A.IV. Modélisation des mécanismes

La modélisation d'un mécanisme consiste à passer d'un mécanisme réel ou de sa représentation réelle (plan, schéma…) à un schéma cinématique dans lequel est représentée

- chaque classe d'équivalence par un ou plusieurs traits
- chaque liaison entre pièce par une liaison normalisée

A partir d'un mécanisme réel, il faut donc:

- Identifier les différentes classes d'équivalence
- Identifier les liaisons entre ces classes d'équivalence
- Modéliser le mécanisme à l'aide d'un schéma cinématique

A.IV.1 Classes d'équivalence

Une classe d'équivalence est un ensemble de pièces cinématiquement équivalentes, c'est à dire qui peuvent être représentées toutes ensemble par une seule et même « pièce équivalente » appelée « classe d'équivalence ».

- Toutes les pièces ne présentant aucun mouvement relatif (un encastrement les lie) seront dans la même classe d'équivalence
- Des pièces additionnelles n'intervenant pas dans la cinématique du système mais permettant, par exemple, de réduire des frottements dans une liaison, pourront être associées à l'une ou l'autre des classes d'équivalence associées à la liaison concernée
- Certaines pièces pourront même n'être incluses dans aucune classe d'équivalence

On fait souvent une confusion entre le mot « pièce » et le terme « Classe d'équivalence ».

A.IV.2 Liaisons normalisées

Les liaisons normalisées découlent des contacts entre les différentes classes d'équivalence. Les différents types de contacts réalisés sont :

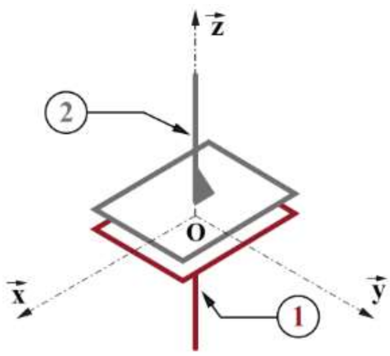
- plan sur plan
- cylindre sur plan ou sur cylindre
- sphère (au niveau local) sur surface quelconque

L'identification des surfaces en contact entre les classes d'équivalence doit conduire à la détermination des degrés de liberté (DDL), c'est-à-dire les mouvements possibles entre les deux pièces suivant 3 directions de l'espace en translation et 3 directions de l'espace en rotation.

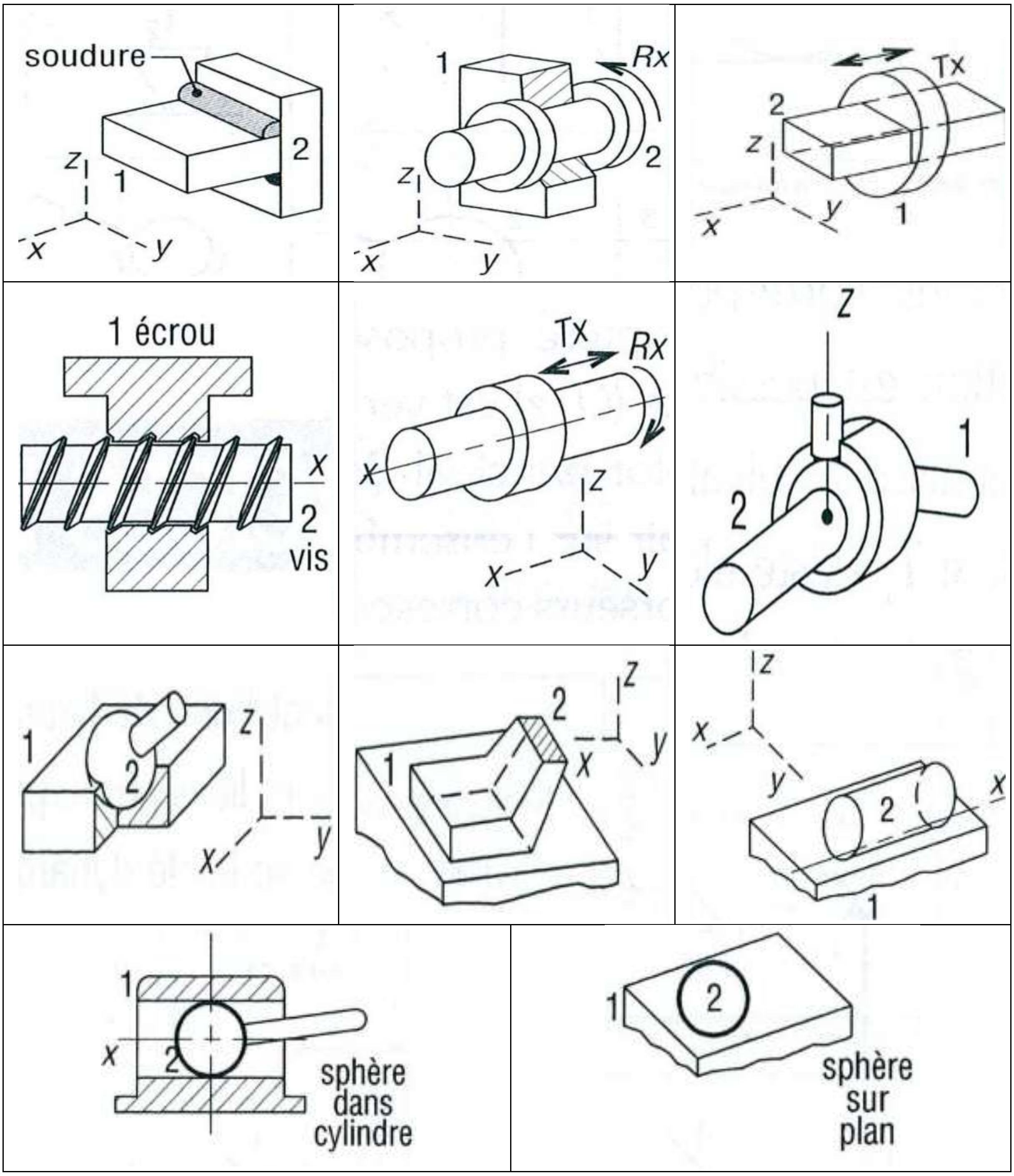
Attention, bien qu'un mouvement dans une liaison puisse être impossible du fait de contraintes dans un mécanisme complet, l'étude des liaisons doit être menée localement en considérant les surfaces en contact entre les pièces étudiées et la liaison proposée doit rendre compte des mouvements possible indépendamment du reste du mécanisme.

