A.II. Systèmes du premier ordre

A.II.1 Réponse harmonique générale

Supposons une entrée sinusoïdale de pulsation ω :

$$e(t) = e_0 \sin \omega t \, u(t)$$

La sortie en régime permanent sera de la forme :

$$s(t) = s_0 \sin(\omega t + \varphi) \, u(t)$$

Avec :

$$\begin{cases} s_0 = |H(j\omega)| e_0 \\ \varphi = \arg H(j\omega) \end{cases}$$

Il nous faut donc déterminer, en fonction de ω, les valeurs de $|H(j\omega)|$ et de $\arg H(j\omega)$.

Pour un système du premier ordre, on a :

$$H(p) = \frac{K}{1+Tp} = \frac{K}{1+\frac{p}{\omega_0}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{T}$$

$$E(p) = e_0 \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

Déterminons $s(t)$:

$$S(p) = H(p)E(p) = \frac{K}{1+Tp} e_0 \frac{\omega}{p^2+\omega^2} = \frac{Ke_0\omega}{(p^2+\omega^2)(1+Tp)}$$

$$S(p) = \frac{Ke_0\omega}{(p^2+\omega^2)(1+Tp)} = \frac{Ap+B}{p^2+\omega^2} + \frac{C}{1+Tp} = \frac{Ap+B+TpAp+TpB+Cp^2+C\omega^2}{(p^2+\omega^2)(1+Tp)}$$

$$S(p) = \frac{Ke_0\omega}{(p^2+\omega^2)(1+Tp)} = \frac{(AT+C)p^2+(A+TB)p+(B+C\omega^2)}{(p^2+\omega^2)(1+Tp)}$$

$$\begin{cases} Ke_0\omega = B + C\omega^2 \\ A + TB = 0 \\ AT + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ke_0\omega = -\frac{A}{T} - AT\omega^2 \\ B = -\frac{A}{T} \\ C = -AT \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ke_0\omega = -A\left(\frac{1}{T} + T\omega^2\right) \\ B = -\frac{A}{T} \\ C = -AT \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{Ke_0\omega T}{1+T^2\omega^2} \\ B = -\frac{A}{T} \\ C = -AT \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{Ke_0\omega T}{1+T^2\omega^2} \\ B = \dfrac{Ke_0\omega}{1+T^2\omega^2} \\ C = \dfrac{Ke_0\omega T^2}{1+T^2\omega^2} \end{cases}$$

Soit :

$$S(p) = \frac{-\dfrac{Ke_0\omega T}{1+T^2\omega^2}p + \dfrac{Ke_0\omega}{1+T^2\omega^2}}{p^2+\omega^2} + \frac{\dfrac{Ke_0\omega T^2}{1+T^2\omega^2}}{1+Tp}$$

$$S(p) = \frac{Ke_0\omega}{1+T^2\omega^2}\left[\frac{1-Tp}{p^2+\omega^2} + \frac{T^2}{1+Tp}\right]$$

$$S(p) = \frac{Ke_0}{1+T^2\omega^2}\left[\frac{\omega}{p^2+\omega^2} - \frac{\omega Tp}{p^2+\omega^2} + \frac{\omega T^2}{1+Tp}\right]$$

$$S(p) = \frac{Ke_0}{1+T^2\omega^2}\left[\frac{\omega}{p^2+\omega^2} - \omega T\frac{p}{p^2+\omega^2} + \omega T\frac{1}{\dfrac{1}{T}+p}\right]$$

Par application de la transformée de Laplace inverse, on a :

$$s(t) = \frac{Ke_0}{1+T^2\omega^2}\left[\sin(\omega T) - \omega T\cos(\omega T) + \omega T e^{-\frac{t}{T}}\right]u(t)$$

$$s(t) = \frac{Ke_0}{1+T^2\omega^2}\omega T e^{-\frac{t}{T}}u(t) + \frac{Ke_0}{1+T^2\omega^2}(\sin(\omega T) - \omega T\cos(\omega T))u(t)$$

Rappel :

$$f(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t = \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\omega t + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\omega t\right)$$

