A.VI. Résolution statique des mécanismes

Plaçons-nous dans le cas où toutes les liaisons usuelles vues précédemment sont parfaites, c'est-à-dire sans adhérence/frottement, et étudions des mécanismes composés de pièces supposées indéformables.

L'objet de cette partie est de déterminer les actions mécaniques dans les différentes liaisons d'un mécanisme connaissant les actions extérieures qui s'appliquent dessus (volumiques, surfaciques, linéiques ou ponctuelles).

Il existe deux grandes méthodes pour déterminer ces actions :

- Une méthode analytique (calcul)
- Une méthode graphique

A.VI.1 Résolution analytique

A.VI.1.a Graphe des liaisons et actions mécaniques

Lors de la résolution d'un problème en statique, il est conseillé d'effectuer un graphe des liaisons du mécanisme étudié et de le compléter en faisant apparaître les actions mécaniques extérieures qui s'appliquent sur ses différentes pièces.

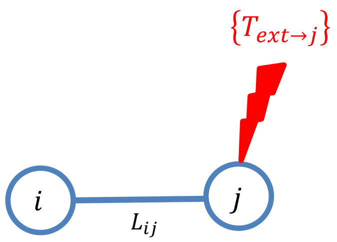
On rencontre deux types d'actions extérieures hormis les actions de liaison :

- Les actions extérieures ne s'appliquant que sur une pièce
- Les actions entre deux pièces, un moteur ou un vérin par exemple

Rappelons que l'action de la gravité s'applique sur toutes les pièces d'un mécanisme. Elle sera toutefois souvent négligée.

A.VI.1.a.i Actions extérieures sur une pièce

La gravité, une pression, un effort ou un couple résistant en sortie du mécanisme… sont des actions extérieures sur une pièce du mécanisme. On représentera ces actions sur le graphe des liaisons ainsi :



On remplacer le mot « ext » par un terme désignant facilement l'action en question.

A.VI.1.a.ii Interactions extérieures entre deux pièces

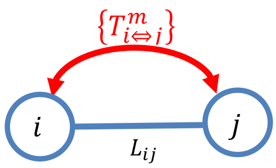
Rappelons que l'on ne parle pas ici de l'action de liaison toujours présente entre les pièces d'un mécanisme. Lorsqu'un moteur ou un vérin motorise une liaison entre deux pièces, il exerce sur chacune des pièces une action opposée.

Sachant que l'on note le torseur de l'action mécanique de liaison entre les pièces i et j $\{T_{ij}\}$ ou $\{T_{ji}\}$, on choisira un nom marquant la différence, par exemple indicé de la lettre m montrant que cette action est liée à la motorisation de la liaison :

$$\{T_{i\Leftrightarrow j}^{m}\}$$

Ce torseur ne sera utilisé que dans le graphe des liaisons pour représenter l'interaction entre les pièces concernées.

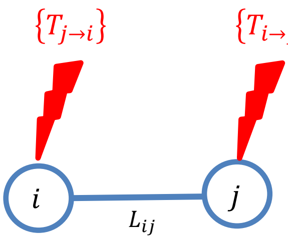
On peut donc proposer le modèle suivant dans le cas d'une interaction :



Attention, le torseur lié à cette interaction devra être noté correctement en fonction de la pièce isolée :

- Isolement de la pièce i : $\{T_{j\to i}^{m}\}$
- Isolement de la pièce j : $\{T_{i\to j}^{m}\}$

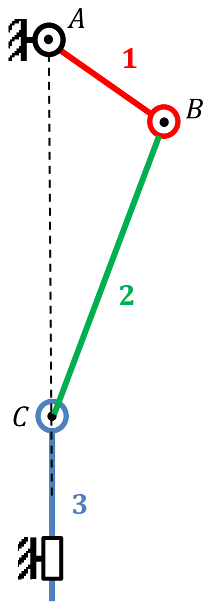
Remarque : L'interaction entre i et j peut aussi être représentée à l'aide de deux actions extérieures plutôt que l'interaction précédente :

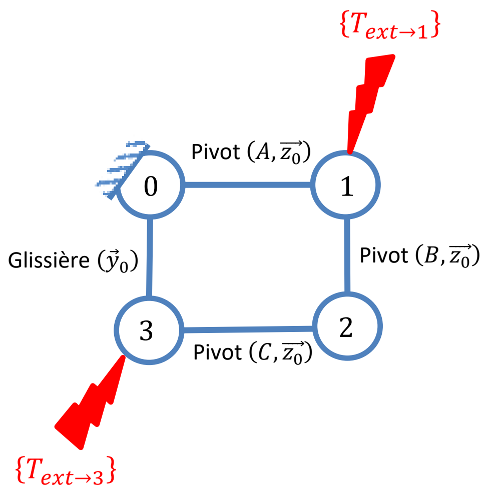


A.VI.1.b Isolement - Définition

Isoler un solide ou un ensemble de solides consiste à répertorier l'intégralité des actions mécaniques qui s'appliquent sur celui-ci, c'est-à-dire de réaliser le Bilan des Actions Mécaniques Extérieures aussi appelé BAME.