A partir de cette analyse, on propose alors un modèle de la liaison parmi les liaisons normalisées. Ce modèle représente le réel. Les hypothèses qui lui sont associées sont les suivantes :

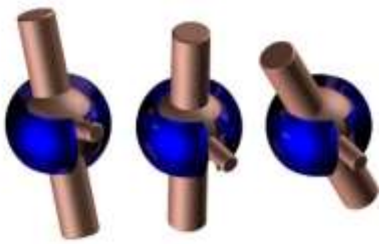
- Pas de jeu dans les liaisons
- Contacts supposés maintenus, même si le modèle est unilatéral. Exemple : un appui plan modélisé comme suit pourrait en théorie se décoller suivant $+\vec{z}$ mais on considérera que c'est impossible – Si le décollement a lieu dans la réalité, on fera 2 schémas cinématiques, l'un lorsqu'il y a contact, l'autre lorsqu'il n'y est pas, et dans lequel on ne représentera alors pas la liaison



A.IV.2.a Liaisons réelles

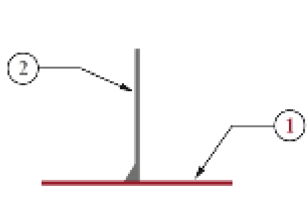
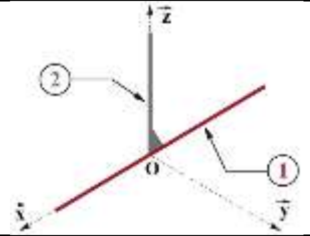
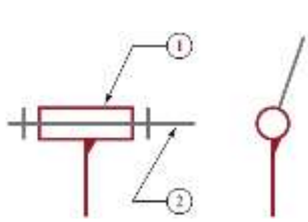
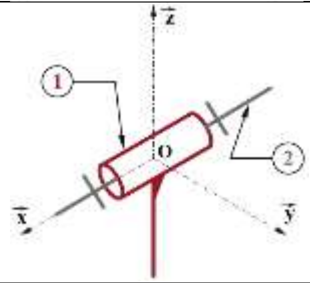
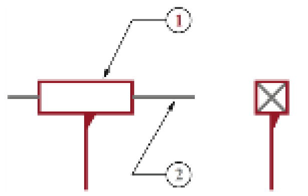
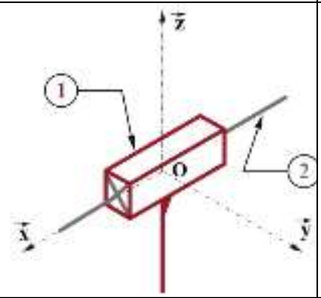
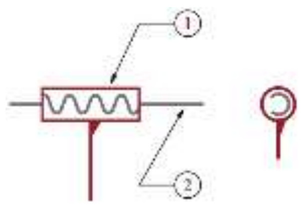
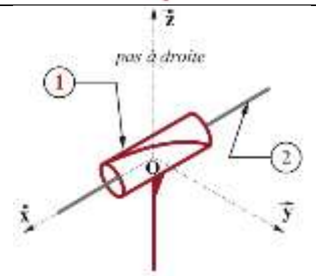
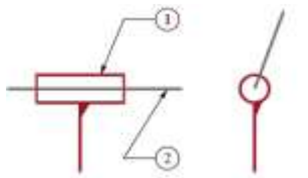
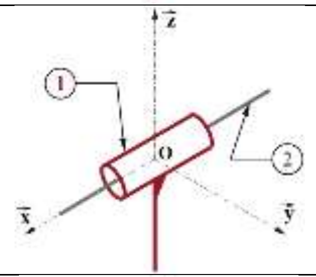
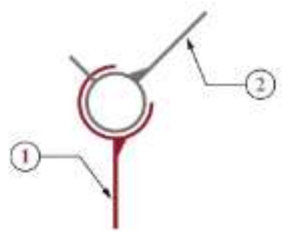
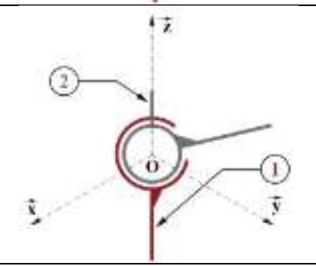


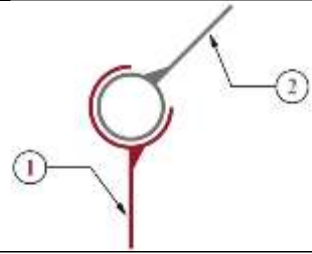
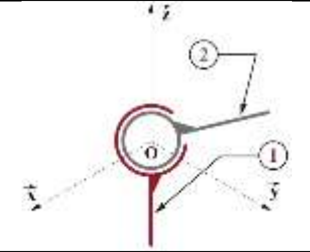
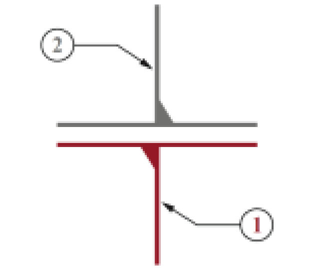
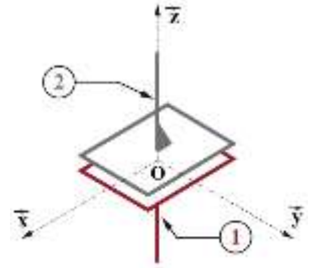
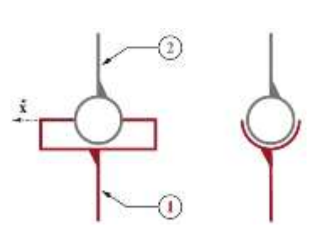
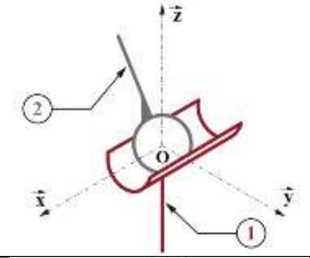
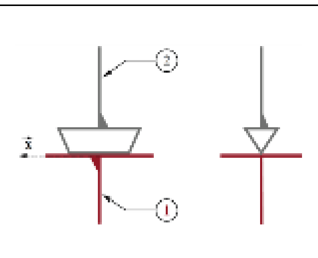
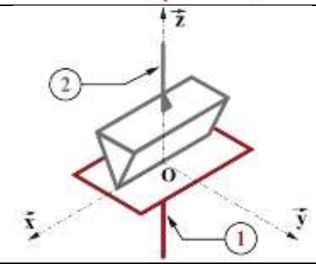
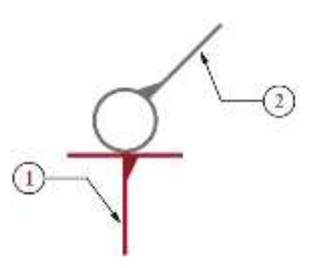
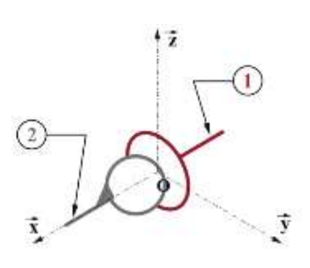
Exemple de doigt



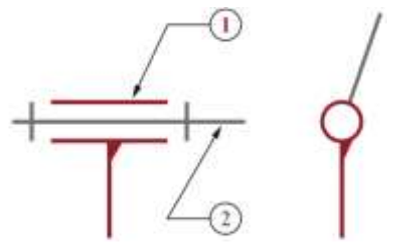
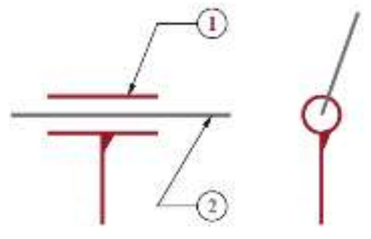
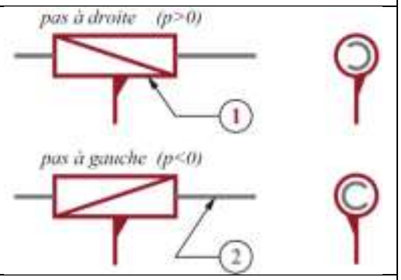
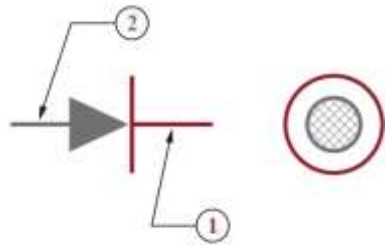
A.IV.2.b Liaisons usuelles