On recherche une forme $f(t) = C\cos(\omega t \pm \varphi)$	On recherche une forme $f(t) = C\sin(\omega t \pm \varphi)$
On pose : $\begin{cases} \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = \cos\varphi \\ \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \sin\varphi \end{cases}$ Pour avoir une expression simple de φ on passe par : $\tan\varphi = \frac{B}{A}$ On a : $f(t) = \sqrt{A^2+B^2}(\cos\varphi\cos\omega t + \sin\varphi\sin\omega t)$ $f(t) = \sqrt{A^2+B^2}\cos(\varphi - \omega t)$ $f(t) = C\cos(\omega t - \varphi)$	On pose : $\begin{cases} \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = \sin\varphi \\ \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \cos\varphi \end{cases}$ Pour avoir une expression simple de φ' on passe par : $\tan\varphi' = \frac{A}{B}$ On a : $f(t) = \sqrt{A^2+B^2}(\sin\varphi'\cos\omega t + \cos\varphi'\sin\omega t)$ $f(t) = \sqrt{A^2+B^2}\sin(\varphi' + \omega t)$ $f(t) = C\sin(\omega t + \varphi')$

Reprenons l'expression de $s(t)$

$$\sin\omega T - \omega T\cos\omega T = \sqrt{1+T^2\omega^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}\sin(\omega T) + \frac{-\omega T}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}\cos(\omega T)\right)$$

On pose φ tel que :

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \quad ; \quad \sin\varphi = \frac{-\omega T}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \quad ; \quad \tan\varphi = -\omega T$$

Alors :

$$\sin\omega T - \omega T\cos\omega T = \sqrt{1+T^2\omega^2}(\cos\varphi\sin(\omega T) + \sin\varphi\cos(\omega T)) = \sqrt{1+T^2\omega^2}\sin(\omega T + \varphi)$$

Finalement, on a donc :

$$s(t) = \frac{Ke_0}{1+T^2\omega^2}\omega T e^{-\frac{t}{T}}u(t) + \frac{Ke_0}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}\sin(\omega T + \varphi)\,u(t) \quad ; \quad \varphi = -\tan^{-1}\omega T$$

$$s(t) = \frac{Ke_0}{1+T^2\omega^2}\omega T e^{-\frac{t}{T}}u(t) + \boldsymbol{s_0\sin(\omega t + \varphi)\,u(t)}$$

Régime transitoire *Régime permanent*

A.II.2 Caractéristiques de la sortie en régime permanent

Dans le cas de réponses harmoniques, nous allons uniquement nous intéresser aux réponses en régime permanent. En régime permanent, nous avons vu que :

$$s(t) = e_0 \frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \sin(\omega T + \varphi) \quad ; \quad \varphi = -\tan^{-1}\omega T$$

A.II.2.a Calcul des caractéristiques

Exprimons la fonction de transfert du système dans le domaine complexe :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1+j\omega T}$$

Module	Argument
$\lvert H(j\omega)\rvert = \left\lvert\frac{K}{1+j\omega T}\right\rvert$ $\lvert H(j\omega)\rvert = \frac{K}{\lvert 1+j\omega T\rvert}$ $\boldsymbol{\lvert H(j\omega)\rvert = \frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}}$	$\varphi = \arg H(j\omega) = \arg\frac{K}{1+j\omega T}$ $\varphi = \arg(K) - \arg(1+j\omega T) = -\arg(1+j\omega T)$ $\varphi = \arg(1-j\omega T) = \arg(A+jB)$ $\begin{cases} A = 1 \\ B = -\omega T \end{cases}$ $\tan(\varphi) = \frac{B}{A}$; $\cos(\varphi) = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$; $\sin(\varphi) = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ $\tan(\varphi) = -\omega T$; $\cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}$; $\sin(\varphi) = \frac{-\omega T}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}$ $\cos(\varphi) > 0 \Rightarrow \varphi \in \left[\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}(-\omega T)$ $\boldsymbol{\varphi = -\tan^{-1}(\omega T)}$

A.II.2.b Bilan

$$\boxed{\begin{gathered} H(p) = \frac{K}{1+Tp} \\ e(t) = e_0 \sin\omega t \\ s(t) = s_0 \sin(\omega t + \varphi) \\ s(t) = \lvert H(j\omega)\rvert e_0 \sin(\omega t + \varphi) \\ s(t) = \frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} e_0 \sin(\omega t - \tan^{-1}\omega T) \end{gathered}}$$

1° ordre

On voit que :

- Pour une entrée d'amplitude e_0, l'amplitude de la sortie vaut $\frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} e_0$ et peut-être amplifiée ou atténuée
- La sortie est déphasée de $\tan^{-1}\omega T$ radians, cela correspond à un décalage entre l'entrée et la réponse du système, la réponse étant en retard par rapport à l'entrée

A.II.3 Représentation graphique

Il faut bien faire attention au fait que la réponse précédemment obtenue est une réponse temporelle pour une entrée sinusoïdale avec une pulsation (ou fréquence) donnée.