Exemple : Bielle - Manivelle

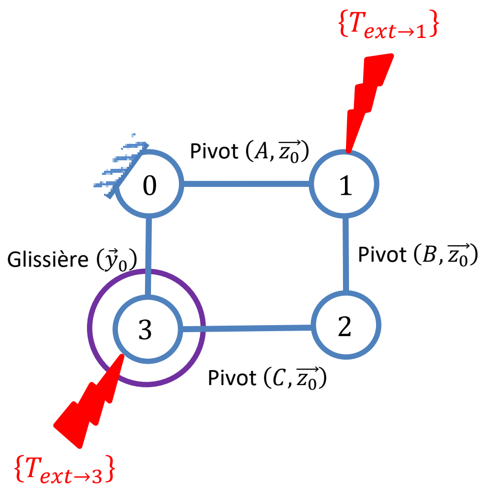




Les actions extérieures au système sont :

- Sur la pièce 3, un effort issu de la combustion du combustible créant une pression sur le piston
- Sur la pièce 1, un couple opposé au couple moteur sortant du système Bielle-Manivelle

Isoler la pièce 3 (par exemple) consiste concrètement à entourer la pièce 3 d'une ligne fermée, et d'énumérer les différentes actions qui s'exercent dessus, c'est-à-dire les intersections entre la ligne et les actions présentes :



Actions sur la pièce 3 : $\{T_{ext\rightarrow 3}\}$; $\{T_{2\rightarrow 3}\}$; $\{T_{0\rightarrow 3}\}$

A.VI.1.c Principe Fondamental de la Statique

A.VI.1.c.i Enoncé

Soit un référentiel Galiléen R_g que l'on notera aussi 0 comme base 0. Soit un solide S quelconque fixe dans la base 0 (il peut être en mouvement rectiligne uniforme, mais en statique nous supposerons qu'il est fixe). Isolons le solide S soumis à n actions extérieures dont les torseurs statiques respectifs sur le solide S s'écrivent $\{T_{i/S}\}, i = 1..n$. Ces actions sont soit des actions extérieures de chargement (volumique, surfaciques, linéiques ou ponctuelles), soit des actions de liaisons.

Le Principe Fondamental de la Statique (PFS), permet d'écrire la relation suivante pour chaque isolement :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \{T_{i/S}\} = \{0\}}$$

Appelons $\overrightarrow{R_{i/S}}$ la résultante statique de chacune des actions extérieures sur S et $\overrightarrow{M_M}(\overrightarrow{R_{i/S}})$ le moment en un point M quelconque de l'espace de chacune de ces actions. On a :

$$\sum_{i=1}^{n} \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{i/S}} \\ \overrightarrow{M_M}(\overrightarrow{R_{i/S}}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{R_{i/S}} = \vec{0} & (eq_1) \\ \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M_M}(\overrightarrow{R_{i/S}}) = \vec{0} & (eq_2) \end{cases}$$

L'équation 1 est appelée « Théorème de la Résultante Statique » TRS

L'équation 2 est appelée « Théorème du Moment Statique » TMS

Remarque : il est possible d'appliquer le PFS à un ensemble de solides E en équilibre.

A.VI.1.c.ii Résultats obtenus

L'application du PFS donne deux types de résultats :

- Les actions de liaisons (inconnues de la résolution X, Y, Z, L, M et N) en fonction des actions extérieures – On trouvera autant d'inconnues que le rang du système linéaire mis en place
- Les relations entre actions extérieures entrée/sortie associées aux degrés de mobilité du système (obtenues par les équations qui diminuent le rang du système, dans lesquelles tout sera connu) – On aura autant d'équations « inutiles » pour la détermination d'inconnues statiques, « diminuant le rang », « où tout est connu », qu'il y a de mobilités

A.VI.1.c.iii PFS et résultat attendu

Nous verrons qu'il est assez fastidieux de mener une résolution statique car elle présente souvent beaucoup d'équations.