A.IV.2.b.i Liaisons en 3D

Liaison	Elem Géom	2D	3D	$\{\mathcal{V}_{2/1}\}$ Forme canonique	Validité	$\mathfrak{B}$	I_c
Encastrement E	RAS			$\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_P^{\mathfrak{B}}$	$\forall P$	— — —	0
Pivot P	$(O,\vec{x})$			$\left\{\begin{matrix} P_{2/1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_P^{\mathfrak{B}}$	$(O,\vec{x})$	$\vec{x}$ — —	1
Glissière Gl	$\vec{x}$			$\left\{\begin{matrix} 0 & U_{2/1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_P^{\mathfrak{B}}$	$\forall P$	$\vec{x}$ — —	1
Hélicoïdale He	$(O,\vec{x})$			$\left\{\begin{matrix} P_{2/1} & U_{2/1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_P^{\mathfrak{B}}$ $U_{2/1} = \frac{pas}{2\pi} P_{2/1}$	$(O,\vec{x})$	$\vec{x}$ — —	1
Pivot Glissant PG	$(O,\vec{x})$			$\left\{\begin{matrix} P_{2/1} & U_{2/1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_P^{\mathfrak{B}}$	$(O,\vec{x})$	$\vec{x}$ — —	2
Rotule à doigt Sphérique à doigt	O Rainure $(O,\vec{x},\vec{z})$ Doigt $\vec{z}$			$\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ Q_{2/1} & 0 \\ R_{2/1} & 0 \end{matrix}\right\}_P^{\mathfrak{B}}$ $Ref\ \mathfrak{B}_1\ \&\ \mathfrak{B}_2$	O	$\vec{x}$ $\vec{y}$ $\vec{z}$	2

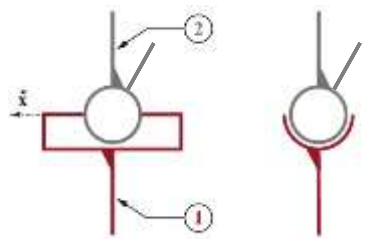
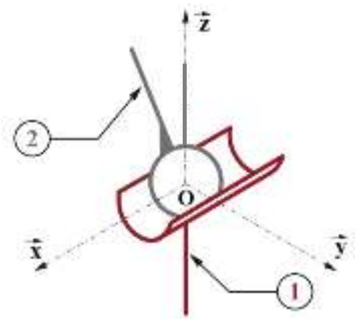
Rotule R Sphérique S	O			$\begin{Bmatrix} P_{2/1} & 0 \\ Q_{2/1} & 0 \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$	O	— — —	3
Appui plan AP	$\vec{z}$			$\begin{Bmatrix} 0 & \boldsymbol{U_{2/1}} \\ 0 & \boldsymbol{V_{2/1}} \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$	$\forall P$	— — $\vec{z}$	3
Linéaire annulaire LA Sphère cylindre SC	$(O,\vec{x})$			$\begin{Bmatrix} P_{2/1} & U_{2/1} \\ Q_{2/1} & 0 \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ $Ref\ \mathfrak{B}_1$	O	$\vec{x}$ — —	4
Linéaire rectiligne LR Cylindre Plan CP	$\{(O,\vec{x}),\vec{z}\}$			$\begin{Bmatrix} P_{2/1} & \boldsymbol{U_{2/1}} \\ 0 & \boldsymbol{V_{2/1}} \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ $Ref\ \mathfrak{B}_1\ \&\ \mathfrak{B}_2$	$(O,\vec{x},\vec{z})$	$\vec{x}$ $\vec{y}$ $\vec{z}$	4
Ponctuelle Pct Sphère-plan SP	$(O,\vec{x})$			$\begin{Bmatrix} P_{2/1} & 0 \\ Q_{2/1} & \boldsymbol{V_{2/1}} \\ R_{2/1} & \boldsymbol{W_{2/1}} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ $Ref\ \mathfrak{B}_1$	$(O,\vec{x})$	$\vec{x}$ — —	5

Ancienne norme

Pivot	Pivot Glissant	Hélicoïdale
		
Ponctuelle		
		

Liaison non usuelle parfois rencontrée

Ex : 2 arbres – Cannelures sur faible longueur /Disques d'embrayages ou freins

Linéaire annulaire à doigt Doigt suivant $\vec{z}$ Rainure dans (O, $\vec{x}$, $\vec{z}$) RAS			$\left\{\begin{matrix} 0 & U_{2/1} \\ Q_{2/1} & 0 \\ R_{2/1} & 0 \end{matrix}\right\}_0^{\mathfrak{B}}$ $\mathfrak{B} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$	3

A.IV.2.b.ii Liaisons en 2D

En mécanismes plans, les mouvements des pièces ont lieu dans un seul plan, par exemple le plan $(O,\vec{x},\vec{y})$.

Dans ce cas, les seuls mouvements possibles sont:

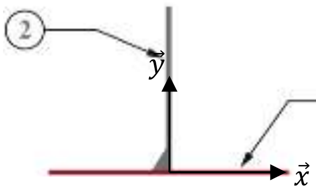
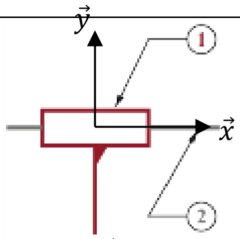
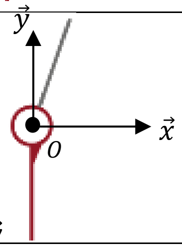
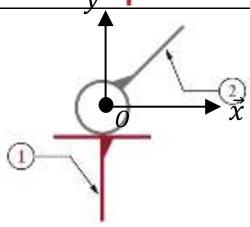
- Les translations dans le plan suivant $\vec{x}\ et\ \vec{y}$

- La rotation autour de $\vec{z}$

Dans les torseurs cinématiques des liaisons, les trois termes $P_{2/1}$, $Q_{2/1}$ et $W_{2/1}$ sont donc nuls. Il ne reste que 3 inconnues maximum par liaison.