On introduit donc différents diagrammes permettant de représenter les deux valeurs caractéristiques $|H(j\omega)|$ et φ en fonction de ω.

A.II.3.a Diagrammes de Bode

Les deux diagrammes de Bode représentent le gain exprimé en décibels (db) et la phase en radians, le tout avec une échelle des abscisses logarithmique.

A.II.3.a.i Etude du gain

• **Expression – Tracé – Observations**

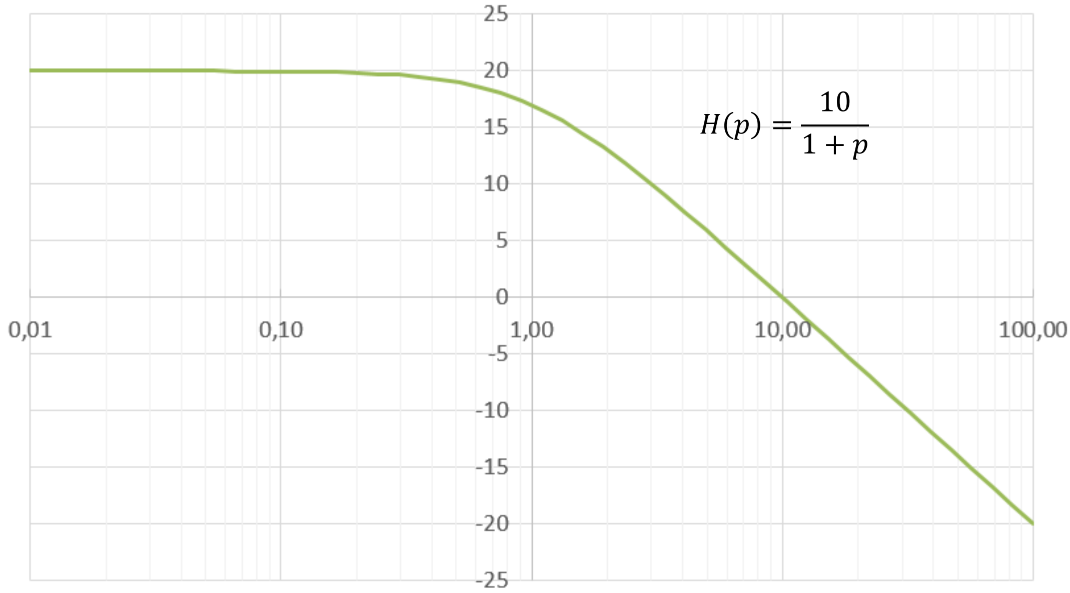
$$G_{db} = 20\log|H(j\omega)|$$

$$G_{db} = 20\log\frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}$$

$$G_{db} = 20\log K - 20\log\sqrt{1+T^2\omega^2}$$

$$\boxed{G_{db} = 20\log K - 10\log(1+T^2\omega^2)} \quad \mathbf{1° \ \mathit{ordre}}$$

Traçons un exemple de G_{db} en fonction de ω pour $H(p) = \frac{10}{1+p}$:



On remarque :

- Une asymptote horizontale à la valeur de $20\log K$ lorsque $\omega \to 0$
- Une asymptote de pente -20 décibels par décade lorsque $\omega \to +\infty$
- Une cassure vers la valeur $\omega_c = \frac{1}{T}$