Après avoir mis en œuvre une méthode de a à z, il faudra être capable d'identifier, selon le résultat souhaité :

- La ou les pièces à isoler
- Le théorème à utiliser (TMS, TRS)
- Le point où l'appliquer
- L'axe sur lequel le projeter

Il sera alors par exemple possible d'obtenir en quelques lignes la relation entrée/sortie en statique, où bien l'action de liaison souhaitée

A.VI.1.c.iv Démarche de résolution du système linéaire obtenu

Pour résoudre le système linéaire, il est recommandé de procéder ainsi :

- Encadrer les actions extérieures supposées connues
- Souligner en trait droit une inconnue dans l'équation dans laquelle elle a pu être déterminée
- Souligner cette même inconnue dans les autres équations avec un ligne en forme de vague (attention, si X_{ij} est connu, X_{ji} l'est aussi)

Cela permet :

- De revenir en arrière simplement en cas d'erreurs
- De mettre en évidence les éventuelles équations dans lesquelles tout est connu correspondant à des relations entre actions extérieures

Exemple :

$$\begin{cases}
\underbrace{X_{01}}_{} + \underline{X_{21}} = 0 \\
\underline{Y_{01}} + \underbrace{Y_{21}}_{} = 0 \\
-L_1 \cos\theta_{10}\, \underbrace{Y_{01}}_{} + L_1 \sin\theta_{10}\, \underline{X_{01}} + [C] = 0 \\
\underline{X_{32}} + \underbrace{X_{12}}_{} = 0 \\
\underbrace{Y_{32}}_{} + \underline{Y_{12}} = 0 \\
L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10})\, \underbrace{Y_{32}}_{} - L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10})\, \underbrace{X_{32}}_{} = 0 \\
\underbrace{X_{23}}_{} + X_{03} = 0 \\
[F] + \underline{Y_{23}} = 0 \\
\underline{N_{03}} = 0
\end{cases}$$

Le système ci-dessus montre une mobilité (équation dans laquelle tout est connu) : $L_2 \cos(\theta_{21} + \theta_{10})\, \underbrace{Y_{32}}_{} - L_2 \sin(\theta_{21} + \theta_{10})\, \underbrace{X_{32}}_{} = 0$. En remplaçant les expressions de Y_{32} et X_{32} obtenues lors de la résolution, on trouvera la relation entre F et C. Attention, selon la résolution, ce n'est pas forcément cette 6° équation qui sera celle où tout est connu, mais le résultat lui sera le même quoi qu'il arrive.

A.VI.1.c.v Théorème des actions réciproques

• **Enoncé**

Soient deux solides S_1 et S_2 en exerçant chacun une action sur l'autre, notées $\{T_{12}\}$ et $\{T_{21}\}$.

Soit des actions extérieures quelconques $\{T_{Ext\to 1}\}$ et $\{T_{Ext\to 2}\}$ que les solides 1 et 2.

Le théorème des actions réciproques (ou 3° loi de Newton) démontre que l'action d'un solide 1 sur un solide 2 est l'opposée de l'action du solide 2 sur le solide 1. On parle souvent de principe d'action/réaction.

$$\boxed{\{T_{21}\} = -\{T_{12}\}}$$

• **Démonstration**

Isolons successivement S_1, S_2 et l'ensemble $S_1 U S_2$ et appliquons le PFS à chacun de ces isolements :

S_1	$\{T_{Ext\to 1}\} + \{T_{21}\} = \{0\}$	$\{T_{Ext\to 1}\} = -\{T_{21}\}$
S_2	$\{T_{Ext\to 2}\} + \{T_{12}\} = \{0\}$	$\{T_{Ext\to 2}\} = -\{T_{12}\}$
$S_1 U S_2$	$\{T_{Ext\to 1}\} + \{T_{Ext\to 2}\} = \{0\}$	
Bilan	$\{T_{Ext\to 1}\} + \{T_{Ext\to 2}\} = \{0\}$ $-\{T_{21}\} - \{T_{12}\} = \{0\}$ $\{T_{21}\} = -\{T_{12}\}$	

A.VI.1.c.vi Théorème de superposition

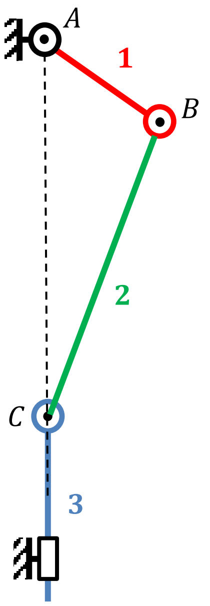
L'application du PFS conduit à l'obtention d'un système linéaire permettant de déterminer des inconnues statiques de liaisons. Si plusieurs chargements s'appliquent sur un mécanisme, on peut appliquer autant de PFS qu'il y a de chargements et sommer les solutions obtenues à chaque résolution.

