Systèmes régis par une équation différentielle du 1° et du 2° ordre

Cours

Programme - Compétences		
A31	ANALYSER	Architectures fonctionnelle et structurelle : - diagrammes de définition de blocs - chaîne directe - système asservi - commande
A51	ANALYSER	Grandeurs utilisées: - unités du système international - homogénéité des grandeurs
B24	MODELISER	Systèmes linéaires continus et invariants: - Modélisation par équations différentielles - Calcul symbolique - fonction de transfert; gain, ordre, classe, pôles, zéros
B25	MODELISER	Signaux canoniques d'entrée: - impulsion - échelon - rampe - signaux sinusoïdaux
B26	MODELISER	Schéma-bloc: - fonction de transfert en chaîne directe - fonction de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée
B27	MODELISER	Linéarisation des systèmes non linéaires
B28	MODELISER	Modèles de comportement
C21	RESOUDRE	Réponses temporelle et fréquentielle: - systèmes du 1er et 2e ordre - intégrateur
C23	RESOUDRE	Rapidité des SLCI: - temps de réponse à 5%
D37	EXPERIMENTER	Identification temporelle d'un modèle de comportement

A. Systèmes Linéaires Continus Invariants - SLCI

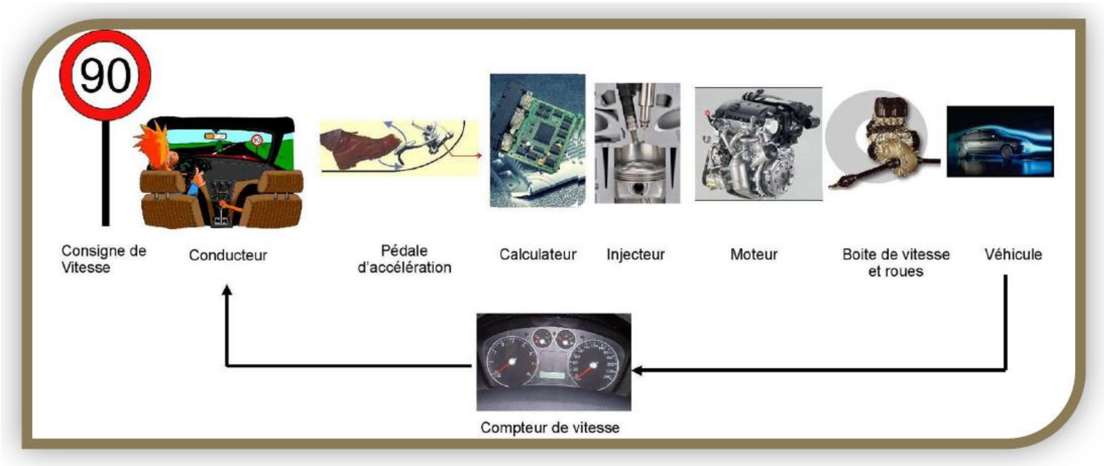
A.I. Généralités

A.I.1 Un exemple pour comprendre

Un exemple très répandu aujourd'hui est le régulateur de vitesse de voiture disponible en option lors de l'achat.

Un conducteur qui ne dispose pas de cette option passe son temps à contrôler sa vitesse afin de la comparer à la vitesse à laquelle il souhaite rouler puis applique les actions nécessaires sur l'accélérateur afin de contrôler le moteur. L'homme réalise un **asservissement**.

Dans le cas d'une régulation automatique, le conducteur met en service la régulation à l'aide d'une commande. Il choisit ensuite une valeur de vitesse et la voiture « obéit » et règle son allure afin que la vitesse affichée sur le compteur corresponde à la vitesse demandée.



En réalité, l'ordinateur de bord compare la vitesse mesurée sur le véhicule (tension image de la vitesse) et affichée sur le compteur à la valeur demandée par le conducteur (tension correspondant à la valeur demandée) et pilote le moteur en utilisant la différence de tension qu'il modifie et injecte dans le dans la commande du moteur afin d'atteindre cette vitesse.

C'est ce que l'on appelle un **système automatique asservi** qui réalise lui aussi un asservissement.

Cet exemple nous permet déjà d'aborder des notions essentielles sur les asservissements en termes de performances. Ils doivent être :

- **précis** : lorsque l'on demande de tenir 130 km/h, est-on d'accord pour être entre 125 et 135 ?
- **rapides** : lorsque l'on demande à rouler à 130 km/h, une montée en vitesse sur 5 minutes convient-elle ?
- **stables** : lorsque l'on demande 130 km/h, accepte-t-on que la vitesse puisse tendre vers 0 ou l'infini ?

A.I.2 Système automatisé

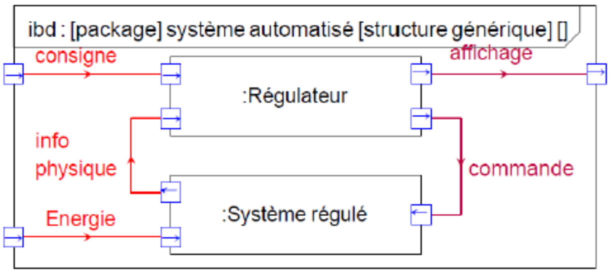
A.I.2.a Définition

Un **système** est un ensemble de composants interagissant entre eux en vue de réaliser des fonctions.

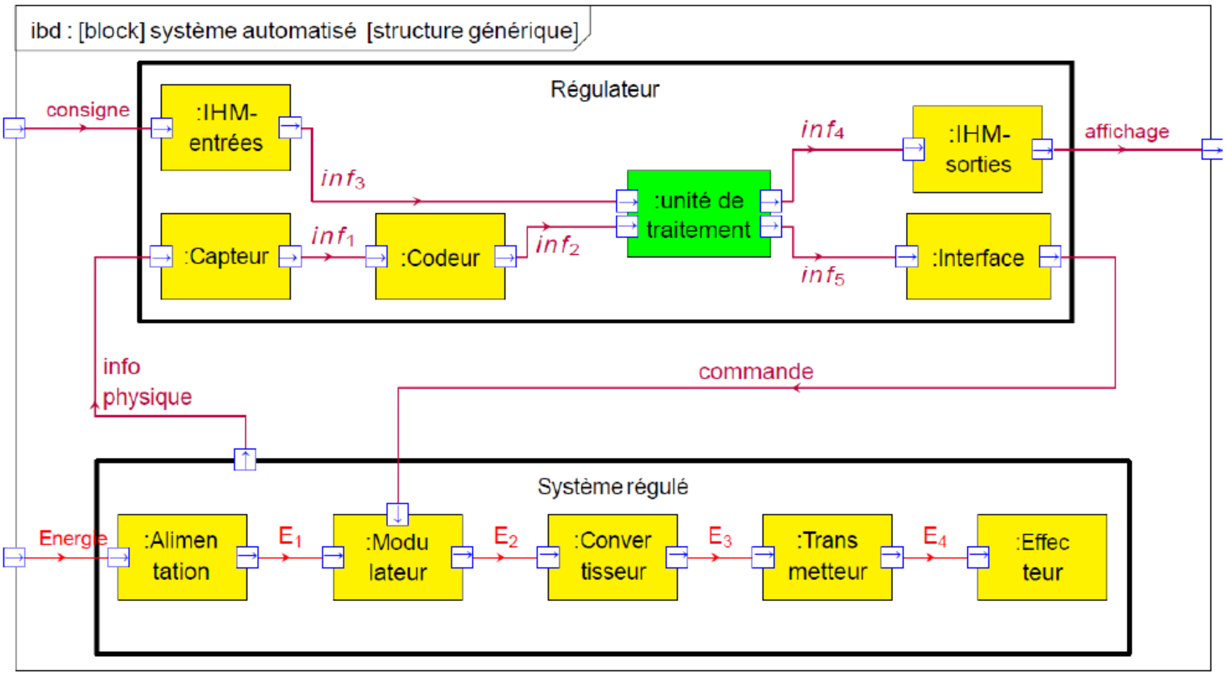
Un **système automatique ou automatisé** est un système qui réalise une ou plusieurs tâches sans intervention de l'homme. Il permet

- de réaliser des opérations complexes ou délicates, ne pouvant être confiées à l'homme (pilotage d'une fusée)
- de substituer la machine à l'homme pour des opérations trop répétitives, fatigantes, sans intérêt (appareils ménagers, robots,.....)
- d'accroître la précision (machines-outils, robots,...)

Sa fonction principale est de commander une grandeur de sortie selon une consigne d'entrée. Il est caractérisé par un processus ou partie opérative impliquant généralement des énergies importantes, qui agit sur la matière d'œuvre, et une commande nécessitant peu d'énergie qui pilote le processus.



En précisant la structure interne des deux blocs, on retrouve la chaîne d'information et la chaîne d'énergie.