- **Caractéristiques du gain**

$$G_{db}=20\log K-10\log(1+T^2\omega^2)$$

$\omega\to 0 \quad \Rightarrow \quad \log\omega\to-\infty$	$\omega\to+\infty \quad \Rightarrow \quad \log\omega\to+\infty$
$G_{db}\underset{\omega\to 0}{\sim}20\log K=G_0$ Asymptote horizontale de valeur $\boldsymbol{G_0=20\log K}$	$G_{db}\underset{\omega\to+\infty}{\sim}20\log K-20\log(T\omega)$ $G_{db}\underset{\omega\to+\infty}{\sim}20\log\frac{K}{T}-20\log(\omega)$ Soit $X=\log(\omega)$ $G_{db}\underset{\omega\to+\infty}{\sim}20\log\frac{K}{T}-20X$ En échelle logarithmique, c'est une droite de pente -20 db/décades Asymptote de pente $\boldsymbol{-20db/dec}$
Intersection des asymptotes	Pulsation à laquelle le gain réel est nul ω_{c_0}
Soient les deux équations des asymptotes : $y_{-\infty}=20\log K$ $y_{+\infty}=20\log K-20\log(T\omega)$ Leur intersection à lieu à la pulsation ω_c telle que : $20\log K=20\log K-20\log(T\omega_c)$ $\Leftrightarrow 20\log(T\omega_c)=0$ $\Leftrightarrow T\omega_c=1$ $\boldsymbol{\omega_c=\frac{1}{T}=\omega_0}$ Calculons le gain à cette pulsation : $G_{db}=20\log\frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}$ $=20\log\frac{K}{\sqrt{2}}=20\log K-20\log\sqrt{2}$ $G_{db}=G_0-\boldsymbol{3}$	Le gain (décroissant) ne peut être nul que si $\lim\limits_{\omega\to 0}G_{db}>0$, c'est-à-dire $20\log K>0$, soit $K>1$ $G_{db}=0$ $\Leftrightarrow 20\log K=10\log\left(1+T^2{\omega_{c_0}}^2\right)$ $\Leftrightarrow \log K^2=\log\left(1+T^2{\omega_{c_0}}^2\right)$ $\Leftrightarrow K^2=1+T^2{\omega_{c_0}}^2$ $\Leftrightarrow {\omega_{c_0}}^2=\frac{K^2-1}{T^2}\ avec\ \omega_{c_0}>0$ $\Leftrightarrow \omega_{c_0}=\frac{\sqrt{K^2-1}}{T}$ $\boldsymbol{\omega_{c_0}=\omega_0\sqrt{K^2-1}}$

Pulsation à laquelle le gain de l'asymptote est nul $\omega_{c_0}^{Asympt}$
Le gain (décroissant) ne peut être nul que si $\lim\limits_{\omega\to 0}G_{db}>0$, c'est-à-dire $20\log K>0$, soit $K>1$ On résout : $20\log K-20\left(\log\omega_{c_0}^{Asympt}-\log\omega_0\right)=0$ $\Leftrightarrow \log K=\log\frac{\omega_{c_0}^{Asympt}}{\omega_0}$ $\Leftrightarrow K=\frac{\omega_{c_0}^{Asympt}}{\omega_0}$ $\Leftrightarrow \omega_{c_0}^{Asympt}=K\omega_0=\frac{K}{T}$ On remarquera la proximité de cette valeur avec la valeur réelle $\omega_{c_0}=\frac{\sqrt{K^2-1}}{T}$

Conclusions :

- Il existe une asymptote horizontale de valeur $G_0 = 20\log K$ en $\omega \to 0$
- Il existe une asymptote de pente $-20\ db/dec$ en $\omega \to \infty$
- Les deux asymptotes se coupent à la pulsation $\omega_0 = \frac{1}{T}$
- A cette pulsation, le gain réel est égal au gain maximal du système $G_0 = 20\log K$ moins 3 db. On appelle cette pulsation la pulsation de coupure à -3db et on la note ω_c

$$\omega_c = \omega_0 = \frac{1}{T}$$

- On appelle bande passante à -3 db notée BP la plage de pulsations pour lesquelles le gain est supérieur au gain maximal diminué de 3 db

$$BP = [0; \omega_c]$$

- On appelle pulsation de coupure à 0 db la pulsation à laquelle le gain est nul et on la note ω_{c_0}

$$\omega_{c_0} = \omega_0\sqrt{K^2 - 1}$$

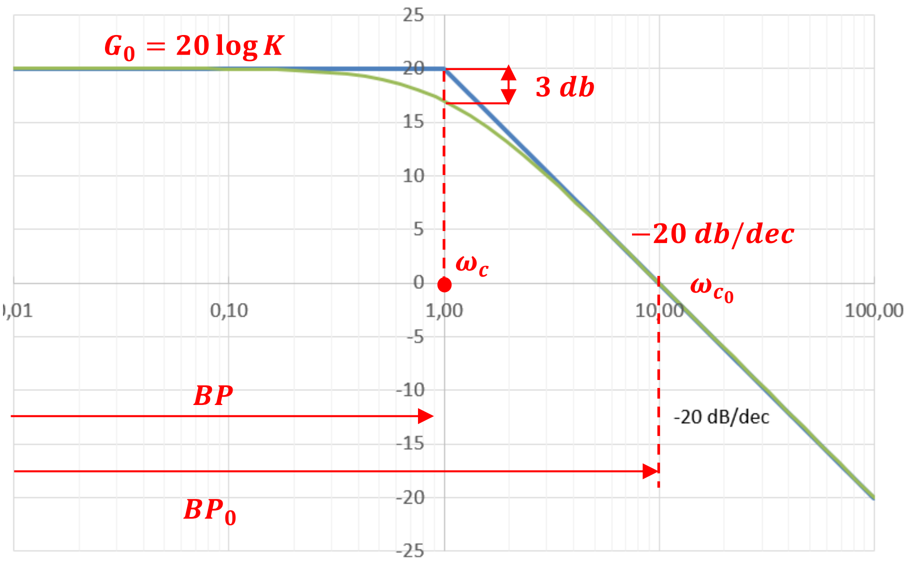
- La puslsation à laquelle le tracé asymptotique coupe l'axe des abscisses vaut $\omega_{c_0}^{Asympt} = K\omega_0 = \frac{K}{T}$
- On appelle bande passante à 0 db notée BP_0 la plage de pulsations pour laquelle le gain est positif

