit le modèle suivant :



$$\left\|\overrightarrow{AP}\right\| = R_1 \; ; \; \left\|\overrightarrow{PB}\right\| = R_2$$

$$\theta_{20} = \left(\widehat{\vec{x_0}, \vec{x_2}}\right) = \left(\widehat{\vec{y_0}, \vec{y_2}}\right)$$

$$\theta_{10} = \left(\widehat{\vec{x_0}, \vec{x_1}}\right) = \left(\widehat{\vec{y_0}, \vec{y_1}}\right)$$



Appelons $\vec{C_1} = C_1 \vec{z_0}$ le couple d'entrée, de l'extérieur sur la pièce 1 selon l'axe $(A, \vec{z_0})$ et $\vec{C_2} = C_2 \vec{z_0}$ le couple de sortie, transmis par la pièce 2 à la sortie selon l'axe $(B, \vec{z_0})$

Par une démonstration similaire au cas du contact extérieur, on obtient les deux équations suivantes en appliquant le TMS à chaque solide suivant $\vec{z_0}$

$$\begin{cases} C_1 - R_1 R_x^{21} = 0 \\ -C_2 - R_2 R_x^{12} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = R_1 R_x^{21} \\ -C_2 = R_2 R_x^{12} = -R_2 R_x^{21} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_x^{21} = \dfrac{C_1}{R_1} \\ R_x^{21} = \dfrac{C_2}{R_2} \end{cases}$$

Or :

$$\frac{\Omega_{20}}{\Omega_{10}} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{Z_1}{Z_2} = k$$

Soit :

$$\boxed{\frac{C_2}{C_1} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{\Omega_{10}}{\Omega_{20}} = \frac{1}{k}}$$

• **Train d'engrenages**

Considérons maintenant un ensemble de p engrenages en série dont les axes sont fixes dans le repère 0:

- Engrenage 1 : roues 1 et 2 – rapport $k_{2/1} = \frac{\Omega_{2/0}}{\Omega_{1/0}}$ – Couples C_1 et C_2
- Engrenage 2 : roues 2 et 3 – rapport $k_{3/2} = \frac{\Omega_{3/0}}{\Omega_{2/0}}$ – Couples C_2 et C_3
- …
- Engrenage p : roues p et $p+1$ – rapport $k_{p+1/p} = \frac{\Omega_{p+1/0}}{\Omega_{p/0}}$ – Couples C_p et C_{p+1}

D'après ce que nous venons de voir, on a :

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{1}{k_{21}} \quad ; \quad \frac{C_3}{C_2} = \frac{1}{k_{32}} \quad ; \quad \dots \quad ; \quad \frac{C_{p+1}}{C_p} = \frac{1}{k_{p+1/p}}$$

Nous avons vu en cinématique que le rapport de réduction global valait :

$$k_{p+1/1} = \frac{\Omega_{p+1/0}}{\Omega_{10}} = \prod_{i=1}^{p} k_{i+1/i}$$

On a donc :

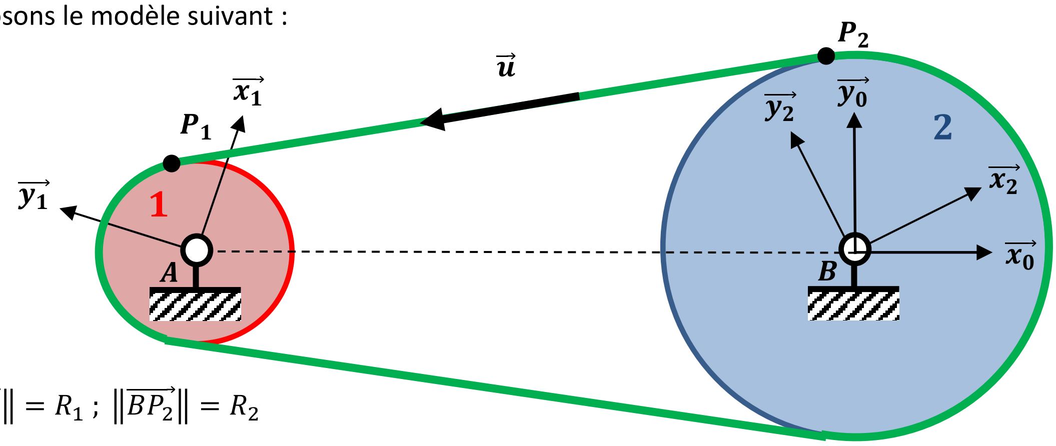
$$\frac{C_{p+1}}{C_1} = \frac{C_{p+1}}{C_p} \dots \frac{C_3}{C_2}\frac{C_2}{C_1} = \frac{1}{k_{p+1/p}} \dots \frac{1}{k_{32}}\frac{1}{k_{21}}$$

$$\boxed{\frac{C_{p+1}}{C_1} = \prod_{i=1}^{p} \frac{1}{k_{i+1/i}} = \frac{1}{k_{p1}}}$$