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{0} & U_{2/1} \\ \mathbf{0} & V_{2/1} \\ R_{2/1} & \mathbf{0} \end{Bmatrix}_M^{\mathfrak{B}_0}$$

Les seules liaisons permettant de représenter des mouvements plans sont les liaisons suivantes, en tenant compte des axes $\vec{x}$ et $\vec{y}$ du plan:

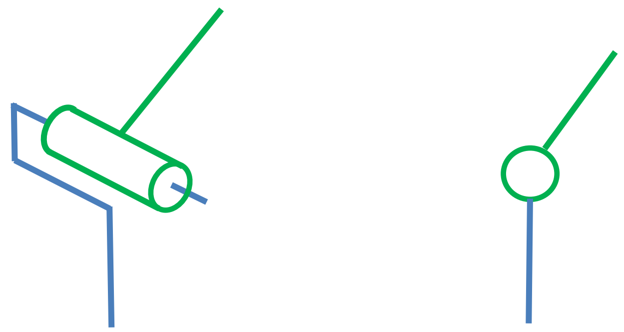
Encastrement	 	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}_0}$	$\forall P$	$I_c^{2D} = 0$
Glissière $\vec{x}$	 	$\begin{Bmatrix} 0 & U_{2/1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}_0}$	$\forall P$	$I_c^{2D} = 1$
Pivot $(O,\vec{z})$	 	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}_0}$	$(O,\vec{z})$	$I_c^{2D} = 1$
Ponctuelle $(0,\vec{y})$	 	$\begin{Bmatrix} 0 & U_{2/1} \\ 0 & 0 \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}_0}$	$(O,\vec{y})$	$\boldsymbol{I_c^{2D} = 2}$

Toute autre liaison se rapportera, dans le plan, à l'une de celles-ci.

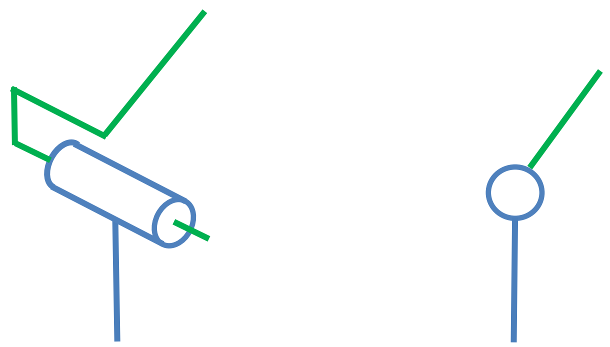
A.IV.2.b.iii Remarques

• Représentation

La représentation d'une liaison se fait toujours par l'association de deux éléments géométriques qui vont ensemble afin de la représenter :



Ces deux éléments peuvent être indépendamment associés à l'une pièce ou l'autre des deux pièces :



• Forme canonique d'un torseur

La forme canonique d'un torseur correspond à « sa forme lorsqu'il a le plus de 0 » :

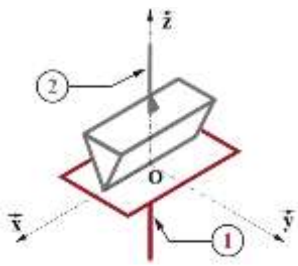
- Son moment doit donc être minimum (lieu géométrique associé)
- La base doit être bien choisie (résultante et moment les plus simples)

Lorsque l'on a la forme canonique d'un torseur

- son lieu de validité correspond au lieu de l'espace où, si ce torseur y est exprimé, la vitesse ne change pas de forme, c'est-à-dire concrètement que les 0 de la colonne de droite de la forme canonique du torseur restent des 0.
- Ses bases de validité sont des bases dans lesquelles les composantes du torseur sont exprimées selon le moins de vecteurs possibles

Pour retrouver le lieu de validité d'un torseur, après avoir posé son torseur cinématique en un point de son lieu de validité (a priori, on se souvient au moins d'un point, souvent sur « le centre » de la liaison) il suffit de déplacer ce torseur en un point quelconque de l'espace et de déterminer les conditions pour lesquelles la forme canonique ne change pas, c'est-à-dire les zéros restent des zéros.

Exemple :



$$\begin{Bmatrix} P_{2/1} & \boldsymbol{U_{2/1}} \\ 0 & \boldsymbol{V_{2/1}} \\ R_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}}$$

Soit un point P quelconque de l'espace : $\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}}$

$$\vec{V}(P,2/1) = \vec{V}(O,2/1) + \overrightarrow{PO} \wedge \overrightarrow{\Omega_{21}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{U_{2/1}} \\ \boldsymbol{V_{2/1}} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} + \begin{bmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} \wedge \begin{bmatrix} P_{2/1} \\ 0 \\ R_{2/1} \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{U_{2/1}} \\ \boldsymbol{V_{2/1}} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}} + \begin{bmatrix} -yR_{2/1} \\ -xR_{2/1} + zP_{2/1} \\ yP_{2/1} \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}}$$

$$\vec{V}(P,2/1) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{U_{2/1}} - yR_{2/1} \\ \boldsymbol{V_{2/1}} - xR_{2/1} + zP_{2/1} \\ yP_{2/1} \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}}$$

On a donc :

$$\begin{Bmatrix} P_{2/1} & \boldsymbol{U_{2/1}} - yR_{2/1} \\ 0 & \boldsymbol{V_{2/1}} - xR_{2/1} + zP_{2/1} \\ R_{2/1} & yP_{2/1} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$$

Pour que les zéros restent des zéros, le terme $yP_{2/1}$ soit nul, soit :

$$y = 0$$

Le lieu géométrique de validité du torseur de la liaison linéaire rectiligne est donc le plan $(O, \vec{x}, \vec{z})$.

Remarque : selon le choix du point effectué, on remarque que les composantes de vitesse suivant x et y changent, c'est pourquoi dans le tableau des liaisons, elles sont inscrites en rouge et en gras, ce qui est vrai pour quelques autres liaisons.

- **Aide mémoire**

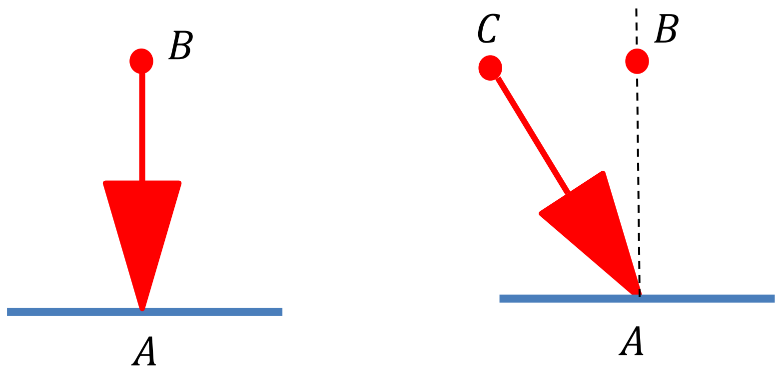
Elément géométrique	1 point O	1 direction $\vec{x}$	1 axe $(O, \vec{x})$	Une normale (droite ou plan)
Liaisons concernées	Rotule Rotule à doigt	Glissière Appui Plan	Pivot Pivot Glissant Hélicoïdale *Sphère cylindre*	Linéaire rectiligne (Droite+Direction) Ponctuelle (Droite)

Lieux de validité	O	$\forall P$	$\forall P \in (O, \vec{x})$	Une normale (droite ou plan)
Liaisons concernées	Rotule Rotule à doigt *Sphère Cylindre*	Glissière Appui Plan	Pivot Pivot Glissant Hélicoïdale	Linéaire rectiligne (Plan) Ponctuelle (Droite)

- **Normale au contact**

Attention, pour les liaisons ponctuelle et linéaire rectiligne, le lieu de définition du torseur associé est respectivement la normale au contact et le plan normal au contact.