$$BP_0 = [0; \omega_{c_0}]$$

• <u>Tracé du diagramme de Bode en gain</u>

Le tracé des deux asymptotes s'appelle diagramme asymptotique de gain.

Le tracé de la courbe réelle s'appelle le diagramme de Bode en gain du système.



$$H(p) = \frac{K}{1 + Tp}$$

$$\omega_c = \omega_0 = \frac{1}{T}$$

$$\omega_{c_0} = \omega_0\sqrt{K^2 - 1}$$

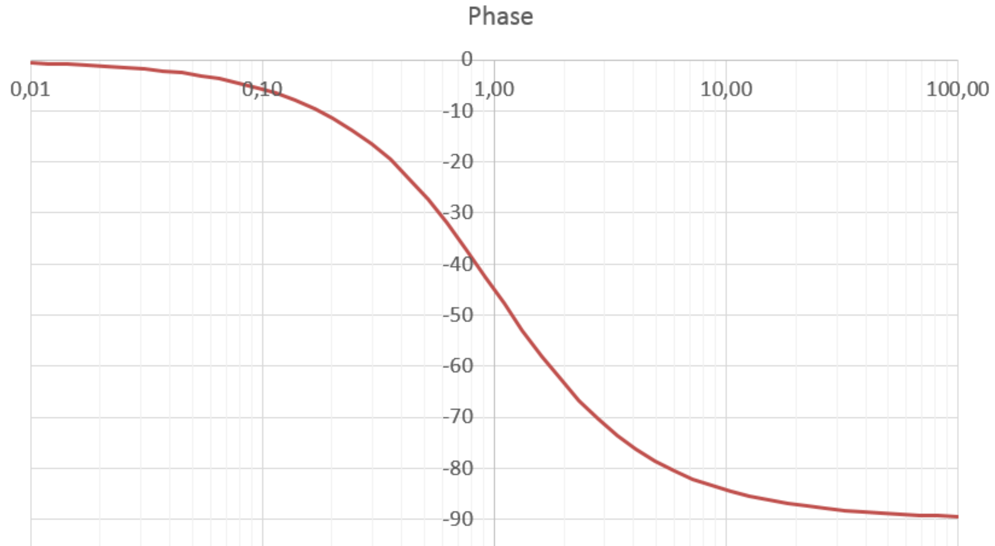
A.II.3.a.ii Etude de la phase

• Expression – Tracé – Observations

$$\boxed{\varphi = -\tan^{-1}\omega T} \quad \textbf{1° ordre}$$

Attention : φ est exprimée en radians dans la fonction $s(t)$

Traçons un exemple de φ en degrés en fonction de ω pour $H(p) = \frac{10}{1+p}$:



On remarque

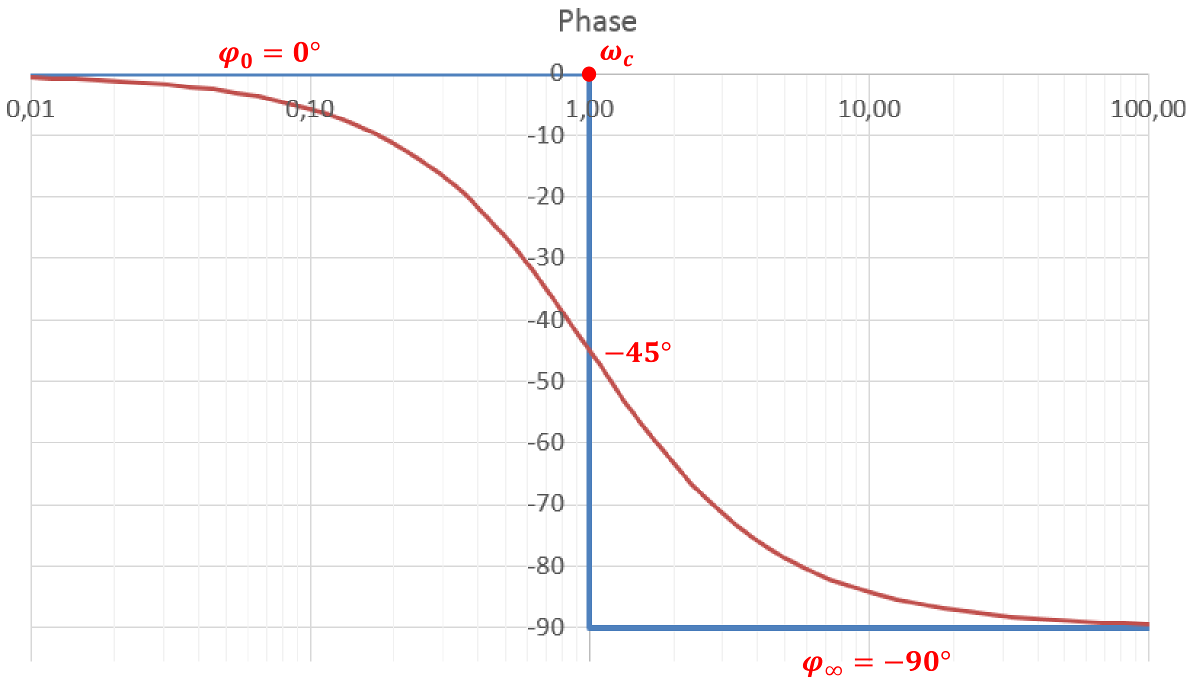
- Une asymptote horizontale à la valeur de 0° lorsque $\omega \to 0$
- Une asymptote horizontale à la valeur $-90°$ lorsque $\omega \to +\infty$
- Le passage à la valeur $-45°$ lorsque $\omega = \omega_c$

• Caractéristiques de la phase

$$\varphi = -\tan^{-1}\omega T$$

$\omega \to 0 \to \log\omega \to -\infty$	$\omega \to +\infty \to \log\omega \to +\infty$
$\varphi \underset{\omega\to 0}{\sim} 0 = \varphi_0$ Asymptote horizontale nulle	$\varphi \underset{\omega\to +\infty}{\sim} -\frac{\pi}{2} = \varphi_\infty$ Asymptote horizontale à $-\frac{\pi}{2}$
Valeur en ω_c	
$\varphi(\omega_c) = -\tan^{-1}\left(\frac{1}{T}T\right) = -\tan^{-1}(1) = -\frac{\pi}{4}$	

• **Tracé du diagramme de Bode en phase**



A.II.3.b Diagramme de Nyquist

On trace $H(j\omega)$ dans le plan complexe :

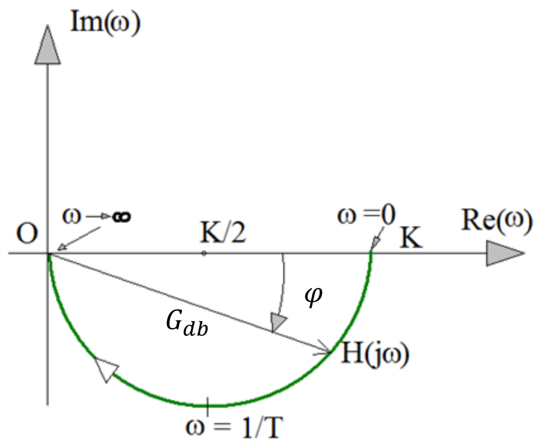
$$H(j\omega) = Re\big(H(j\omega)\big) + jIm\big(H(j\omega)\big)$$

$$H(j\omega) = \frac{K}{1+j\omega T} = \frac{K - jK\omega T}{1+\omega^2T^2}$$

$$H(j\omega) = \frac{K}{1+\omega^2T^2} - j\frac{K\omega T}{1+\omega^2T^2}$$

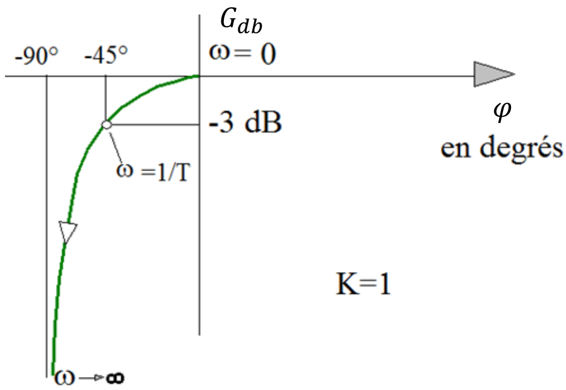
Cela correspond à un demi-cercle centré sur le point $\left(\frac{K}{2};0\right)$. Ce lieu est orienté de $\omega = 0$ à $\omega \to +\infty$