A.I.2.b Familles de systèmes automatisés

Il existe deux types de systèmes automatiques :

- Les systèmes logiques, combinatoires ou séquentiels
- Les systèmes asservis

A.I.2.b.i Systèmes logiques, combinatoires ou séquentiels

Ces systèmes ont un comportement décrit par des grandeurs logiques binaires (0 et 1) et par une succession d'actions.

On adopte une modélisation sous forme de système logique :

- combinatoire si les actions dépendent uniquement de l'état des entrées à l'instant considéré
- séquentiel si les actions dépendent de l'état des entrées à l'instant considéré mais aussi aux instants antérieurs

Le nombre d'opérations est fini et prédéterminé. Ce sont des systèmes à "événements discrets" ou à "automatismes séquentiels".

Ces systèmes seront étudiés dans un autre chapitre.

A.I.2.b.ii Systèmes asservis

Ce sont des **systèmes à retour** : une mesure de la grandeur de sortie est en permanence prise en considération dans la construction de la commande. La grandeur de retour, image de la sortie, est comparée à la grandeur d'entrée, il y a élaboration d'un **écart**. Cet écart est ensuite amplifié.

Un système asservi permet, outre l'obtention d'une valeur souhaité en sortie d'un système, de tenir compte des perturbations et d'annuler (ou de réduire) leurs effets.

Un système est dit "continu" ou "analogique" lorsque les variables utilisées sont continues.

Un système est dit "discret" ou "numérique" lorsque les variables traitées par un calculateur sont échantillonnées dans le temps.

On peut considérer deux types d'asservissements. On parle :

- de **régulation** lorsque le système asservi est commandé par une **consigne constante** et qu'il doit maintenir une sortie constante quelles que soient les perturbations qu'il subit (régulation de la température d'une pièce)
- **d'asservissement ou de système suiveur** lorsque la **consigne varie dans le temps**. Le système doit ajuster en permanence le signal de sortie à celui de l'entrée (radar de poursuite, table traçante)

Un système asservi général est à la fois régulateur et suiveur.

A.I.3 Notions fondamentales sur les systèmes asservis

Les systèmes au programme sont les systèmes

- Linéaires
- Continus
- Invariants

A.I.3.a Linéarité

A.I.3.a.i Définition

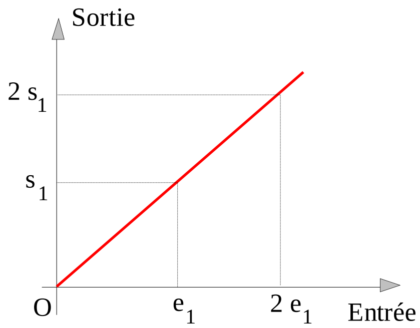
Un système est dit linéaire si la fonction qui le décrit est linéaire. Cette dernière vérifie alors le principe de superposition.

Appelons L la relation entre entrée et sortie, prenons deux entrées e_1 et e_2 et deux réels λ et μ.

On a :

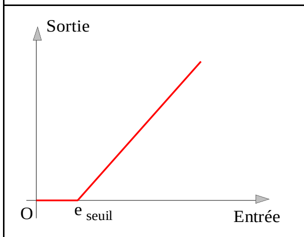
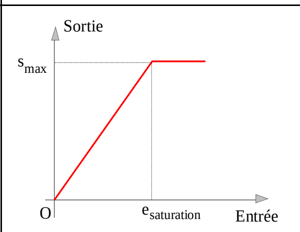
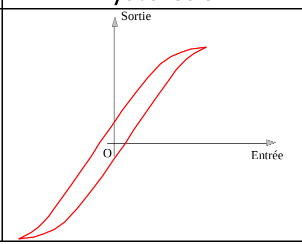
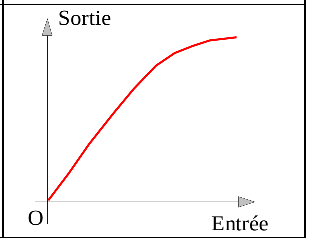
$$L(\lambda e_1 + \mu e_2) = \lambda L(e_1) + \mu L(e_2)$$

La courbe caractéristique d'un système est la représentation de la loi entrée-sortie en régime permanent (entrée et sortie on atteint leur valeurs de stabilité, et sont indépendantes du temps). On soumet le système à une entrée, on attend un temps suffisant pour que la sortie soit stabilisée et on mesure la valeur de cette grandeur.



A.I.3.a.ii Non linéarités

On trouve 4 types usuels de non-linéarités : seuil, saturation, hystérésis, courbure

Seuil	Saturation	Hystérésis	Courbure
			

A.I.3.b Continuité

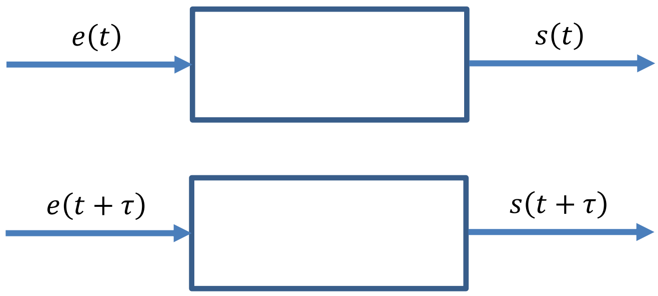
Un système est **continu**, par opposition à un **système discret**, lorsque les variations des grandeurs physiques le caractérisant sont des fonctions à temps continu et que l'on peut donc définir ces grandeurs à tout instant. On parle aussi de système **analogique**.

Un système informatique n'est pas continu, on parle alors de **système échantillonné**.

A.I.3.c Invariance

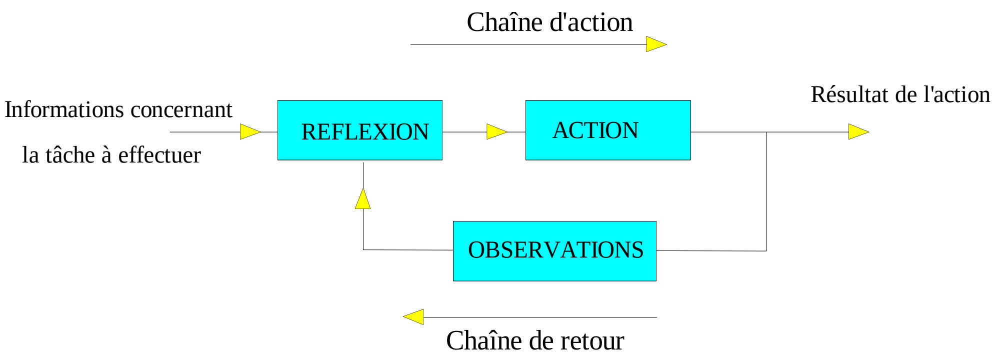
Un système invariant est un système dont les caractéristiques de comportement ne se modifient pas dans le temps, en d'autres termes c'est un système qui ne vieillit pas.

Cette proposition se traduit par :

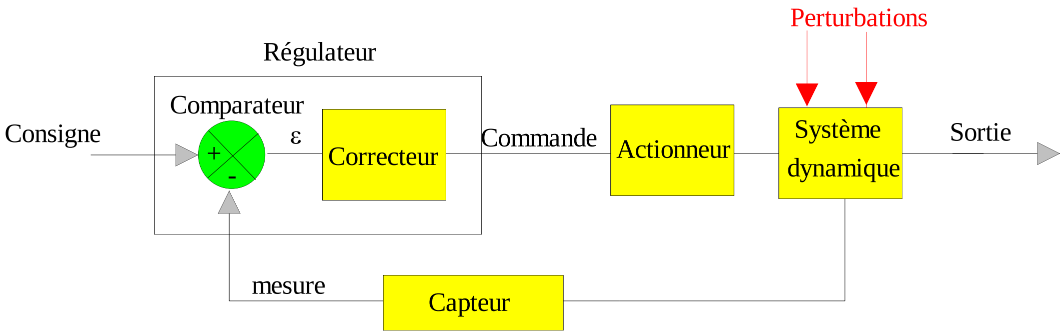


A.I.4 Structure d'un système asservi

Un système asservi est un système bouclé. Voici sa structure :



Le système asservi peut être modélisé par le schéma fonctionnel suivant (appelé schéma fonctionnel) :



Le **régulateur**, composé d'un **comparateur** et d'un **correcteur**, est l'organe "intelligent" du système. Il contrôle la manière dont l'ordre a été exécuté et le modifie si nécessaire. A partir de la valeur ε de l'écart constaté, le système élabore un signal de commande.

Le **système dynamique** évolue suivant les lois de la physique qui le caractérisent, afin d'apporter la valeur ajoutée à la matière d'œuvre. Il peut subir des perturbations de l'extérieur, prévisibles ou non.

ε (écart = image de la consigne d'entrée – image de la valeur de sortie) caractérise la qualité de fonctionnement du système. On cherche à obtenir un écart faible ou nul.