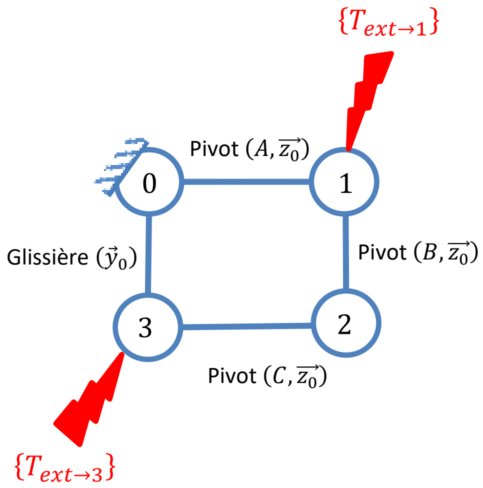
A.VI.1.d PFS et chaînes ouvertes/fermées

Voyons maintenant les stratégies d'isolement à appliquer pour résoudre les mécanismes en statique.

A.VI.1.d.i Chaînes fermées

Reprenons l'exemple du système bielle/manivelle :





Pour trouver l'action dans la liaison L_{01} par exemple

- En isolant la pièce 1, on aura besoin de l'action dans la liaison L_{21} pour trouver celle dans L_{01}
- En isolant les pièces 1+2, on aura besoin de l'action dans la liaison L_{32} pour trouver celle dans L_{01}
- En isolant les pièces 1+2+3, on aura besoin de l'action dans la liaison L_{03} pour trouver celle dans L_{01}

On voit qu'il ne sera pas possible de la trouver directement, il est en fait nécessaire de déterminer les actions dans toutes les liaisons pour avoir l'action recherchée. Pour cela, il est obligatoire d'effectuer autant d'isolements qu'il n'y a de pièces hormis le bâti.

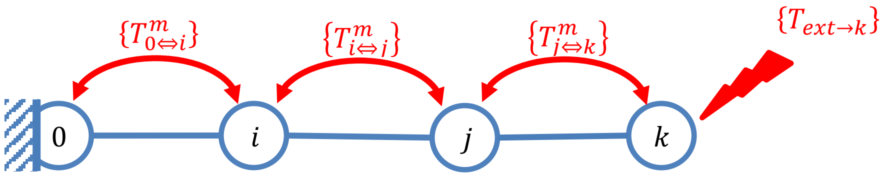
Il faut donc procéder à 3 isolements. Dans ce genre de systèmes, bien qu'il soit possible par exemple d'isoler 1, puis 1+2, puis 1+2+3, on procède souvent à l'isolement de chacune des pièces successivement.

Pièce isolée	Pièce 1	Pièce 2	Pièce 3
Actions extérieures	$\{T_{ext\to 1}\}$ $\{T_{0\to 1}\}$ $\{T_{2\to 1}\}$	$\{T_{1\to 2}\}$ $\{T_{3\to 2}\}$	$\{T_{ext\to 3}\}$ $\{T_{0\to 3}\}$ $\{T_{2\to 3}\}$

On obtiendra alors un système d'équations permettant à la fois de trouver les actions dans toutes les liaisons en fonction des actions extérieures et les relations éventuelles entre ces actions extérieures.

A.VI.1.d.ii Chaîne ouverte

Soit le système représenté par le graphe des liaisons suivant :



Connaissant l'action extérieure sur la pièce k $\{T_{ext\to k}\}$, on souhaite par exemple déterminer l'action dans la liaison L_{0i}.

Méthode 1 : On effectue les isolements successifs de chacune des pièces. Pour chacune, on a alors une relation entre l'action « à gauche » et l'action « à droite » :

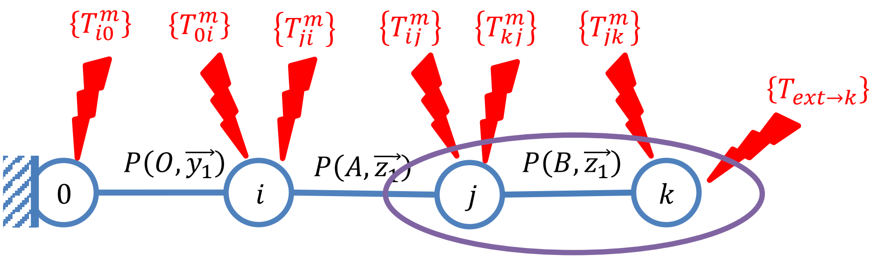
- L'isolement de la pièce k donne l'action $\{T_{jk}\}$ en fonction de $\{T_{ext\to k}\}$
- L'isolement de la pièce j donne l'action $\{T_{ij}\}$ en fonction de $\{T_{jk}\}$ et donc de $\{T_{ext\to k}\}$
- L'isolement de la pièce i donne l'action $\{T_{0i}\}$ en fonction de $\{T_{ij}\}$ et donc de $\{T_{ext\to k}\}$

Ainsi, pour obtenir l'action par exemple $\{T_{0i}\}$, il faut déterminer les actions dans les autres liaisons.