$\omega = 0$	$\omega \to +\infty$
$H(j\omega) \to K$	$H(j\omega) \to 0$



A.II.3.c Diagramme de Black

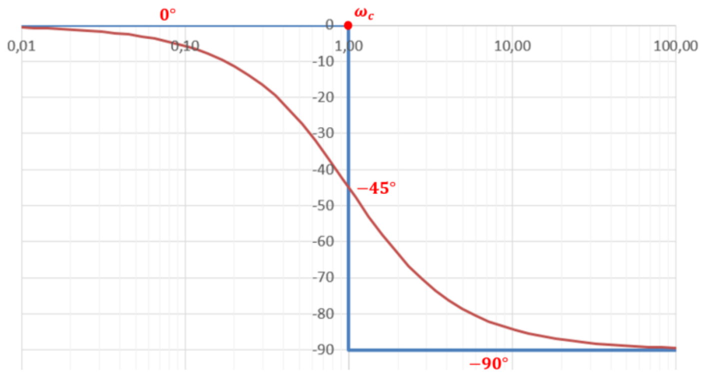
On trace une courbe paramétrée telle que φ soit en abscisse en degrés et G_{bd} soit en ordonnée



A.II.4 Utilisation du diagramme de Bode

A.II.4.a Cas général

Regardons le diagramme de Bode :



Rappelons qu'à l'entrée $e(t) = e_0 \sin \omega t\, u(t)$ correspond la sortie $s(t) = s_0 \sin(\omega t + \varphi)\, u(t)$ avec

$$\begin{cases} s_0 = |H(j\omega)| e_0 \\ \varphi = \arg H(j\omega) \end{cases}$$

φ en radians

Les tracés de Bode permettent de voir simplement et rapidement des choses très intéressantes :

- Dans toute la zone où le gain est positif, c'est-à-dire dans la bande passante à 0 db BP_0, on a $|H(j\omega)| > 1$, c'est-à-dire que la sortie est amplifiée
- Dans la zone où le gain est négatif, la sortie est atténuée

Pour un système du premier ordre, on parlera donc d'un système passe bas : à chaque entrée sinusoïdale dans le système

- si sa pulsation est inférieure à ω_{c0}, le signal est transmis et amplifié
- si sa pulsation est supérieure à ω_{c0}, le signal est filtré, atténué, « ne passe plus »

Il filtre les hautes pulsations, ou hautes fréquences.

Le diagramme de phase permet de déterminer pour chaque pulsation le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée.