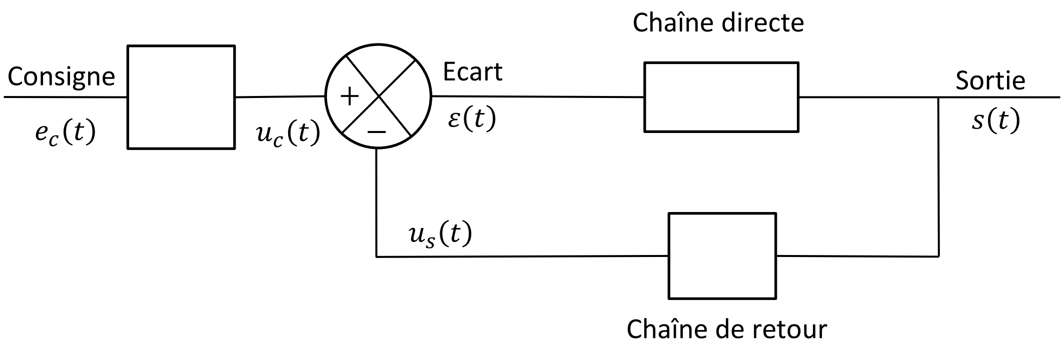
D'une façon générale, un **système de commande** à une variable a pour but de transmettre à la grandeur de sortie, la loi de variation en fonction du temps imposée par la grandeur de consigne ou d'entrée.

Les systèmes de commande asservis sont conçus **pour corriger eux-mêmes** les écarts entre la valeur réelle du signal de sortie et la valeur désirée, correspondant à la loi imposée à l'entrée.

A.I.5 Représentation par schéma bloc

A.I.5.a Schéma bloc

L'asservissement des systèmes asservis est représenté par des schémas blocs.



On trouve différentes variables dans le schéma bloc :

- ec est la grandeur de consigne en entrée
- uc est la tension image de la grandeur de consigne
- s est la grandeur de sortie
- us est la tension image de la grandeur de sortie
- $\varepsilon = uc - us$ est l'écart. Remarquons que cela correspond à **l'entrée moins la sortie !**

Attention : il faut faire la différence entre l'écart au niveau du comparateur et l'erreur correspondant à la différence entre la sortie et la consigne. Pour éviter les erreurs, regarder les unités.

La grandeur de sortie est commandée par l'intermédiaire d'une **chaîne directe ou chaîne d'action**.

L'entrée de celle-ci (la commande) est la différence ε entre un signal élaboré à partir du signal de consigne et du signal de retour obtenu à partir du signal de sortie par l'intermédiaire d'une **chaîne de retour ou chaîne de réaction.**

A.I.5.b Eléments réels constitutifs du schéma bloc

Un schéma bloc représente différents éléments réels :

- Des capteurs
- Des actionneurs
- Des organes de traitement de l'information

A.I.5.b.i Capteurs

Un capteur est un organe de transformation d'une grandeur physique en une autre. Exemples :

- un potentiomètre transforme une position en une tension électrique
- une dynamo tachymétrique transforme une vitesse en une tension électrique
- un thermocouple transforme une température en une tension électrique

Dans le cas le plus général, un système asservi comporte deux capteurs qui ont pour rôle d'élaborer à partir des grandeurs de consigne et de sortie du système, deux grandeurs de même nature aisément comparables dont la différence constitue l'écart ε.

A.I.5.b.ii Actionneurs

C'est l'élément qui commande le système à asservir (vérin, moteur...).

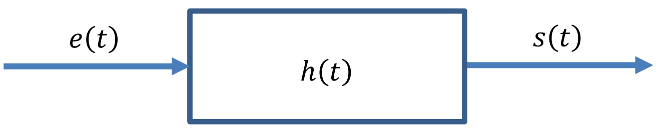
A.I.5.b.iii Organes de traitement de l'information

La grandeur de consigne permet de commander avec une faible énergie des procédés qui mettent en jeu des puissances élevées. Il existe toujours dans ces systèmes un **amplificateur de puissance**. L'ampli soumis à une tension d'entrée u(t) délivre une tension proportionnelle $v(t) = A\,u(t)$.

A.I.5.c Transmittances – Fonction de transfert

A.I.5.c.i Généralités

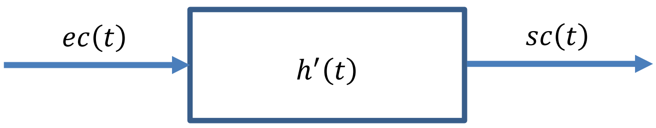
A chaque composant du système asservi est associée une fonction de transfert.



$$s(t) = h\big(e(t)\big)$$

h est la fonction de transfert du composant.

Au système asservi complet est associée une fonction de transfert qui dépend des transmittances de chaque composant qui le constitue :



$$sc(t) = h'\big(ec(t)\big)$$

h' est la fonction de transfert du système.

A.I.6 Comportements temporels des SLCI

A.I.6.a Signaux d'entrée

Les signaux d'entrée sont des fonctions du temps. Généralement, ce sont des tensions.

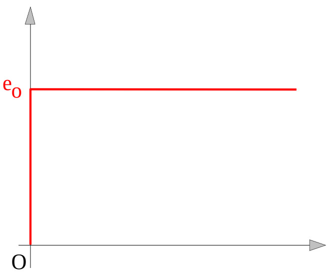
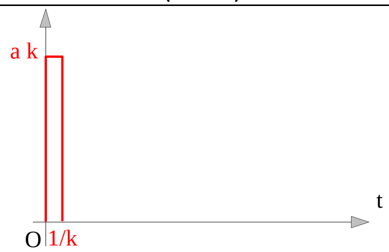
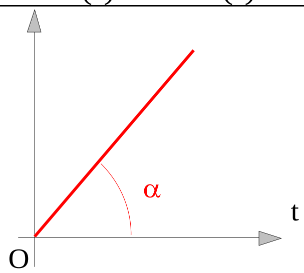
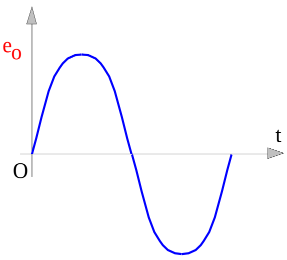
Dans le cadre de l'étude des systèmes asservis, on connaît toujours les causes faisant apparaître des effets. On supposera donc toujours que les causes ont lieu au temps 0 et sont inexistantes avant :

$$e(t) = 0 \; si \; t < 0$$

On parle du principe de causalité :

- en physique, le principe de causalité affirme que si un phénomène (nommé cause) produit un autre phénomène (nommé effet), alors l'effet ne peut précéder la cause
- dans les mêmes conditions, les mêmes causes produisent les mêmes effets

Les entrées types étudiées dans notre cours sont les suivantes :

Entrée échelon $e(t) = e_0\,u(t)$	Entrée impulsion $e(t) = a\,\delta(t)$ (Dirac)
 	 $k \to +\infty$
Entrée rampe $e(t) = at\,u(t)$	Entrée sinusoïdale $e(t) = e_0\,sin(\omega t + \varphi)$
 	

$$u(t) = 0 \; si \; t < 0$$

Remarques :

- lorsque l'on parle d'un échelon **unitaire**, cela veut dire que $e_0 = 1$
- la fonction $u(t)$ s'appelle fonction de **Heavyside :** $u(t) = \begin{cases} 0 \; si \; t < 0 \\ 1 \; si \; t \geq 0 \end{cases}$

A.I.6.b Images en sortie

Selon le type de signal en entrée, l'image de ces entrées est caractérisée de deux manières différentes :

- Image statique : Le système est en mode régulation (entrée fixe). On définit alors l'erreur statique ε_s qui est la différence entre le résultat souhaité et le résultat obtenu. Il faut essayer d'annuler cette erreur en agissant sur les paramètres du système.
- Image dynamique : Les valeurs d'entrée ne sont pas prédéterminées. On étudie alors :
    - la **précision dynamique** : erreur avec laquelle la sortie suit la loi imposée à l'entrée
    - la **rapidité** : temps que met le système à réagir à une variation brutale de la consigne
    - la **stabilité** : réponse suffisamment amortie pour une variation brutale de la consigne, si la sortie s'éloigne de la loi imposée, le système est dit instable.

  Ces trois caractéristiques sont étroitement **liées**. Il faut donc les rendre compatibles, compte-tenu du cahier des charges retenu pour le système. On en déduit le correcteur approprié.

A.I.6.c Régimes et performances

Le signal réponse d'un système se décompose en deux phases. Il passe d'abord par un **régime transitoire**, puis atteint ensuite un **régime permanent**.