Méthode 2 : On isole un ensemble de solides. En effet, dans les systèmes en chaîne ouverte, il est intéressant d'isoler un ensemble de solides pour trouver directement les actions recherchées sans déterminer les actions dans d'autres liaisons.

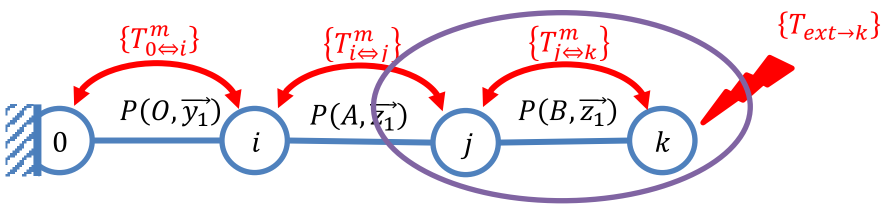
- Le seul isolement i+j+k donne l'action $\{T_{0i}\}$
- Le seul isolement j+k donne l'action $\{T_{ij}\}$
- Le seul isolement k donne l'action $\{T_{jk}\}$

Remarque : Voyons la différence de modélisation de la présence éventuelle d'interactions sur l'isolement de plusieurs solides.



Bilan des actions sur j+k

$\{T_{i\to j}\}$
$\{T^m_{ij}\}$
$\{T^m_{kj}\}+\{T^m_{jk}\}=\{0\}$!
$\{T_{ext\to k}\}$



Bilan des actions sur j+k

$\{T_{i\to j}\}$
$\{T^m_{ij}\}$
$\{T_{ext\to k}\}$

On voit bien l'avantage de représenter les interactions extérieures par des doubles flèches afin de ne pas les prendre en compte dans les isolements de plusieurs pièces lorsqu'elles font partie de l'isolement puisqu'elles s'annulent. Ce principe est le même pour une chaîne fermée mais en général, dans ce cas, l'isolement de plusieurs solides n'est pas appliqué.

A.VI.1.e Système linéaire obtenu

A.VI.1.e.i Isolements

Pour résoudre entièrement un mécanisme, ie déterminer toutes les inconnues statiques des liaisons présentes, il faut effectuer autant d'isolements qu'il y a de solides sans compter le bâti (le bâti est capable de reprendre des efforts infinis) et leur appliquer le PFS. Soit P du nombre de pièces du mécanisme, bâti compris.

Il faut effectuer $(P-1)$ isolements

L'idée la plus évidente consiste à isoler chacune des $(P-1)$ pièces du mécanisme, d'écrire les systèmes d'équations correspondant, puis de les résoudre.

En réalité, on pourra effectuer $(P-1)$ isolements contenant chacun une ou plusieurs pièces du mécanisme, l'important étant de réaliser des choix conduisant à obtenir $(P-1)$ systèmes d'équations indépendants. Ce choix n'est pas évident et nécessite un peu d'expérience.

A.VI.1.e.ii Equations – Inconnues

• Mécanismes 3D

L'application du principe fondamental de la statique au $P-1$ pièces d'un mécanisme (il ne faut pas isoler le bâti) apporte, pour chaque solide, 2 équations vectorielles, soit 6 équations scalaires.

On note :

- E_s le nombre d'équations statiques : $E_s = 6(P-1)$
- I_s le nombre d'inconnues statiques. I_s s'obtient en comptant le nombre d'inconnues statiques indépendantes des torseurs des n liaisons : $I_s = \sum_{i=1}^{n} I_s^i$, I_s^i étant le nombre d'inconnues statiques de la liaison i du mécanisme.