Prenons le cas de la linéaire rectiligne, une erreur est souvent commise :



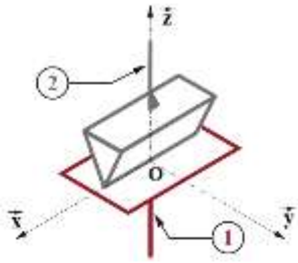
Le torseur de cette liaison peut être défini sous sa forme canonique indépendamment en tout point du plan normal. Attention, c'est vrai en A et B, mais ça ne l'est pas en C. Si les points de la normale n'y restent pas au cours du mouvement, on choisira le point de contact A.

• **Débattement des liaisons et collisions**

Un modèle cinématique ne tient pas compte des collisions entre les différentes pièces et des débattements. Les translations sont supposées pouvoir être infinies et les angles aller de 0 à 360 °.

• **Dépendance des torseurs canoniques à une ou 2 bases**

A plusieurs reprise est écrit dans le tableau des liaisons $Ref\ \mathfrak{B}_1\ \&\ \mathfrak{B}_2$ ou $Ref\ \mathfrak{B}_1$ ou $Ref\ \mathfrak{B}_2$. C'est un détail qui peut avoir son importance. Prenons l'exemple de la linéaire rectiligne :



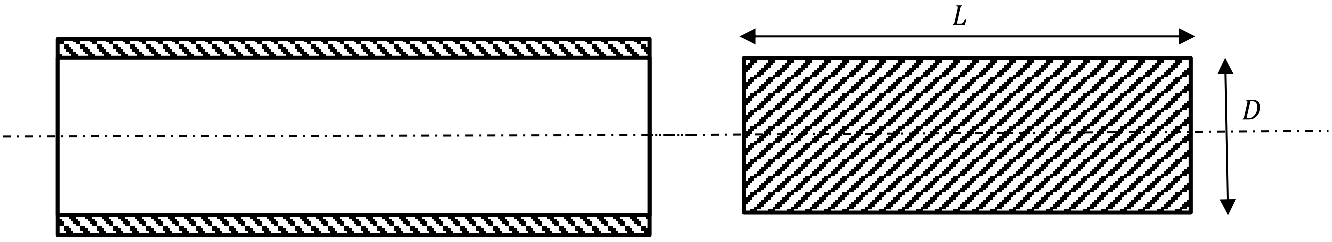
Son torseur garde sa forme canonique dans une base qui contient la ligne de contact qui dans le cas présent serait $\overrightarrow{x_2}$ et qui contient la normale au contact, c'est a dire $\overrightarrow{z_1}$. Dans un mécanisme où $\forall t, \overrightarrow{z_2} = \overrightarrow{z_1}$, on définira le torseur 2/1 dans la base 2, mais dans un mécanisme où les deux vecteurs $\overrightarrow{z_1}$et $\overrightarrow{x_2}$ évoluent, que faire ?

Heureusement, vous rencontrerez très probablement pas ce cas, mais il est bien d'en être consient.

C'en est de même pour quelques autres liaisons, citons par exemple la rotule à doigt dont le torseur dépend de la position de la rainure dans $\mathfrak{B}_1$ ET de l'orientation du doigt dans $\mathfrak{B}_2$.

• **Liaison Cylindre/Cylindre**

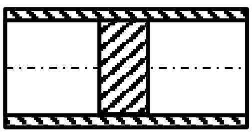
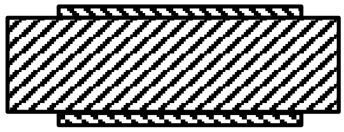
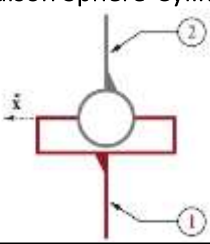
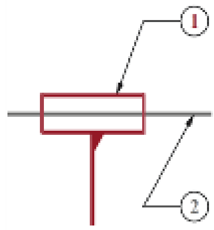
La liaison cylindre/cylindre est une liaison particulière qui peut être modélisée de deux façons différentes selon un rapport de longueurs.



La présence d'un jeu permettant le montage des deux pièces induit la présence d'un léger rotulage dont la valeur dépend du rapport $\frac{L}{D}$, L étant la longueur de guidage et D le diamètre du cylindre de guidage, supposé égal dans les deux pièces. En effet, plus la longueur est grande et plus le diamètre est petit, plus cet angle est petit :

L longueur de la surface en contact entre les deux cylindres

L diamètre de cette surface

Centrage court	Cas indécis	Centrage long
$\frac{L}{D} < 0,8$	$0,8 < \frac{L}{D} < 1,5$	$\frac{L}{D} > 1,5$
	---	
Liaison Sphère-Cylindre 	---	Liaison Pivot Glissante 

A.IV.3 Modélisation

La modélisation des mécanismes doit conduire à obtenir un schéma cinématique paramétré afin de déterminer des relations entre les mouvements. Il conviendra de ne pas représenter les mécanismes dans des positions particulières qui ne permettraient pas de faire apparaître certaines données (2 pièces alignées induisant un angle nul etc).

A.IV.3.a Méthode

Pour modéliser un mécanisme, après avoir identifié les classes d'équivalence et les liaisons entre elles, on procède dans l'ordre suivant :

- Dessiner un repère
- Placer les éléments géométriques des liaisons entre les classes d'équivalence
- Dessiner les liaisons normalisées
- Dessiner les classes d'équivalence

A.IV.3.b Modélisation des classes d'équivalence

Les classes d'équivalence sont représentées à l'aide d'un trait ou d'un ensemble de traits reliés entre eux.

Cas particulier du bâti : Dans le cas d'un bâti, il est possible de ne pas représenter la classe d'équivalence d'un seul tenant. Dans ce cas, chaque portion du bâti devra contenir le symbole de fixation associé.

Les traits doivent être liés aux lieux géométriques des liaisons entre la classe d'équivalence étudiée et les autres classes d'équivalence du mécanisme. Il est donc nécessaire, dans un premier temps, d'analyser les surfaces en contact avec d'autres pièces afin de définir les éléments géométriques des liaisons (Points, Droites, Plans) et de les positionner.

Ensuite, les traits doivent permettre de mettre en évidence facilement des données géométriques importantes telles que des longueurs, rayons…

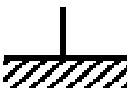
Enfin, ils doivent rejoindre d'éventuels lieux où des données sont présentes ou recherchées (point d'application d'une force, lieu de calcul d'une vitesse…).

A.IV.3.c Modélisation des liaisons

Lorsque chaque classe d'équivalence est modélisée, les lieux géométriques des liaisons avec les autres pièces du mécanisme sont normalement positionnés, il reste alors à ajouter le modèle de chaque liaison usuelle parmi celles vues précédemment.

Remarques :

- Une liaison est toujours l'assemblage de deux parties qui peuvent indépendamment être liées à chacune des deux pièces.
- On ajoute au bâti un élément graphique permettant de préciser qu'il est fixe.