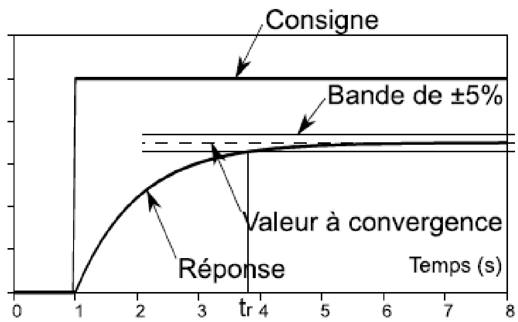
Au cours de ces deux régimes, on met en évidence ses performances :

- Précision : aptitude à atteindre la valeur visée mesurée entre la valeur de la réponse permanente (limite lorsque $t \to \infty$) et la consigne. On parle **d'erreur statique**.
- Rapidité : aptitude à réagir à une variation de la grandeur d'entrée.
- Stabilité : aptitude à converger vers une valeur constante lorsque $t \to \infty$ - Est aussi défini ainsi : un système est stable si à une entrée bornée, correspond une sortie bornée.
- Présence de dépassements : possibilité du système à dépasser la valeur de consigne au cours de sa réponse

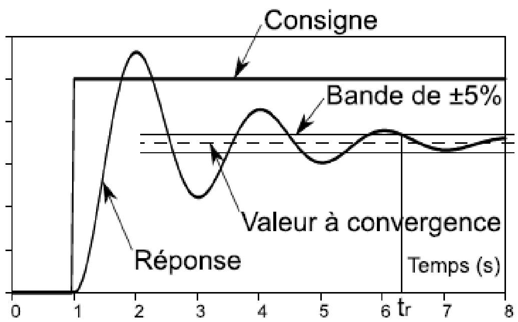
A.I.6.c.i Régime transitoire

Au cours du premier régime, on met en évidence les performances de rapidité, stabilité et la présence éventuelle de dépassement.

On estime la rapidité d'un système en regardant à partir de quel moment sa réponse $s(t)$ **reste** dans un intervalle de $\pm 5\%$ **de la valeur finale** $\boldsymbol{S_\infty = \lim_{t \to +\infty} s(t)}$. Le temps de réponse à 5% est noté $t_{r_{5\%}}$ (ou t_r).

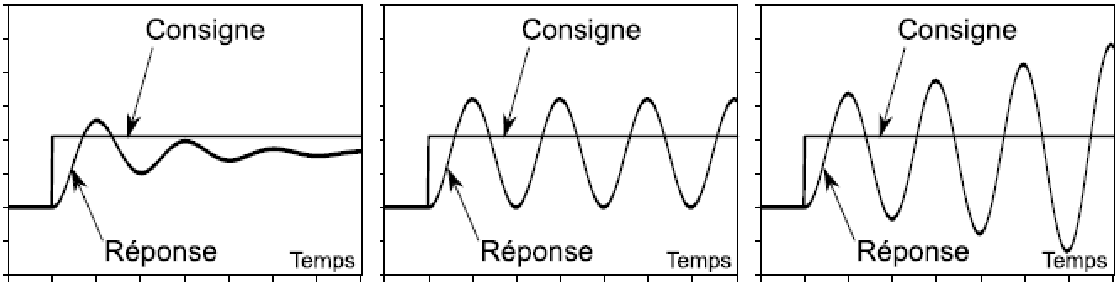


$t_{r_{5\%}} = 3{,}8 - 1 = 2{,}8\ s$



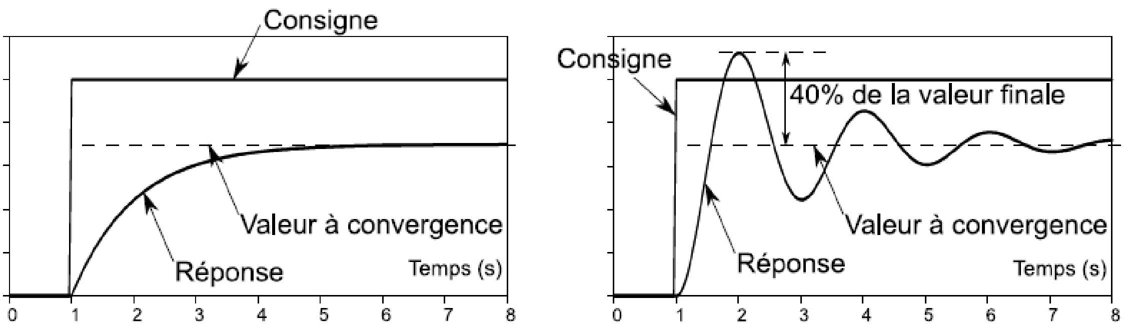
$t_{r_{5\%}} = 6{,}3 - 1 = 5{,}3\ s$

Si un système est mal amorti, la sortie $s(t)$ peut prendre des valeurs trop importantes avant de converger vers une valeur stable, voire ne jamais se stabiliser. L'erreur à tout moment est appelée l'**erreur dynamique** notée ε_d.



Système stable | Système quasi-stable | Système instable

Lors de la réponse en régime transitoire, on peut mettre en évidence l'éventuelle présence de dépassements.



Réponse sans dépassement | Réponse avec dépassement de 40%

Le régime transitoire d'un système de commande doit être « bien » amorti et « suffisamment » rapide. Ces valeurs seront toujours précisées dans le cahier des charges.

A.I.6.c.ii Régime permanent

En régime permanent, selon le type d'entrée, la réponse du système est différente.

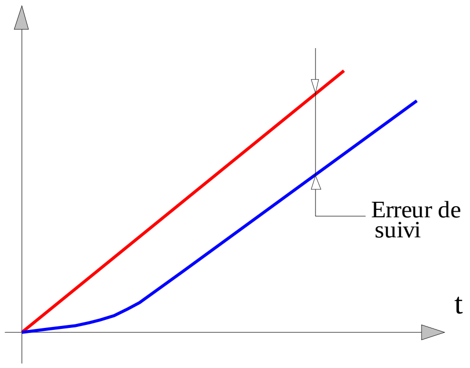
• **Réponse à une entrée échelon**

L'erreur permanente s'appelle est nommée **erreur statique** ε_s. C'est l'écart entre la valeur du signal d'entrée et la réponse $s(t)$ en régime définitif $(t \to \infty)$. Plus cet écart sera faible plus le système sera **précis**.

Remarque : La réponse d'un système à un échelon sera appelée **réponse indicielle**.

• **Réponse à une entrée rampe**

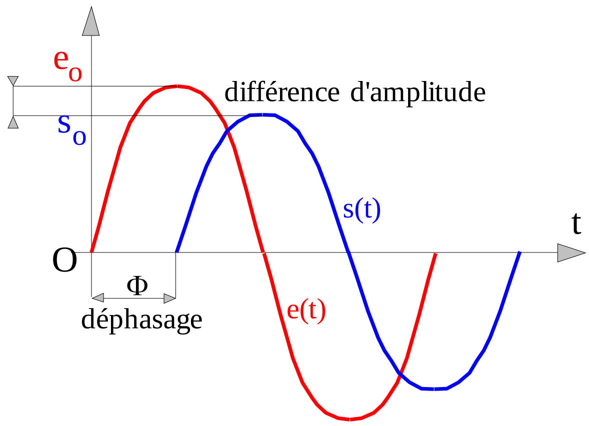
L'erreur permanente mesurée (valeur à l'infini de l'erreur dynamique) s'appelle **erreur de suivi, erreur de traînage ou erreur de vitesse** notée ε_v. En pratique, on essaie d'annuler cette erreur ou de fixer un seuil d'erreur à ne pas dépasser.



• **Réponse à une entrée sinusoïdale**

La réponse **en régime établi** (un temps assez long a permis à la sortie de s'établir et de se répéter), à une entrée sinusoïdale est sinusoïdale :

- de même période
- avec une amplitude $s_0 \neq e_0$
- avec un déphasage ϕ (correspondant à une erreur de suivi)



A.I.6.c.iii Bilan

Imposer une entrée échelon permet de juger de la précision, de la rapidité et de l'éventuel dépassement d'un système.

Imposer une entrée en rampe permet de juger de la capacité d'un système à suivre une consigne.

Imposer une entrée sinusoïdale permet de juger de la stabilité d'un système.

A.II. Formalisme de Laplace

A.II.1 Contexte

De nombreux systèmes peuvent être modélisés, à partir des lois de la physique par un ensemble d'équations différentielles, éventuellement non linéaires.