• Mécanismes plans

- 3 des équations de chaque isolement sont du type $0=0$. On peut donc définir le nombre d'équations en plan : $E_s^{2D} = 3(P-1)$
- La mobilité peut, mais c'est rare, diminuer (mobilité interne qui disparaît par exemple), on définit donc m^{2D}
- Contrairement à la cinématique, les nombres d'inconnues statiques des liaisons encastrement, pivot et glissière changent. Seul le nombre d'inconnues statiques de la liaison ponctuelle est inchangé

I_s	3D	2D
Encastrement	6	3
Pivot	5	2
Glissière	5	2
Ponctuelle	1	1

• Remarque importante

Attention, des actions mécaniques extérieures n'étant pas des actions de liaisons (efforts, moments d'entrée et sortie) NE DOIVENT PAS être comptées comme des inconnues statiques. Malgré le fait que l'on puisse « dire en début de sujet » que l'action mécanique d'entrée est connus et que l'on veut la relation entre l'action mécanique de sortie et l'action mécanique d'entrée, on doit supposer ces actions comme connues car extérieures. On montrera alors qu'il y a une relation entre elles, mais ce ne sont pas des actions de liaisons.

$\boxed{\text{Ne pas inclure des actions extérieures entrée/sortie dans } I_s}$

A.VI.1.e.iii Rang – Mobilité - Hyperstatisme

Le système d'équations obtenu est un système linéaire qui présente un rang noté r_s.

Le nombre d'inconnues statiques indéterminées par la résolution du système linéaire obtenu correspond au degré d'hyperstatisme h du mécanisme, c'est-à-dire au nombre d'inconnues statiques indéterminées qu'il faudrait imposer afin de déterminer les actions de liaison du mécanisme.

$$h = I_s - r_s$$

Le nombre d'équations inutiles du système statique correspond à la mobilité m du mécanisme.

$$m = E_s - r_s$$

On a :

$$\boxed{h = m + I_s - E_s}$$

Si l'on trouve un degré d'hyperstatisme négatif (on parle parfois d'hypostatisme dans certaines spécialités), c'est qu'il reste des mobilités qui n'ont pas été trouvées.

On peut définir le degré d'hyperstatisme d'un mécanisme plan en plan :

$$h^{2D} = m^{2D} + {I_s}^{2D} - {E_s}^{2D}$$

Remarque sur le lien entre 2D et 3D : En mécanismes plans (3 équations $0 = 0$), on trouvera toujours un degré d'hyperstatisme 3D supérieur ou égal à 3 : $h^{3D} = 3 + h^{2D}$, avec h^{3D} le degré d'hyperstatisme du modèle plan en 3D. Lorsque le mécanisme ne présente que des pivots et des glissières, le modèle plan est identique au modèle 3D. Mais dès qu'il y a des ponctuelles, il faut faire attention à l'interprétation de ces équations. En effet, une ponctuelle 2D présente 1 inconnue statique en plan, une ponctuelle 3D a toujours 1 inconnue statique en 3D, mais le modèle 2D d'une ponctuelle présente 4 inconnues statiques en 3D car c'est une liaison qui ne peut se déplacer hors plan. Il faut donc faire attention aux raisons qui ont poussé à proposer une ponctuelle plane dans un modèle plan car elle peut provenir d'une ponctuelle 3D comme de l'association en série (par exemple) d'une glissière et d'une pivot. On voit que le modèle 3D associé à ces 2 solutions n'est pas le même et parler de h^{3D} peut porter à confusion, parle-t-on du degré d'hyperstatisme du modèle plan mis en 3D, ou du modèle 3D réel dont la modélisation plane a induit une réduction des liaisons. La formule $h^{3D} = 3 + h^{2D}$ est donc toujours juste lorsqu'un mécanisme est réalisé en 2D et en 3D uniquement des pivots et glissières, et soumis à interprétation lorsqu'il y a des ponctuelles en plus dans le modèle 2D.

A.VI.1.e.iv Solvabilité statique d'un mécanisme

Concrètement, un mécanisme isostatique $(h = 0)$ sera entièrement résolu en statique alors qu'un mécanisme hyperstatique $(h > 0)$ ne permettra pas de déterminer toutes les inconnues de liaisons.

$h = 0$ ➡ Mécanismes statiquement solvable

$h > 0$ ➡ Mécanismes statiquement NON solvable

A.VI.1.f Définition des torseurs au départ

En statique, il y aura presque toujours plusieurs solides à étudier. Et ces solides seront quasiment toujours en interaction les uns avec les autres. Prenons pour l'exemple deux solides i et j.

La résolution statique du problème nous conduira à réaliser un premier isolement, prenons i.

Parmi les actions mécaniques extérieures sur i, on trouvera le torseur $\{T_{j/i}\}$. On va alors probablement le définir en un point et dans une base arrangeants pour traiter ce premier isolement.