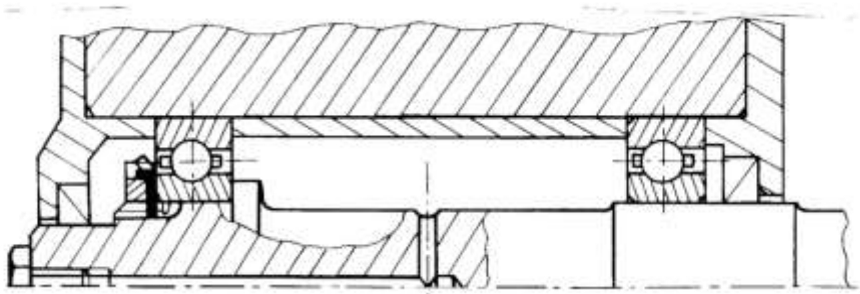
A.IV.3.d Mise en place du schéma cinématique

Il reste alors à créer le schéma cinématique du système complet en assemblant les différents modèles des classes d'équivalence et les liaisons normalisées associées. Attention à ne pas représenter le système dans une position particulière qui ne permettrait pas un bon paramétrage (angles ou longueurs nulles…)

Remarque : un schéma cinématique est un schéma contenant des pièces représentées par un ensemble de traits et des liaisons normalisées. On trouve cependant deux schémas cinématiques spécifiques :

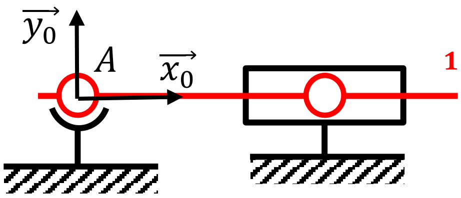
- Schéma d'architecture : schéma cinématique représentant l'ensemble des liaisons réelles à l'échelle étudiée (utile en dimensionnement : statique, dynamique)
- Schéma cinématique minimal : schéma cinématique composé d'un nombre minimum de liaisons permettant de représenter le fonctionnement cinématique du système (utile en cinématique)

Prenons l'exemple d'un arbre guidé en rotation par deux roulements :

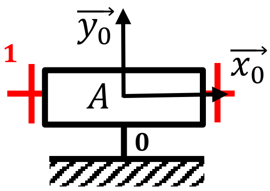


Chaque roulement présente un léger rotulage qui induit 3 degrés de liberté en rotation. Selon les arrêts axiaux réalisés sur chacune des bagues des deux roulements, la translation selon l'axe de l'arbre est possible ou non. Dans les montages classiques comme celui-proposé ci-dessus, un roulement comporte une bague complètement arrêtée axialement et l'autre possède une bague libre en translation axialement. On va donc modéliser le roulement complètement arrêté par une rotule et le roulement présentant une translation par une liaison linéaire annulaire.

Le schéma d'architecture du montage est le schéma cinématique représentant les différentes liaisons réelles entre l'arbre et le bâti selon le point de vue choisi, ici un dimensionnement des deux roulements :



Le schéma cinématique minimal est le schéma représentant la liaison équivalente (cf fin du chapitre), c'est-à-dire une liaison pivot :



Le schéma cinématique minimal est le schéma cinématique le plus simple à utiliser lors d'une étude cinématique d'un mécanisme car il représente au plus simple les mouvements existants.

Le schéma d'architecture a pour objectif de dimensionner les liaisons réelles en prenant en compte les différents éléments réels qui réalisent une liaison. Le schéma d'architecture que nous venons de proposer pour le montage de l'arbre sur deux roulements permet de dimensionner chacun des roulements en statique (et en dynamique) en calculant les efforts auxquels ils sont soumis. Selon le point de vue du problème traité, le schéma d'architecture peut être différent. Si l'on souhaite

- calculer les efforts dans les deux roulements, on propose le schéma précédent
- calculer les actions aux contacts entre chaque bille et les bagues du roulement, il faudrait faire un schéma d'architecture encore plus précis modélisant l'intégralité des billes et des bagues du roulement

A.IV.4 Paramétrage

Le paramétrage d'un mécanisme est nécessaire afin de mener son étude. Il consiste à préciser sur le schéma cinématique l'ensemble des éléments utiles à sa description précise.

Nous traiterons généralement des mécanismes plans (2D ou à représentation cinématique plane d'un mécanisme 3D). Dans ce cas, toutes les translations ont lieu dans un plan unique et l'unique rotation possible a un axe normal au plan. Dans ce cas, généralement, nous nous placerons dans le plan composé de vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$.

Nous allons introduire le paramétrage 2D et 3D afin de pouvoir traiter n'importe quel problème.

A.IV.4.a Paramétrage 2D

Compte tenu des liaisons possibles en 2D vues précédemment, chaque liaison peut présenter :

- 1 rotation autour de $\vec{z}$ (Pivot)
- 1 translation dans le plan (glissière)
- 1 translation dans le plan et 1 rotation autour de $\vec{z}$ (Ponctuelle)

A.IV.4.a.i Conventions

Lors du traitement de mécanismes plans, nous adopterons ces conventions :

	Fixes	**Paramètres**
Longueurs	L_i	$\lambda_{j/i}$
Angles	α_i	$\theta_{j/i}$
Vecteurs liés aux pièces	$\vec{x_i}, \vec{y_i}, \vec{z_i}$	$\vec{u_i}, \vec{v_i}, \vec{w_i}$

Pour les mécanismes plans, nous représenterons par convention le mécanisme avec des rotations autours des vecteurs $\vec{z_i}$ qui sont tous égaux, « venant vers nous »

Dans le cas des mécanismes plans, on a l'égalité :

$$R_{ji} = \dot{\theta}_{ji}$$

Dans le cas des mécanismes 3D pour les liaisons pivot (1 seul axe de rotation), on peut avoir le paramétrage angulaire :

$$P_{ji} = \dot{\theta}_{ji} \; ou \; Q_{ji} = \dot{\theta}_{ji} \; ou \; R_{ji} = \dot{\theta}_{ji}$$

A.IV.4.a.ii Paramétrage

Pour paramétrer un mécanisme plan, il faut définir :

- Les points caractéristiques (A, B, C…)
- Les numéros des pièces (1,2,3…)
- Les repères liés à chaque pièce $(\vec{x_i}, \vec{y_i}, \vec{z_i})$. En plan, on supposera toujours que les rotations se font autour des vecteurs $\vec{z_i} \forall i$, tous égaux, et on essaiera autant que possible d'associer au moins l'un des vecteurs $\vec{x_i}$ ou $\vec{y_i}$ à des éléments géométriques des pièces associées aux bases en question
- Les longueurs fixes : L_i pour la pièce i – Eventuellement L_{i1}, L_{i2}… pour d'autres longueurs dans la pièce i
- Les vecteurs fixes s'ils existent $(\vec{u_i}, \vec{v_i}, \vec{w_i})$ et les angles fixes non orientés associés α_i associés à classe d'équivalence i
- Les angles variables θ_{ji} associés à chaque liaison pivot et leurs flèches orientées, généralement mises du côté où l'angle est inférieur à 180°. Le signe est défini de base par le sens de rotation autour des vecteurs $\vec{z}$
- Les longueurs variables λ_{ji} avec la convention de signe définie en posant la définition du vecteur associé : $\overrightarrow{AB} = \lambda_{ji}\vec{x_i}$ (on pourra consulter le document sur le rappel des conventions pour la définition de vecteurs). Contrairement aux angles qui sont orientés par convention en plan par les vecteurs $\vec{z_i}$, les longueurs sont définies sur une droite dont le sens n'est pas défini.