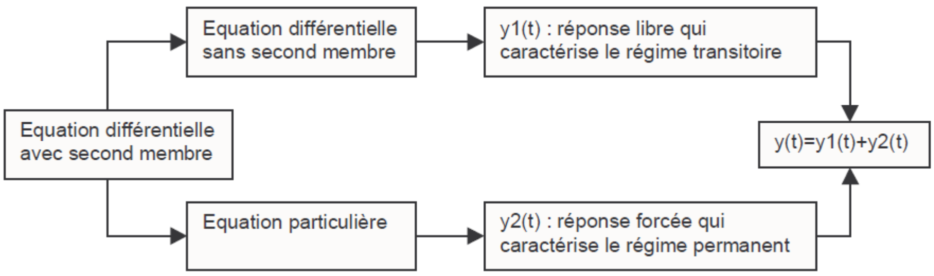
Considérons un système linéaire continu quelconque. Il est caractérisé par l'équation différentielle suivante (modèle):

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s = b_m \frac{d^m e}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{de}{dt} + b_0 e \quad ; \quad m < n$$

Remarque :

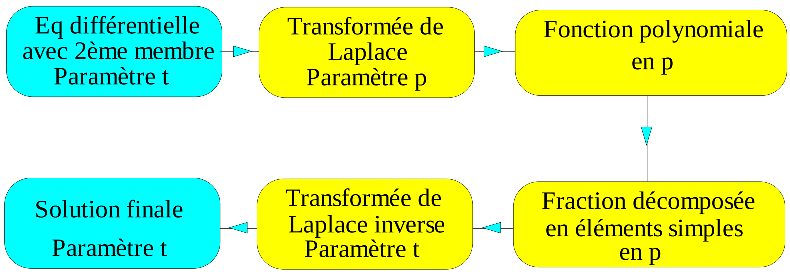
- par respect du principe de causalité abordé précédemment, m est obligatoirement inférieur à n.
    - C'est-à-dire que la variable de sortie s voit ses dérivées « pilotées » par une entrée dont le degré de la plus grande dérivée est inférieur, c'est-à-dire un phénomène physique pouvant s'y appliquer.
    - ex : d'après le principe fondamental de la dynamique appliqué à un solide projeté sur une direction $\vec{x}$: $\sum \vec{F}.\vec{x} = m\frac{dv_x}{dt}$. Cette équation traduit le fait que lorsque l'on impose un effort, on impose une variation de la vitesse du solide concerné. L'inverse est impossible, on ne peut physiquement imposer une vitesse qui induirait un effort. Cette équation montre que la donnée de sortie (vitesse) voit sa dérivée contrôlée par l'effort.

Pour résoudre cette équation et exprimer la sortie $s(t)$ en fonction de l'entrée $e(t)$, la première solution consiste à utiliser l'outil mathématique classique.



Pour des équations du premier et du second degré, ce travail est simple. Pour des équations plus complexes, cela devient plus difficile.

Nous allons donc introduire une nouvelle notion. En effet, un outil a été développé pour résoudre ces équations temporelles en passant dans un domaine appelé **domaine de Laplace**. En transformant l'équation différentielle dans ce domaine, en travaillant dans celui-ci sur des polynôme, puis en revenant dans le domaine temporel, il devient simple de trouver la solution à des équations complexes comme celle présentée ci-dessus.



A.II.2 Transformation de Laplace

A.II.2.a Définition

Soit f, une fonction réelle de la variable réelle t, définie pour $t > 0$.

On appelle transformée de Laplace de f, la fonction $F(p)$ définie par :

$$F(p) = \mathcal{L}\big(f(t)\big) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$$

p est appelée variable complexe.

On notera $\mathcal{L}^{-1}$ la transformée de Laplace inverse : $\mathcal{L}^{-1}\big(F(p)\big) = f(t)$

Généralement, à une variable temporelle sera associée une lettre minuscule de l'alphabet.

La lettre majuscule sera alors automatiquement attribuée à la variable associée dans le domaine de Laplace

Exemples :

$$u(t) \rightarrow U(p)$$

$$x(t) \rightarrow X(p)$$

$$e(t) \rightarrow E(p)$$

$$s(t) \rightarrow S(p)$$

Remarque : En termes d'unités, la transformée de Laplace d'une fonction est une intégrale temporelle, elle multiplie dont par un temps.

$$F(p) = \mathcal{L}\big(f(t)\big) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$$

$$[F(p)] = [f(t)] * T$$

Toutefois, lorsque dans un schéma bloc, on fait apparaître les unités, on écrira les unités des variables temporelles, les variables de Laplace étant elles toutes multipliées par un temps.

A.II.2.b Propriétés

A.II.2.b.i Unicité

La correspondance entre $f(t)$ et $F(p)$ est biunivoque. Il existe une bijection entre le domaine temporel et le domaine de Laplace.

A.II.2.b.ii Linéarité

Soient $f(t)$ et $g(t)$ deux fonctions du temps. L'application $\mathcal{L}$ est linéaire :

$$\mathcal{L}\big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big) = \lambda\mathcal{L}\big(f(t)\big) + \mu\mathcal{L}\big(g(t)\big)$$

A.II.2.b.iii Image de la dérivée

$$\mathcal{L}\big(f'(t)\big) = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}\,dt$$

En faisant une intégration par parties : $\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt$

$$\mathcal{L}\big(f'(t)\big) = [f(t)e^{-pt}]_0^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$$

$$\mathcal{L}\big(f'(t)\big) = -f(0^+) + pF(p)$$

Soit :

$$\mathcal{L}\big(f'(t)\big) = pF(p) - f(0^+)$$

Remarque :

En termes d'unités, on voit ici que $f(0^+)$ est de l'unité de la fonction temporelle $f(t)$

Comme une multiplication par p correspond à une dérivation temporelle, soit une division par un temps, on a :

$$[pF(p)] = \frac{[F(p)]}{T}$$

Par ailleurs, $[pF(p)] = [f(0^+)]$ puisque ces deux termes sont sommés, ce qui montre que

$$[F(p)] = [f(t)] * T$$

Lorsque nous traiterons des problèmes aux conditions initiales non nulles, il faudra pour comprendre les unités des variables manipulées ne pas oublier ce résultat.

Ce résultat se généralise aux dérivées d'ordre supérieur :

$$\mathcal{L}\big(f^n(t)\big) = p^n F(p) - p^{n-1} f(0^+) - p^{n-2} f'(0^+) - \cdots - f^{n-1}(0^+)$$

Exemple :

$$\mathcal{L}\big(f''(t)\big) = p\mathcal{L}\big(f'(t)\big) - f'(0^+) = p\big(pF(p) - f(0^+)\big) - f'(0^+)$$

$$\mathcal{L}\big(f''(t)\big) = p^2 F(p) - pf(0^+) - f'(0^+)$$

Dans le cas où la fonction f ainsi que ses dérivées sont nulles à $t = 0$, on obtient le résultat fondamental :

$$\boxed{\begin{gathered} \mathcal{L}\big(f'(t)\big) = pF(p) \\ \mathcal{L}\big(f''(t)\big) = p^2 F(p) \\ \dots \\ \mathcal{L}\big(f^n(t)\big) = p^n F(p) \end{gathered}}$$

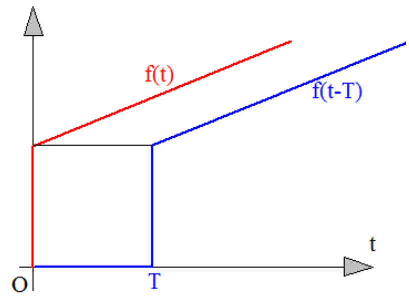
Ce cas se rencontre très fréquemment en asservissements et correspond à l'étude du comportement d'un système initialement au repos et soumis à une entrée causale, c'est-à-dire nulle pour t < 0.

Remarques :

- Nous pourrions montrer de la même manière qu'une intégration correspond à une division par p.
- Attention : écrire $\dot{F}(p)$ n'a pas de sens. Lorsque l'on veut parler de la transformée de la dérivée, il faut passer par la notation $\mathcal{L}\big(f'(t)\big)$

A.II.2.b.iv Théorème du retard

Soient $f(t)$ de transformée de Laplace $F(p)$ et $g(t)$ une fonction telle que $g(t) = f(t-T)$.



$$\mathcal{L}\big(g(t)\big) = \mathcal{L}\big(f(t-T)\big) = G(p) = e^{-Tp}F(p)$$

Démonstration par changement de variable :

$$\mathcal{L}\big(g(t)\big) = \int_0^{+\infty} f(t-T)e^{-pt}\,dt \underset{u=t-T}{=} \int_{-T}^{+\infty} f(u)e^{-p(u+T)}\,du$$

$$\mathcal{L}\big(g(t)\big) = \mathcal{L}\big(f(t-T)\big) = e^{-pT}\int_0^{+\infty} f(u)e^{-pu}\,du = e^{-pT}F(p)$$

A.II.2.b.v Théorèmes de la valeur initiale et finale

• **<u>Théorèmes</u>**

Ces théorèmes sont d'une grande utilité car ils permettent de connaître la limite temporelle d'une fonction connaissant sa transformée de Laplace.