Ensuite, il faudra isoler j, et on devra à nouveau utiliser le torseur $\{T_{i/j}\} = -\{T_{j/i}\}$. Et c'est ici qu'il y a un gros risque d'erreurs. Souvent, on oublie que ce torseur a déjà été utilisé et on se permet alors de le redéfinir en un point et dans une base qui pourraient être différents des choix faits pour l'isolement de i, ce qui est une erreur. Attention, il faut reprendre le torseur qui a été défini lors du premier isolement, et le changer de point et de base si nécessaire.

Une solution intéressante pour éviter cette erreur consiste à créer un tableau avant d'isoler chacune des pièces du mécanisme, dans lequel on écrit chacun des torseurs des liaisons du système sans forcément choisir de point et de base. Puis, lors de la réalisation de chaque isolement, on vient piocher les torseurs dans ce tableau, en les complétant alors avec les choix effectués si ce n'est déjà fait.

A.VI.1.g Mise en œuvre pour chaque isolement

On écrit le PFS pour chaque isolement :

$$\{T_{1/S}\} + \{T_{2/S}\} + \cdots + \{T_{n/S}\} = \{0\}$$

On écrit les différents torseurs des liaisons en leurs points caractéristiques :

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{1/S}} \\ \overrightarrow{M_A}(\overrightarrow{R_{1/S}}) \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{2/S}} \\ \overrightarrow{M_B}(\overrightarrow{R_{2/S}}) \end{Bmatrix}_B + \cdots + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{n/S}} \\ \overrightarrow{M_C}(\overrightarrow{R_{n/S}}) \end{Bmatrix}_C = \{0\}$$

Remarque : on pourra définir ces torseurs en notation verticale car c'est une notation simple à retenir, mais nous passerons tout de suite après à une notation vectorielle lors de l'expression de ceux-ci au même point.

On déplace alors tous les torseurs au même point en utilisant la formule de Varignon :

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{1/S}} \\ \overrightarrow{M_M}(\overrightarrow{R_{1/S}}) \end{Bmatrix}_M + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{2/S}} \\ \overrightarrow{M_M}(\overrightarrow{R_{2/S}}) \end{Bmatrix}_M + \cdots + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{n/S}} \\ \overrightarrow{M_M}(\overrightarrow{R_{n/S}}) \end{Bmatrix}_M = \{0\}$$

On obtient alors 2 équations vectorielles :

$$\begin{cases} \overrightarrow{R_{1/S}} + \overrightarrow{R_{2/S}} + \cdots + \overrightarrow{R_{n/S}} = \vec{0} & (\overrightarrow{Eq1} = \vec{0}) \\ \overrightarrow{M_M}(\overrightarrow{R_{1/S}}) + \overrightarrow{M_M}(\overrightarrow{R_{2/S}}) + \cdots + \overrightarrow{M_M}(\overrightarrow{R_{n/S}}) = \vec{0} & (\overrightarrow{Eq2} = \vec{0}) \end{cases}$$

Il reste alors à obtenir 6 équations scalaires en projection dans une ou deux bases $\mathfrak{B}_m(\overrightarrow{x_m}, \overrightarrow{y_m}, \overrightarrow{z_m})$ $\mathfrak{B}_n(\overrightarrow{x_n}, \overrightarrow{y_n}, \overrightarrow{z_n})$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{Eq1}.\overrightarrow{x_m} = 0 \\ \overrightarrow{Eq1}.\overrightarrow{y_m} = 0 \\ \overrightarrow{Eq1}.\overrightarrow{z_m} = 0 \\ \overrightarrow{Eq2}.\overrightarrow{x_n} = 0 \\ \overrightarrow{Eq2}.\overrightarrow{y_n} = 0 \\ \overrightarrow{Eq2}.\overrightarrow{z_n} = 0 \end{cases}$$

Remarques :

- On prend généralement les même bases ($\mathfrak{B}_m = \mathfrak{B}_n$), mais ce n'est pas une obligation

- Il est obligatoire de projeter un MÊME vecteur sur LES TROIS vecteurs de la MÊME base afin de résoudre complètement un problème (relation d'équivalence)

- il peut être possible, en projetant une équation sur un seul vecteur, puis sur un seul autre, pas forcément orthogonal au premier, d'obtenir des relations recherchées, puisqu'elles sont vraies quelle que soit la projection, suffisantes pour résoudre le problème. Toutefois, il n'y aura alors pas obligatoirement équivalence entre le système d'équation et la solution obtenue. On ne recherche pas forcément toutes les solutions !