Remarque : Lorsque l'on définit la position d'une pièce j par rapport à une pièce i, le paramètre $\theta_{j/i}$ ou λ_{ji} doit être défini en partant de i pour aller à j et on pose la flèche associée.

A.IV.4.b Paramétrage 3D

Dans les mécanismes 3D, il est possible d'avoir des liaisons qui présentent :

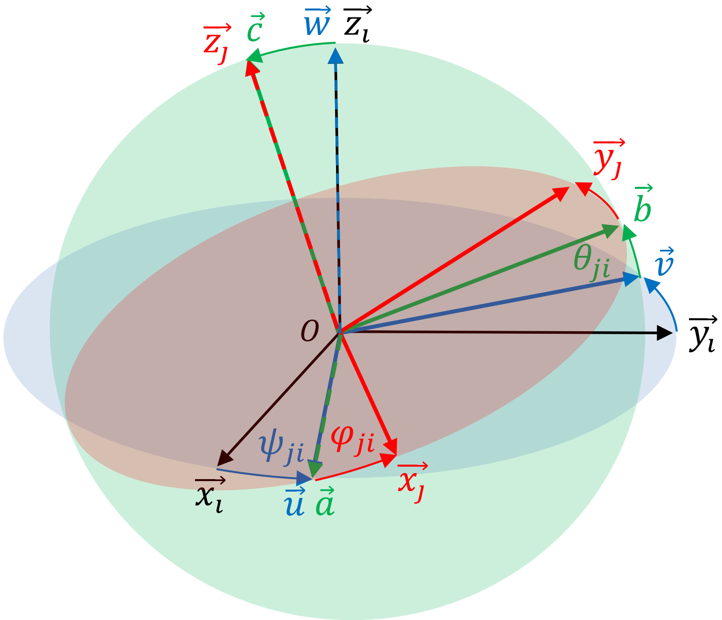
- Plusieurs translations dans différentes directions de l'espace
- Plusieurs rotations dans les différentes directions de l'espace

Il va donc falloir pouvoir paramétrer ces différents mouvements.

A.IV.4.b.i Angles d'Euler

Tout ce que nous avons proposé précédemment pour le paramétrage plan est à reprendre, en modifiant le paramétrage des angles et longueurs variables :

- Pour les longueurs, on introduira simplement des paramètres du type : ${\lambda^x}_{ji}$, ${\lambda^y}_{ji}$ et ${\lambda^z}_{ji}$
- Pour les rotations, on introduira les angles d'Euler



Les 3 rotations successives s'appellent :

- La précession $\psi_{ji} = \widehat{(\vec{x_i},\vec{u})} = \widehat{(\vec{y_i},\vec{v})}$ autour de l'axe $(0,\vec{z_i}) = (0,\vec{w})$ transforme $\mathfrak{B}_i(\vec{x_i},\vec{y_i},\vec{z_i})$ en $\mathfrak{B}_{uvw}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$
- La nutation $\theta_{ji} = \widehat{(\vec{v},\vec{b})} = \widehat{(\vec{w},\vec{c})}$ autour de l'axe $(0,\vec{u}) = (0,\vec{a})$ transforme $\mathfrak{B}_{uvw}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ en $\mathfrak{B}_{abc}(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$
- La rotation propre $\varphi_{ji} = \widehat{(\vec{a},\vec{x_j})} = \widehat{(\vec{b},\vec{y_j})}$ autour de l'axe $(0,\vec{c}) = (0,\vec{z_j})$ transforme $\mathfrak{B}_{abc}(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ en $\mathfrak{B}_j(\vec{x_j},\vec{y_j},\vec{z_j})$

On a :

$$\begin{cases} \vec{u} = \cos\psi_{ji}\,\vec{x_i} + \sin\psi_{ji}\,\vec{y_i} \\ \vec{v} = -\sin\psi_{ji}\,\vec{x_i} + \cos\psi_{ji}\,\vec{y_i} \\ \vec{w} = \vec{z_i} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{a} = \vec{u} \\ \vec{b} = \cos\theta_{ji}\,\vec{v} + \sin\theta_{ji}\,\vec{w} \\ \vec{c} = -\sin\theta_{ji}\,\vec{v} + \cos\theta_{ji}\,\vec{w} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{x_j} = \cos\varphi_{ji}\,\vec{a} + \sin\varphi_{ji}\,\vec{b} \\ \vec{y_j} = -\sin\varphi_{ji}\,\vec{a} + \cos\varphi_{ji}\,\vec{b} \\ \vec{z_j} = \vec{c} \end{cases}$$

On peut exprimer le vecteur rotation entre les solides i et j ainsi :

$$\overrightarrow{\Omega_{ji}} = \dot{\psi}_{ji}\vec{z_i} + \dot{\theta}_{ji}\vec{u} + \dot{\varphi}_{ji}\vec{c}$$

A.IV.4.b.ii Projections et matrices de changement de base

• Matrice de passage entre deux bases

Rappel : Une matrice de rotation permet de transformer un vecteur d'une base i dans une base j lorsqu'il existe entre celles-ci une rotation. On écrit verticalement les vecteurs de la nouvelle base j dans l'ancienne base i. On l'appelle « matrice de passage de la base i vers la base j ».

$$\begin{cases} \vec{x_j} = X_x\vec{x_i} + Y_x\vec{y_i} + Z_x\vec{z_i} \\ \vec{y_j} = X_y\vec{x_i} + Y_y\vec{y_i} + Z_y\vec{z_i} \\ \vec{z_j} = X_z\vec{x_i} + Y_z\vec{y_i} + Z_z\vec{z_i} \end{cases} \quad R_{ji} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \vec{x_j} & \vec{y_j} & \vec{z_j} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} X_x & Y_x & Z_x \\ X_y & Y_y & Z_y \\ X_z & Y_z & Z_z \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \vec{x_i} \\ \vec{y_i} \\ \vec{z_i} \end{array} \end{array}$$

Lorsqu'elle est appliquée au vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, la matrice R_{ji} donne :

$$\begin{bmatrix} X_x & Y_x & Z_x \\ X_y & Y_y & Z_y \\ X_z & Y_z & Z_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_x \\ X_y \\ X_z \end{bmatrix}$$

Elle permet donc transformer le vecteur $\vec{x_j}$ exprimé dans la base j en le vecteur $\vec{x_j}$ exprimé dans la base i.

$$\mathfrak{B}_j \underset{R_{ji}}{\rightarrow} \mathfrak{B}_i$$

La matrice de passage de la base i à la base j transforme donc un vecteur de $\mathfrak{B}_j$ en le même vecteur exprimé dans $\mathfrak{B}_i$.