Théorème de la valeur initiale	Théorème de la valeur finale
$\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = \lim\limits_{p\to +\infty} pF(p)$	$\lim\limits_{t\to +\infty} f(t) = \lim\limits_{p\to 0^+} pF(p)$

Remarque : Parler d'une valeur finale n'a de sens que si le système est stable, c'est-à-dire si la sortie tend vers une valeur stable. Vous verrez au cours de votre scolarité que cette condition de stabilité est associée à la condition suivante :

Un système est stable si tous les pôles (racines du dénominateur) de sa fonction de transfert qui est une fraction rationnelle ont leur partie réelle négative.

• **Applications**

Nous verrons bientôt que ces théorèmes permettent d'écrire une limite en p sur un quotient de polynômes au lieu de déterminer la limite de fonctions temporelles.

Pour calculer ces limites, il faut aborder la notion d'équivalents. Appelons $Q_{eq}(p)$ l'équivalent d'un quotient de polynômes $Q(p)$.

On note :

$$Q(p) \underset{0^+}{\sim} Q_{eq}^{0^+}(p)$$

$$Q(p) \underset{+\infty}{\sim} Q_{eq}^{+\infty}(p)$$

Connaissant cet équivalent, on aura alors :

$$\lim_{p \to 0^+} Q(p) = \lim_{p \to 0^+} Q_{eq}^{0^+}(p)$$

$$\lim_{p \to +\infty} Q(p) = \lim_{p \to +\infty} Q_{eq}^{+\infty}(p)$$

Nous admettrons qu'un quotient de polynômes est équivalent :

- En l'infini, au quotient du terme de plus haut degré du numérateur sur le terme de plus haut degré du dénominateur
- En zéro, au quotient du terme de plus bas degré du numérateur sur le terme de plus bas degré du dénominateur

$$\frac{b_m p^m + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \cdots + a_1 p + a_0} \underset{0^+}{\sim} \frac{b_0}{a_0}$$

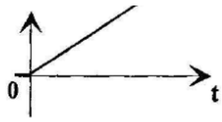
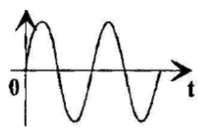
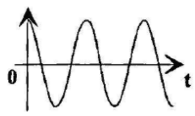
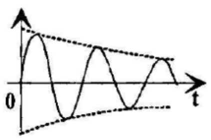
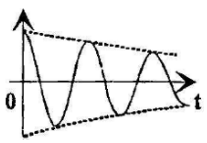
$$\frac{b_m p^m + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \cdots + a_1 p + a_0} \underset{+\infty}{\sim} \frac{b_m p^m}{a_n p^n} = \frac{b_m}{a_n} p^{m-n}$$

Exemple :

$$\lim_{p \to 0^+} \frac{p^3 + 2p^2 + p + 2}{2p^4 + 3p^2 + 5p + 1} = \lim_{p \to 0^+} 2 = 2$$

$$\lim_{p \to +\infty} \frac{p^3 + 2p^2 + p + 2}{2p^4 + 3p^2 + 5p + 1} = \lim_{p \to +\infty} \frac{p^3}{2p^4} = \lim_{p \to +\infty} \frac{1}{2p} = 0$$

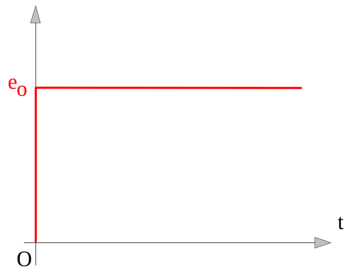
A.II.2.c Transformées usuelles

Allure	Fonction $f(t)$	Transformée de Laplace $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$	Pôles de $F(p)$
	$t \to \delta(t)$ Impulsion de DIRAC	1	RAS
	$t \to f(t) = u(t)$ Echelon unitaire	$F(p) = \frac{1}{p}$	0
	$t \to f(t) = tu(t)$ Rampe	$F(p) = \frac{1}{p^2}$	0 *Double*
	$t \to f(t) = t^n u(t)$ Fonction puissance	$F(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$	0 *D'ordre* $n+1$
	$t \to f(t) = e^{-at}u(t)$ Exponentielle	$F(p) = \frac{1}{p+a}$	$-a$
	$t \to f(t) = te^{-at}u(t)$ $t \to f(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)} e^{-at}u(t)$	$F(p) = \frac{1}{(p+a)^2}$ $F(p) = \frac{1}{(p+a)^n}$	$-a$ *Multiple*
	$t \to f(t) = \sin \omega t \, u(t)$ Sinus	$F(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\pm j\omega$
	$t \to f(t) = \cos \omega t \, u(t)$ Cosinus	$F(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\pm j\omega$
	$t \to f(t) = e^{-at} \sin \omega t \, u(t)$ Sinus amorti $t \to f(t) = ???$	$F(p) = \frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$ $F(p) = \frac{\omega}{[(p+a)^2 + \omega^2]^n}$	$-a \pm j\omega$ *Multiple*
	$t \to f(t) = e^{-at} \cos \omega t \, u(t)$ Cosinus amorti $t \to f(t) = ???$	$F(p) = \frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$ $F(p) = \frac{p+a}{[(p+a)^2 + \omega^2]^n}$	$-a \pm j\omega$ *Multiple*

$t \to f(t)$	$F(p)$
$t \to f'(t)$	$\mathcal{L}\big(f'(t)\big) = pF(p) - f(0^+)$
$t \to f''(t)$	$\mathcal{L}\big(f''(t)\big) = p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0^+)$
$\begin{cases} t \to f'(t) \\ f(0^+) = 0 \end{cases}$	$\mathcal{L}\big(f'(t)\big) = pF(p)$
....	....
$t \to f^{(n)}(t)$	$\mathcal{L}\left(f^{(n)}(t)\right) = p^nF(p) - p^{n-1}f(0^+) - p^{n-2}f'(0^+) - \cdots - f^{(n-1)}(0^+)$
$\begin{cases} t \to f^{(n)}(t) \\ f(0^+) = 0 \\ \dots \\ f^{(n-1)}(0^+) = 0 \end{cases}$	$\mathcal{L}\big(f^n(t)\big) = p^nF(p)$
$\begin{cases} t \to \int_0^t f(t)dt = f_p(t) \\ f_p(0^+) = 0 \end{cases}$ f_p primitive de f	$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(t)dt\right) = \frac{F(p)}{p}$
$t \to t^nf(t)$	$\mathcal{L}\big(t^nf(t)\big) = (-1)^nF^{(n)}(p)$
$t \to e^{-at}f(t)$	$\mathcal{L}\big(e^{-at}f(t)\big) = F(p+a)$
Théorème du retard	$\mathcal{L}\big(f(t-T)\big) = e^{-Tp}F(p)$
Théorème de la valeur finale	$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{p\to0^+} pF(p)$
Théorème de la valeur initiale	$\lim_{t\to0^+} f(t) = \lim_{p\to+\infty} pF(p)$
Equivalents $Q(p) \underset{0^+}{\sim} Q_{eq}^{0^+}(p)$ $Q(p) \underset{+\infty}{\sim} Q_{eq}^{+\infty}(p)$ $\lim_{p\to0^+} Q(p) = \lim_{p\to0^+} Q_{eq}^{0^+}(p)$ $\lim_{p\to+\infty} Q(p) = \lim_{p\to+\infty} Q_{eq}^{+\infty}(p)$	$\frac{b_mp^m + \cdots + b_1p + b_0}{a_np^n + \cdots + a_1p + a_0} \underset{0^+}{\sim} \frac{b_0}{a_0}$ $\frac{b_mp^m + \cdots + b_1p + b_0}{a_np^n + \cdots + a_1p + a_0} \underset{+\infty}{\sim} \frac{b_mp^m}{a_np^n} = \frac{b_m}{a_n}p^{m-n}$

A.II.2.d Exemple de calcul de transformée de Laplace

A.II.2.d.i Echelon



$$f(t) = e_0 u(t)$$

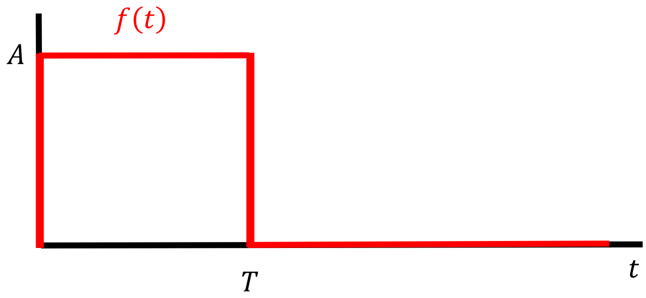
$$F(p) = \mathcal{L}\big(f(t)\big) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt}\, dt$$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e_0 u(t) e^{-pt}\, dt = e_0 \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, dt = e_0 \left[-\frac{1}{p} e^{-pt}\right]_0^{+\infty} = -\frac{e_0}{p}\left(\lim_{t\to+\infty} e^{-pt} - e^0\right)$$

$$F(p) = \frac{e_0}{p}$$

A.II.2.d.ii Signal issu de signaux usuels

Soit le signal suivant :



$$f(t) = \begin{cases} A \; si \; t \in [0;T] \\ 0 \; si \; t > T \end{cases}$$

Pour déterminer sa transformée de Laplace

- soit on calcul l'intégrale complète :