- Le programme insiste sur le fait que vous devez être en mesure de choisir les théorèmes et projections suffisantes afin de déterminer les relations recherchées. Il n'est donc pas forcément obligatoire d'obtenir 6 équations par isolement ! Toutefois, les obtenir conduit forcément au résultat

- En mécanismes plans dont les rotations sont portées par le même vecteur $\vec{z}$, on aura uniquement 3 équations scalaires en projection dans une base $\mathfrak{B}_m(\overrightarrow{x_m}, \overrightarrow{y_m}, \overrightarrow{z_m})$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{Eq1}.\overrightarrow{x_m} = 0 \\ \overrightarrow{Eq1}.\overrightarrow{y_m} = 0 \\ \overrightarrow{Eq2}.\overrightarrow{z_m} = 0 \end{cases}$$

A.VI.1.h Choix de points et bases

Lors de la mise en œuvre du PFS, on doit choisir

- un point où exprimer tous les torseurs afin de les sommer
- une base afin de projeter les deux équations vectorielles et obtenir 6 équations scalaires

Ce choix doit être fait pour chaque solide, mais ne doit pas forcément être le même pour chacun.

L'objectif peut être double :

- simplifier au plus les calculs afin d'obtenir des équations les plus simples possible
- obtenir la relation voulue au plus vite

A.VI.1.h.i Préliminaires – Choix initiaux

Nous ne détaillerons pas à nouveau ici ce que nous avons vu en cinématique, mais rappelons la conclusion :

Bien qu'il y ait plusieurs choix de bases et de points possibles pour la définition d'un torseur, il faut

- regarder ce qui est demandé dans l'exercice
- effectuer un choix car les composantes sont alors définies pour le point et la base choisis (ne jamais laisser $\forall P$ par exemple)
- avoir conscience que de ces choix dépendent les valeurs numériques finales
    - des composantes de moment pour les différents choix de points
    - de composantes de résultante et de moment pour les choix des bases

Par ailleurs, lorsqu'il y a plusieurs pièces à isoler, étudier le problème de chaque solide afin d'effectuer un choix, et définir les torseurs statiques des liaisons avant d'effectuer les isolements, et les utiliser pour chaque isolement

A.VI.1.h.ii Choix du point

Comme on l'a vu en cinématique, on choisira en général un point où, parmi tous les torseurs statiques à sommer, il y a le plus de composantes en résultante. Ce choix permettra de simplifier l'équation vectorielle de moment. Cela n'est pas nécessaire dans le cas particulier où un des torseurs présente une résultante de plus que les autres et si le changement de point doit se faire dans la direction de cette résultante, car le produit vectoriel de la formule de Varignon n'induira pas de nouveaux termes.

Remarque : Lorsque l'on choisit un point, on peut faire disparaître des équations en moment une résultante mécanique qui s'applique en ce point. Même si cette résultante est toujours bien présente dans les équations en résultante (on pourra la faire intervenir dans les résultats), la résolution des équations en moment ne la fera pas apparaitre. Or, si l'on souhaite des résultats en fonction de cette action, où même si on cherche cette action, il peut être plus simple et rapide de l'avoir aussi dans les équations en moment. Le choix du point va donc pouvoir influencer la résolution. Mais les résultats finaux seront eux, bien entendu, indifférents.

A.VI.1.h.iii Choix de la base

D'une manière générale, la base sera choisie afin d'obtenir les équations les plus simples possible. Ainsi, on projettera dans la base dans laquelle interviennent le plus de termes.

Exemple : soit l'équation vectorielle suivante obtenue dans un mécanisme plan :

$$a\overrightarrow{x_1} + b\overrightarrow{y_1} + c\overrightarrow{x_2} = \vec{0}$$

Attention, si deux termes sont en $\overrightarrow{x_2}$ par exemple, ils ne comptent que pour un seul terme après factorisation…

Le choix de la base 1 fait apparaître deux projections de $\overrightarrow{x_2}$:

$$\begin{cases} a + c\cos\theta_{21} = 0 \\ b + c\sin\theta_{21} = 0 \end{cases}$$

Le choix de la base 2 fait apparaître 4 projections de $\overrightarrow{x_1}$ et $\overrightarrow{y_1}$:

$$\begin{cases} a\cos\theta_{12} - b\sin\theta_{12} + c = 0 \\ a\sin\theta_{12} + b\cos\theta_{12} = 0 \end{cases}$$

On choisira donc la base 1.

Il est parfois possible, en choisissant bien la base, d'obtenir immédiatement la relation entrée sortie lorsque c'est le seul résultat voulu.

A.VI.1.i Résolution

Après avoir écrit les 6 équations scalaires par isolement (3 en mécanismes plans), on regroupe l'ensemble des équations et on résout le système.

A.VI.2 Statique graphique

A rédiger