Remarque : la matrice de passage inverse est obtenue par transposée de la matrice obtenue :

$$\mathfrak{B}_i \underset{R_{ij}}{\rightarrow} \mathfrak{B}_j$$

$$\boldsymbol{R_{ji} = {R_{ij}}^{-1} = R_{ij}}$$

• Application au changement de base avec les angles d'Euler

Les matrices de rotation de chacune de ces rotations s'écrivent ainsi :

$$R_\psi = \begin{bmatrix} \cos\psi_{ji} & -\sin\psi_{ji} & 0 \\ \sin\psi_{ji} & \cos\psi_{ji} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_{ji} & -\sin\theta_{ji} \\ 0 & \sin\theta_{ji} & \cos\theta_{ji} \end{bmatrix} \quad R_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{ji} & -\sin\varphi_{ji} & 0 \\ \sin\varphi_{ji} & \cos\varphi_{ji} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{B}_j \underset{R_\varphi}{\rightarrow} \mathfrak{B}_{uvw} \underset{R_\theta}{\rightarrow} \mathfrak{B}_{abc} \underset{R_\psi}{\rightarrow} \mathfrak{B}_i$$

On a alors :

$$\mathfrak{B}_j \underset{R_{ji}=R_\psi R_\theta R_\varphi}{\rightarrow} \mathfrak{B}_i$$

La matrice de rotation du mouvement complet s'obtient par produit de ces 3 matrices :

$$R_{ji} = R_\psi R_\theta R_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\psi_{ji} & -\sin\psi_{ji} & 0 \\ \sin\psi_{ji} & \cos\psi_{ji} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_{ji} & -\sin\theta_{ji} \\ 0 & \sin\theta_{ji} & \cos\theta_{ji} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\,\varphi_{ji} & -sin\,\varphi_{ji} & 0 \\ sin\,\varphi_{ji} & cos\,\varphi_{ji} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{ji} = \begin{bmatrix} \cos\psi_{ji} & -\sin\psi_{ji} & 0 \\ \sin\psi_{ji} & \cos\psi_{ji} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\,\varphi_{ji} & -sin\,\varphi_{ji} & 0 \\ \cos\theta_{ji}\, sin\,\varphi_{ji} & \cos\theta_{ji}\, cos\,\varphi_{ji} & -\sin\theta_{ji} \\ \sin\theta_{ji}\, sin\,\varphi_{ji} & \sin\theta_{ji}\, cos\,\varphi_{ji} & \cos\theta_{ji} \end{bmatrix}$$

$$R_{ji} = \begin{bmatrix} \cos\psi_{ji}\, cos\,\varphi_{ji} - \sin\psi_{ji}\cos\theta_{ji}\, sin\,\varphi_{ji} & -\cos\psi_{ji}\, sin\,\varphi_{ji} - \sin\psi_{ji}\cos\theta_{ji}\, cos\,\varphi_{ji} & \sin\psi_{ji}\sin\theta_{ji} \\ \sin\psi_{ji}\, cos\,\varphi_{ji} + \cos\psi_{ji}\cos\theta_{ji}\, sin\,\varphi_{ji} & -\sin\psi_{ji}\, sin\,\varphi_{ji} + \cos\psi_{ji}\cos\theta_{ji}\, cos\,\varphi_{ji} & -\cos\psi_{ji}\sin\theta_{ji} \\ \sin\theta_{ji}\, sin\,\varphi_{ji} & \sin\theta_{ji}\, cos\,\varphi_{ji} & \cos\theta_{ji} \end{bmatrix}$$

On a donc verticalement les coordonnées des vecteurs de la base j dans la base i. Ces formules ne sont pas à connaître et sont données afin d'être utilisées si nécessaire.

- **Expression projetée de la vitesse de rotation**

$$\overrightarrow{\Omega_{ji}} = \dot\psi_{ji}\vec{z_i} + \dot\theta_{ji}\vec{u} + \dot\varphi_{ji}\vec{c}$$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} \cos\psi_{ji} \\ \sin\psi_{ji} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_i} ; \vec{v} = \begin{bmatrix} -\sin\psi_{ji} \\ \cos\psi_{ji} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_i} ; \vec{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin\theta_{ji} \\ \cos\theta_{ji} \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_{uvw}} = \begin{bmatrix} \sin\theta_{ji}\sin\psi_{ji} \\ -\sin\theta_{ji}\cos\psi_{ji} \\ \cos\theta_{ji} \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_i} ; \vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_i}$$

$$\overrightarrow{\Omega_{ji}} = \dot\psi_{ji} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_i} + \dot\theta_{ji} \begin{bmatrix} \cos\psi_{ji} \\ \sin\psi_{ji} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_i} + \dot\varphi_{ji} \begin{bmatrix} \sin\theta_{ji}\sin\psi_{ji} \\ -\sin\theta_{ji}\cos\psi_{ji} \\ \cos\theta_{ji} \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_i}$$

$$\overrightarrow{\Omega_{ji}} = \begin{bmatrix} \dot\theta_{ji}\cos\psi_{ji} + \dot\varphi_{ji}\sin\theta_{ji}\sin\psi_{ji} \\ \dot\theta_{ji}\sin\psi_{ji} - \dot\varphi_{ji}\sin\theta_{ji}\cos\psi_{ji} \\ \dot\psi_{ji} + \dot\varphi_{ji}\cos\theta_{ji} \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_i}$$

On pourra aussi exprimer $\overrightarrow{\Omega_{ji}}$ dans la base $\mathfrak{B}_j$ par la même méthode.

A.IV.5 Graphe des liaisons

Le **graph des liaisons**, ou **graph de structure**, est un outil indispensable pour la résolution des mécanismes. Il permet d'élaborer des stratégies de résolution des mécanismes.

La seule donnée d'un graphe des liaisons complet et de la géométrie du mécanisme (vecteurs entre ses points caractéristiques) permet de traiter celui-ci en géométrie et en cinématique sans même avoir recours à son schéma cinématique.

On représente chaque classe d'équivalence (pièce ou groupe de pièce sans mouvements relatifs) par un cercle contenant le numéro de celle-ci.

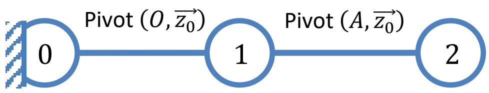
Concernant le bâti :

- on ajoute un élément graphique permettant de montrer qu'il est fixe 
- on ne le représente qu'une seule fois !

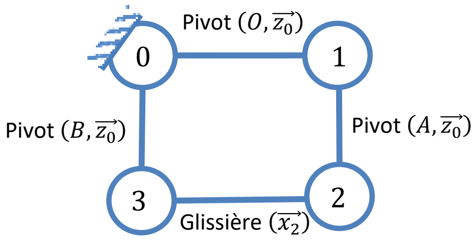
On représente chaque liaison entre les classes d'équivalence par un trait entre les 2 cercles correspondant. Auprès de chaque liaison, on indique les caractéristiques géométriques importantes (point central, axe, plan…) précisés dans le tableau des liaisons.

Exemples :

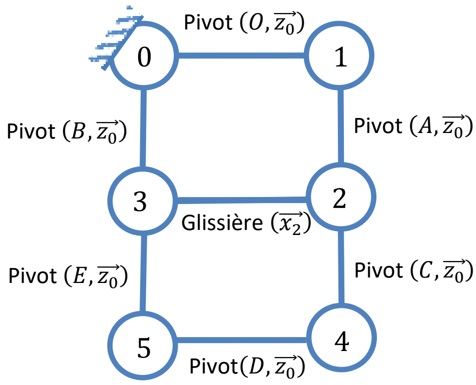
Chaine ouverte



Chaine simple fermée



Chaine complexe fermée



Il est d'usage de faire un premier graphe des liaisons en brouillon afin de bien présenter une version définitive.

Enfin, ce n'est pas obligatoire, on représente en couleur la/les liaison(s) où une entrée cinématique est imposée.