Remarque : Lorsque les liaisons sont imparfaites (programme de seconde année), les relations cinématiques, imposées par la matière, sont inchangées. Par contre, les couples et efforts transmis sont diminués

A.VIII.1.b Solution Poulie/Courroie

Proposons le modèle suivant :



$$\|\overrightarrow{AP_1}\| = R_1 \; ; \; \|\overrightarrow{BP_2}\| = R_2$$

$$\theta_{20} = \left(\widehat{\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_2}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_2}}\right)$$

$$\theta_{10} = \left(\widehat{\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1}}\right)$$

Appelons $\overrightarrow{C_1} = C_1\overrightarrow{z_0}$ le couple d'entrée, de l'extérieur sur la pièce 1 selon l'axe $(A, \overrightarrow{z_0})$ et $\overrightarrow{C_2} = C_2\overrightarrow{z_0}$ le couple de sortie, transmis par la pièce 2 à la sortie selon l'axe $(B, \overrightarrow{z_0})$

Appelons $\overrightarrow{F_{c1}} = F_{c1}\vec{u}$ l'effort de la courroie sur la poulie 1 en P_1 et $\overrightarrow{F_{c2}} = F_{c2}\vec{u}$ l'effort de la courroie sur la poulie 2 en P_2

Supposons que la courroie se comporte comme un solide rigide entre P_1 et P_2. L'équation du TRS sur $\vec{u}$ appliqué à celle-ci donne :

$$F_{c1} = -F_{c2}$$

L'isolement de chacune des roues donne la relation suivante, en appliquant le TMS suivant $\overrightarrow{z_0}$:

$$\begin{cases} C_1 + F_{c1}R_1 = 0 \\ -C_2 + F_{c2}R_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -F_{c1}R_1 \\ C_2 = F_{c2}R_2 = -F_{c1}R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_{c1} = -\dfrac{C_1}{R_1} \\ F_{c1} = -\dfrac{C_2}{R_2} \end{cases} \Rightarrow \frac{C_1}{R_1} = \frac{C_2}{R_2}$$

Or :

$$\frac{\Omega_{20}}{\Omega_{10}} = \frac{R_1}{R_2} = k$$

Soit :

$$\boxed{\frac{C_2}{C_1} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{\Omega_{10}}{\Omega_{20}} = \frac{1}{k}}$$

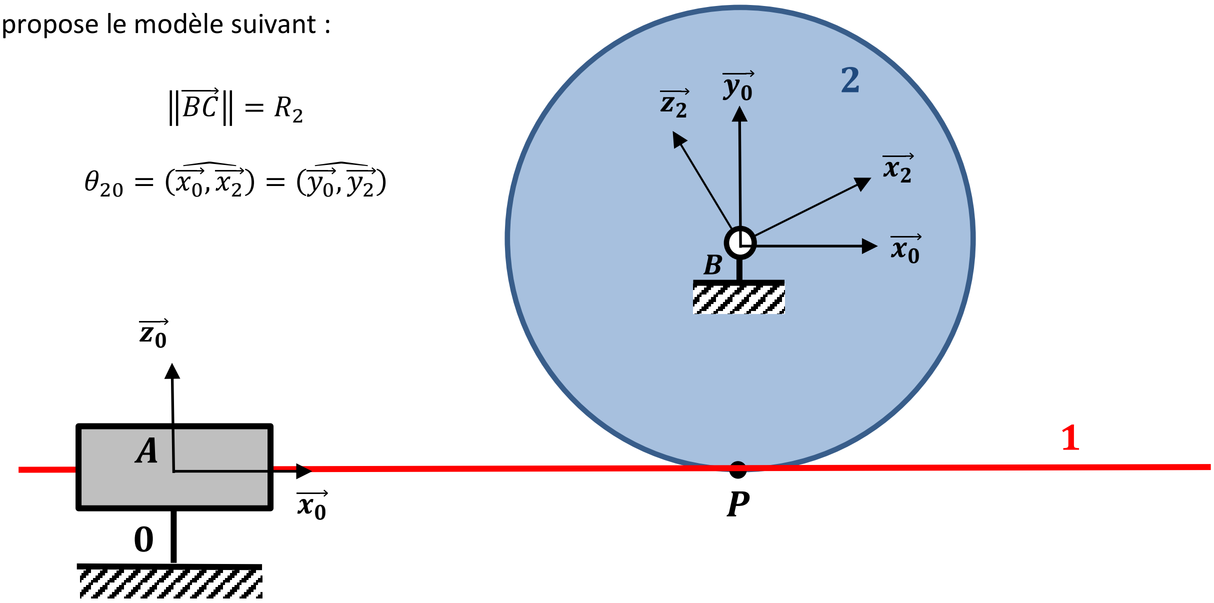
A.VIII.2 Transformation Rotation/Translation