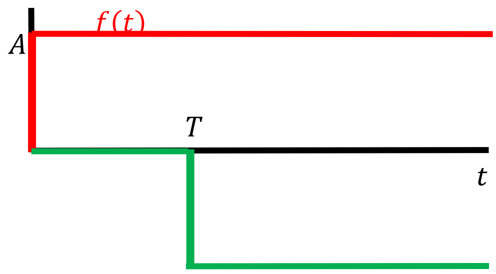
$$F(p) = \mathcal{L}\big(f(t)\big) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt}\, dt$$

$$F(p) = \int_0^{T} f(t) e^{-pt}\, dt + \int_T^{++\infty} f(t) e^{-pt}\, dt$$

$$F(p) = A \int_0^{T} e^{-pt}\, dt = A \left[-\frac{1}{p} e^{-pt}\right]_0^{T}$$

$$F(p) = \frac{A}{p}\left(1 - e^{-pT}\right)$$

- Soit on reconnaît la somme de deux signaux usuels : Un échelon normal et un échelon inversé et retardé de T



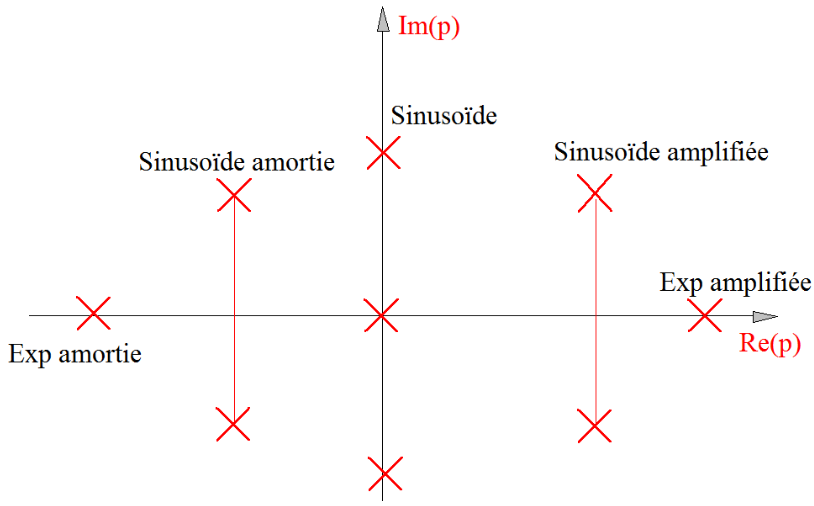
$$g(t) = Au(t)$$
$$f(t) = g(t) - g(t - T)$$

$$F(p) = \frac{A}{p} - \frac{A}{p}e^{-pT} = \frac{A}{p}(1 - e^{-pT})$$

A.II.2.e Fonction de transfert et allure réelle

Connaissant l'expression dans le domaine de Laplace d'une fonction $F(p)$, le graphique suivant donne la forme de cette fonction dans le domaine temporel $f(t)$.

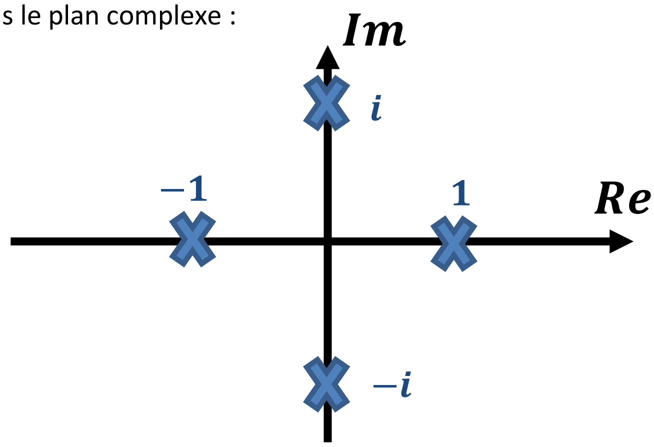
On représente dans le plan complexe les différents pôles de la fonction de transfert $F(p)$ d'une fonction temporelle $f(t)$ et on sait quelle est la forme de la fonction temporelle concernée.



Exemple : Soit

$$F(p) = \frac{10}{p^4 - 1}$$

Les pôles de $F(p)$ sont $(-1,1,-i,i)$. En utilisant le schéma ci-dessus, on place à l'aide de croix les différents pôles de F dans le plan complexe :



On sait donc que $f(t)$ sera composée des fonctions :

Exponentielle amortie – Exponentielle amplifiée – 2 Sinusoïdes

Preuve : (cf décomposition en éléments simples vue au paragraphe suivant)

$$F(p) = \frac{10}{(p^2-1)(p^2+1)} = \frac{10}{(p+1)(p-1)(p^2+1)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p-1} + \frac{Cp+D}{p^2+1}$$

$$f(t) = u(t)[Ae^{-t} + Be^{t} + C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)]$$

A.II.2.f Résolution d'équations différentielles

A.II.2.f.i Méthode

Données :

- Equation différentielle :
$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t)$$
- Entrée temporelle du système $e(t)$ donnée
- Conditions initiales données (nulles ?)

Objectif : Recherche de la réponse temporelle du système $s(t)$

Démarche :

- Traduction de l'équation différentielle dans le domaine de Laplace
- Calcul de la fonction de transfert $H(p)$
- Calcul de l'entrée dans le domaine de Laplace $E(p)$
- Détermination de la fraction rationnelle de polynômes correspondant à la sortie $S(p)$
- Décomposition du polynôme en éléments simples
- Détermination de la sortie temporelle $s(t)$ par transformation de Laplace inverse des éléments simples à l'aide du tableau des transformées (il est utile de regarder les dénominateurs des fonctions de transfert afin de trouver les transformées de Laplace associées

A.II.2.f.ii Décomposition en éléments simples

• **Démarche**

Faisons ici quelques rappels sur la décomposition en éléments simples.

Tout polynôme de $R[X]$ se décompose de manière unique en un produit de la forme :

$$B(X) = a(X - r_1)^{m_1} \dots (X - r_m)^{m_p} (X^2 + b_1 X + c_1)^{n_1} \dots \left(X^2 + b_q X + c_q\right)^{n_q}$$

Remarque : dans le domaine complexe, on peut se ramener à un produit de polynômes de degré 1 en utilisant les racines complexes conjuguées r_i^c et $\overline{r_i^c}$:

$$B(X) = a(X - r_1)^{m_1} \dots (X - r_m)^{m_p} \left[(X - r_1^c)\left(X - \overline{r_1^c}\right)\right]^{n_1} \dots \left[\left(X - r_q^c\right)\left(X - \overline{r_q^c}\right)\right]^{n_q}$$

Dans le domaine réel, on a ainsi un produit de :

- Polynômes d'ordre 1
- Polynômes d'ordre 2 non factorisables en produit de polynômes d'ordre 1 (discriminent strictement négatif)

Soit une fraction rationnelle $\frac{R(X)}{B(X)}$ telle que : $\deg R < \deg B$

Dans les systèmes causaux, on a toujours cette condition.

Alors :

$$\frac{R(X)}{B(X)} = \frac{R(X)}{a(X-r_1)^{m_1} \dots (X-r_m)^{m_p}(X^2+b_1X+c_1)^{n_1} \dots \left(X^2+b_qX+c_q\right)^{n_q}}$$

$$\frac{R(X)}{B(X)} = \sum_i \sum_k \frac{A_{ik}}{(X-r_i)^k} + \sum_j \sum_k \frac{B_{jk}x + C_{jk}}{\left(X^2+b_jX+c_j\right)^k}$$

La détermination des coefficients A_{ik}, B_{jk}, C_{jk} effectuée en :

- (Méthode 1) Soit en mettant la somme ci-dessus au même dénominateur puis en égalisant les termes de même degré afin d'obtenir un système d'équations à résoudre. Cette méthode fonctionne sans difficultés particulières, mais est assez longue à mettre en œuvre.
- (Méthode 2) Soit en effectuant des opérations sur les deux termes de l'égalité (multiplication par un terme bien choisi, dérivations …) et en prenant des valeurs particulières de x, en étudiant des limites… Cette méthode est extrêmement simple si le dénominateur est un produit de polynômes de degré
  - 1 : $\prod(x-x_i)$
  - n : $(x-x_i)^n$ où n est le degré maximum associé à la racine x_i

  mais se complique s'il existe des termes
  - $(x-x_i)^n$ (n inférieur au degré maximal de la racine x_i)
  - de degré 2 à racines imaginaires (ax^2+bx+c). Nous ne traiterons que le cas simple dans ce cours.
- (Méthode 3) Soit en créant autant d'équations que de paramètres à déterminer pour des valeurs quelconques de p qui ne sont pas des zéros de la fonction de transfert pour lesquels elle n'est pas définie