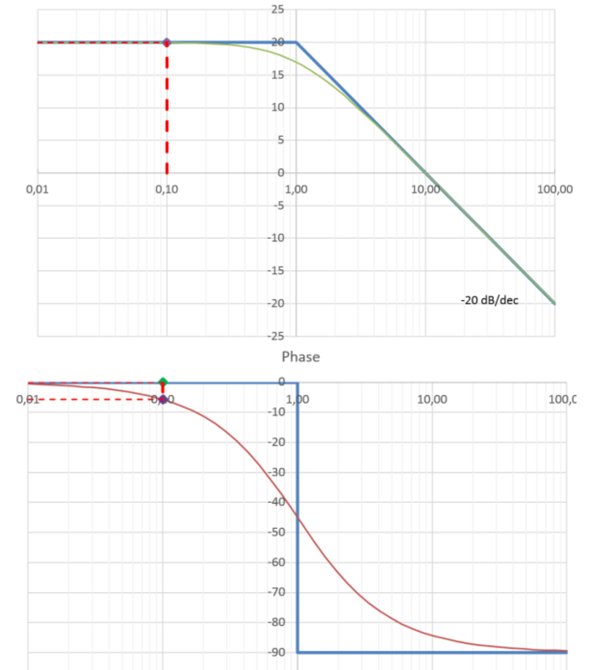
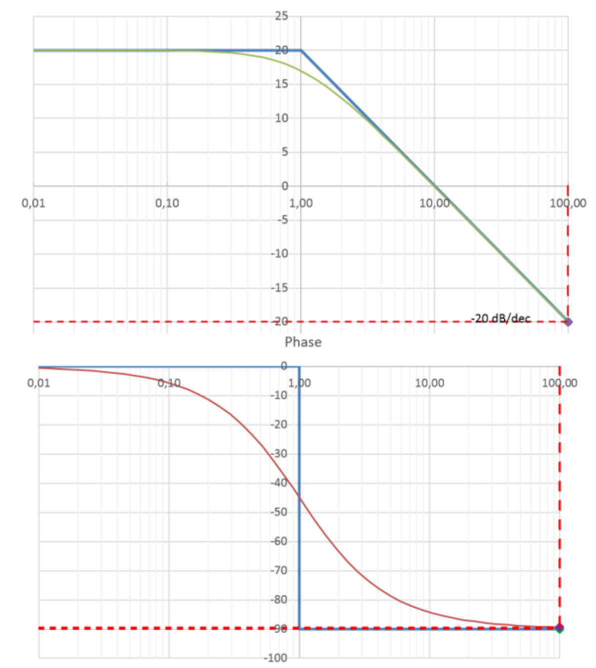
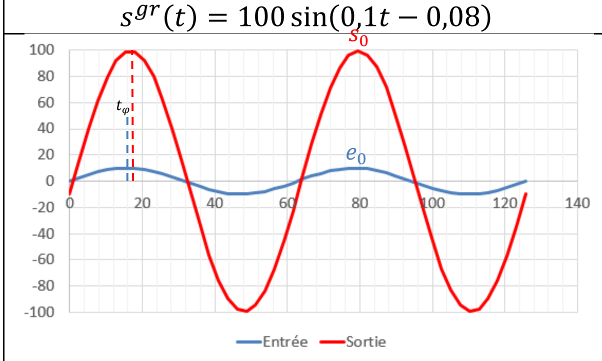
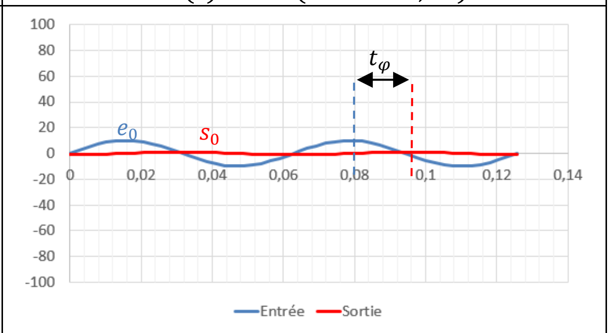
A.II.4.b Application

Préliminaires : Connaissant le gain G_{db}, on peut calculer $|H(j\omega)|$:

$$\boxed{G_{db} = 20\log|H(j\omega)| \Leftrightarrow |H(j\omega)| = 10^{\frac{G_{db}}{20}}}$$

$$\boxed{H(p) = \frac{10}{1+p}}$$

Prenons deus entrées de pulsations différentes

$e(t) = 10\sin 0{,}1t$	$e(t) = 10\sin 100t$
	
$\begin{cases} \|H(j\omega)\| \approx 10^{\frac{20}{20}} \approx 10 \\ \varphi \approx -5° \approx -0{,}08\,rd \end{cases}$ $\|t_\varphi\| = \frac{\|\varphi\|}{\omega} = \frac{0{,}08}{0{,}1} = 0{,}8\,s$	$\begin{cases} \|H(j\omega)\| \approx 10^{\frac{-20}{20}} \approx 0{,}1 \\ \varphi \approx -90° \approx -1{,}57\,rd \end{cases}$ $\|t_\varphi\| = \frac{\|\varphi\|}{\omega} = \frac{1{,}57}{100} = 0{,}0157\,s$
$s^{gr}(t) = 100\sin(0{,}1t - 0{,}08)$	$s^{gr}(t) = \sin(100t - 1{,}57)$
	
$\begin{cases} \|H(j\omega)\| = \frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} = 9{,}95 \\ \varphi = -\tan^{-1}\omega T = -0{,}1\,rd \end{cases}$ $\|t_\varphi\| = \frac{\|\varphi\|}{\omega} = \frac{0{,}1}{0{,}1} = 1\,s$	$\begin{cases} \|H(j\omega)\| = \frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} = 0{,}1 \\ \varphi = -\tan^{-1}\omega T = -1{,}56\,rd \end{cases}$ $\|t_\varphi\| = \frac{\|\varphi\|}{\omega} = \frac{1{,}56}{100} = 0{,}0156\,s$
$s(t) = 99{,}5\sin(0{,}1t - 0{,}1)$	$s(t) = \sin(100t - 1{,}56)$