A.VIII.2.a Solution Pignon/Crémaillère

On propose le modèle suivant :

$$\|\overrightarrow{BC}\| = R_2$$

$$\theta_{20} = (\widehat{\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_2}}) = (\widehat{\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_2}})$$



Appelons $\vec{F} = F\overrightarrow{x_0}$ l'effort appliqué sur la pièce 1 dans la glissière en A et $\overrightarrow{F_{21}} = F_x^{21}\overrightarrow{x_0} + F_y^{21}\overrightarrow{y_0}$ l'effort de la du pignon 2 sur la crémaillère 1 en P_2

Appelons $\overrightarrow{C_2} = C_2\overrightarrow{z_0}$ le couple de sortie, transmis par la pièce 2 à la sortie selon l'axe $(B, \overrightarrow{z_0})$

L'équation du TRS sur l'axe $\overrightarrow{x_0}$ appliqué au solide 1 donne :

$$F = -F_x^{21} = F_x^{12}$$

L'équation du TMS sur $\overrightarrow{z_0}$ appliqué au solide 2 donne :

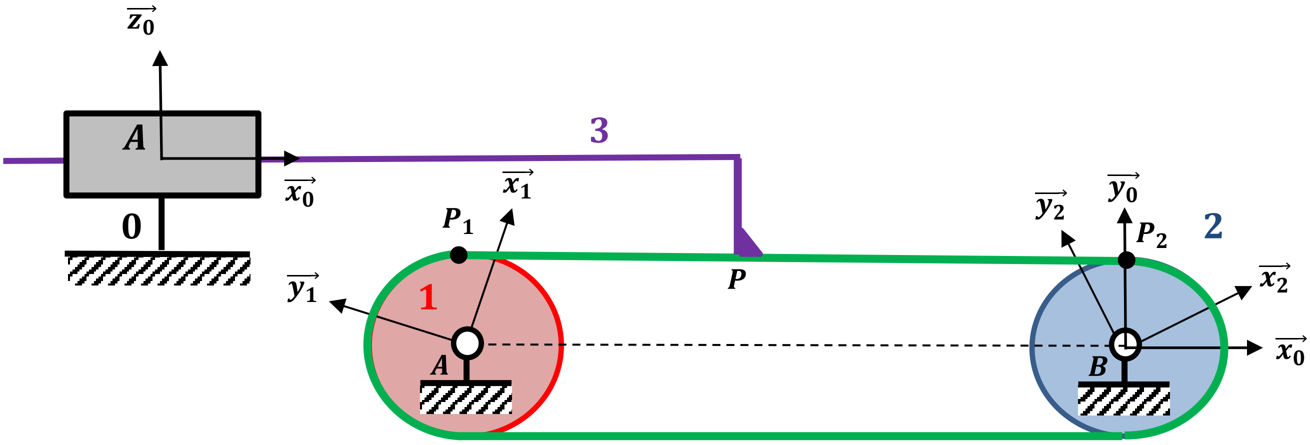
$$-C_2 + R_2 F_x^{12} = 0$$

Soit :

$$C_2 = R_2 F_x^{12} = R_2 F$$

A.VIII.2.b Solution Poulie/Courroie

On propose le modèle suivant :



Supposons que seule la poulie 1 est soumise à un couple extérieur $C_1\overrightarrow{z_0}$.

Appelons $\overrightarrow{F_{c1}} = F_{c1}\overrightarrow{x_0}$ l'effort de la courroie sur la poulie 1 en P_1. Compte tenu du fait que la poulie 2 n'est pas soumise à un couple, l'action $\overrightarrow{F_{c1}} = F_{c1}\overrightarrow{x_0}$ en P_2 est nulle (si les liaisons sont parfaites).

Appelons $\overrightarrow{F_{c3}} = F_{c3}\overrightarrow{x_0}$ l'effort de la courroie sur la poulie 1 en P

Appelons $\vec{F} = F\overrightarrow{x_0}$ l'effort transmis par la pièce 3 à l'extérieur

En isolant le solide 1 et en lui appliquant le TMS sur l'axe $\overrightarrow{z_0}$, on obtient :

$$C_1 - R_1F_{c1} = 0 \Rightarrow C_1 = R_1F_{c1}$$

Supposons que la courroie se comporte comme un solide rigide entre P_1 et P, on montre alors en l'isolant et en projetant l'équation du TRS sur $\overrightarrow{x_0}$ que :

$$F_{1c} + F_{3c} = 0 \Rightarrow F_{1c} = -F_{3c}$$

En isolant la pièce 3 et en lui appliquant le TRS sur $\overrightarrow{x_0}$, on obtient :

$$-F + F_{c3} = 0 \Rightarrow F_{c3} = F$$

Soit finalement :

$$F_{c3} = F = F_{1c} = -\frac{C_1}{R_1}$$

$$F = -\frac{C_1}{R_1}$$