Remarque : pour les fractions rationnelles faisant apparaître les deux types de termes, il sera toujours possible de déterminer les constantes associées aux termes simples par la méthode 2 puis d'utiliser la méthode 1 où 3 pour déterminer les autres, la méthode 3 étant très pratique s'il ne reste qu'un terme à déterminer

• Exemple 1 : forme d'une décomposition

Donner la forme de la décomposition en éléments simples de $\frac{x^3-21x-7}{(x-1)^2(x+2)(x^2+x+1)}$

On sait qu'on peut écrire l'égalité suivante :

$$\frac{x^3-21x-7}{(x-1)^2(x+2)(x^2+x+1)} = \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x+2)} + \frac{B_1x+C_1}{(x^2+x+1)}$$

• Exemple 2 : détermination des coefficients par 2 méthodes

Prenons un exemple un peu plus simple : déterminer les coefficients A_1, B_1 et C_1

$$\frac{x^2-6x-1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{B_1x+C_1}{(x^2+x+1)}$$

Méthode 1 : même dénominateur

$$\frac{x^2-6x-1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A_1x^2+A_1x+A_1}{(x-1)(x^2+x+1)} + \frac{B_1x^2+C_1x-B_1x-C_1}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$\frac{x^2-6x-1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{(A_1+B_1)x^2+(A_1+C_1-B_1)x+(A_1-C_1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

Soit

$$\begin{cases} A_1+B_1=1 \\ A_1+C_1-B_1=-6 \\ A_1-C_1=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1=1-B_1 \\ 1-B_1+C_1-B_1=-6 \\ C_1=A_1+1=1-B_1+1=2-B_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1=1-B_1 \\ 1-B_1+2-B_1-B_1=-6 \\ C_1=2-B_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1=1-B_1 \\ 3-3B_1=-6 \\ C_1=2-B_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1=1-B_1=-2 \\ B_1=2+1=3 \\ C_1=2-B_1=-1 \end{cases}$$

$$\frac{x^2-6x-1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{-2}{(x-1)} + \frac{3x-1}{(x^2+x+1)}$$

Méthode 2 : Astuces, dans les cas simples avec uniquement des termes en $(x-a)$, fonctionne bien…

$$\frac{x^2-6x-1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{B_1x+C_1}{(x^2+x+1)}$$

Multiplions les deux termes de l'égalité par $(x-1)$

$$\frac{x^2-6x-1}{(x^2+x+1)} = A_1 + (x-1)\frac{B_1x+C_1}{(x^2+x+1)}$$

Prenons la valeur particulière où $x=1$

$$\frac{1-6-1}{(1+1+1)} = A_1 + (1-1)\frac{B_1*1+C_1}{(1+1+1)}$$

$$A_1=-2$$

En réalité, nous ne devrions pas parler de la valeur en $x = 1$ car la fonction que nous avons multiplié par $(x-1)$ n'est pas définie en $x = 1$. Pour être rigoureux mathématiquement (bien que le résultat soit le même car nos fonctions multipliées sont prolongeables par continuité), il faut écrire :

$$A_1 = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 6x - 1}{(x^2 + x + 1)} = -2$$

Ou, d'une manière générale, pour tout pôle a d'ordre 1 d'une fonction $H(x) = \frac{P_1(x)}{(x-a)P_2(x)} = H'(x) + \frac{A}{(x-a)}$ où $P_1(x)$ et $P_2(x)$ sont des polynômes de x :

$$A = \lim_{x \to a} [(x-a)H(x)] = \lim_{x \to a} \left[\frac{P_1(x)}{P_2(x)}\right]$$

En effet :

$$\lim_{x \to a} [(x-a)H(x)] = \lim_{x \to a} \left[(x-a)\left(H'(x) + \frac{A}{(x-a)}\right)\right] = \lim_{x \to a} [(x-a)H'(x) + A] = A$$

$$(x-a)H(x) = (x-a)\frac{P_1(x)}{(x-a)P_2(x)} = \frac{P_1(x)}{P_2(x)}$$

Ensuite, les choses se complique un peu : une multiplication par $\boldsymbol{(x^2 + x + 1)}$ ne vas pas permettre de prendre une racine réelle. Il faut donc passer par les complexes :

$$\frac{x^2 - 6x - 1}{(x-1)} = \frac{A_1}{(x-1)}(x^2 + x + 1) + B_1 x + C_1$$

Soit x_1 et x_2 les racines de $x^2 + x + 1$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

On obtient un système

$$\begin{cases} \dfrac{{x_1}^2 - 6x_1 - 1}{(x_1 - 1)} = B_1 x_1 + C_1 \\ \dfrac{{x_2}^2 - 6x_2 - 1}{(x_2 - 1)} = B_1 x_2 + C_1 \end{cases}$$

Nous n'irons pas plus loin… Ce n'est pas notre objectif, ces méthodes seront vues en mathématiques.

Dans ce cas, on utilise le résultat pour A_1, soit :

$$\frac{x^2 - 6x - 1}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{3}{(x-1)} + \frac{B_1 x + C_1}{(x^2 + x + 1)}$$

Puis on applique la méthode 1 (même dénominateur) ou 3 (valeurs quelconques de x) avec maintenant uniquement deux variables à déterminer. La méthode 3 est très pratique lorsqu'il ne reste qu'une variable à déterminer.

Remarque : Lors que l'on a un terme du type $\frac{A_n}{(x-1)^n}$, $n \geq 2$, ce n'est plus aussi simple :

$$\frac{A_1}{(x-1)}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(x-1)^n}$$

Il n'y a que la multiplication par $(x-1)^n$ qui permet de déterminer A_n en $x=1$, pour les multiplications par $(x-1)^i, i<n$ ilrestera des termes $(x-1)^{n-i}$ aux dénominateurs qui ne permettent de prendre des valeurs particulières en $x=1$

Bilan : on peut grâce à cette méthode déterminer très simplement tous les termes en $(x-x_i)^n$ lorsque n est le degré maximum de la racine x_i.

• **Erreur à ne pas faire**

Soit la fraction suivante :

$$\frac{1}{x^2-2x+1}$$

Pour proposer la forme de sa décomposition en éléments simples, il faut être sûr que les polynômes au dénominateur sont d'ordre 1 ou d'ordre 2 à discriminent strictement négatif. Sinon, il faut les factoriser en produit de polynômes d'ordre 1.

$\cancel{\frac{1}{x^2-2x+1}=\frac{Ax+B}{x^2-2x+1}}$	$\frac{1}{x^2-2x+1}=\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-1)^2}$

A.II.2.f.iii Applications de transformations de Laplace inverses

• **Application 1 : transformée de Laplace inverse (TLI) simple**

Soit la fonction de transfert d'une fonction $s(t)$:

$$S(p)=\frac{1}{p-1}+\frac{4}{p+2}$$

On reconnaît le terme $\frac{1}{p+a}$ qui est la transformée de laplace de $e^{-at}u(t)$

On a donc :

$$s(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p-1}+\frac{4}{p+2}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+(-1)}\right)+4\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+2}\right)=(e^t+4e^{-2t})u(t)$$

• **Application 2 : TLI avec polynôme de degré 2 simple au dénominateur**

Soit la fonction de transfert d'une fonction $s(t)$:

$$S(p) = \frac{3p-2}{p^2+2p+2}$$

Méthode classique : Passer par les réels

Dans un premier temps, il est nécessaire de faire disparaître le polynôme de degré 2 du dénominateur sous cette forme en le factorisant sous forme canonique afin de reconnaître l'une des fonctions du tableau des transformées de Laplace :

$$p^2+2p+2 = (p+1)^2+1$$

Forme canonique d'un polynôme

$$f(x) = ax^2+bx+c = a(x-\alpha)^2+\beta$$

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad ; \quad \beta = f(\alpha)$$

On a donc :

$$S(p) = \frac{3p-2}{(p+1)^2+1}$$

On voit ici que l'on fait apparaître des fonctions qui ressemblent à des fonctions du tableau des transformées de Laplace :

$$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2} \quad ; \quad \frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$$

Il reste donc à effectuer des transformations, judicieuses, permettant de se rapporter à ces exemples :

$$S(p) = \frac{3(p+1)-5}{(p+1)^2+1^2}$$

$$S(p) = 3\frac{(p+1)}{(p+1)^2+1^2} - 5\frac{1}{(p+1)^2+1^2}$$

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(3\frac{(p+1)}{(p+1)^2+1^2} - 5\frac{1}{(p+1)^2+1^2}\right)$$

$$s(t) = [3e^{-t}\cos(t) - 5e^{-t}\sin(t)]\,u(t)$$

Méthode complexe : Passer par les complexes

Pour les polynômes irréductibles au dénominateur, le passage par les complexes fonctionne aussi bien :

$$\left[\left(p-a_j\right)^2+{b_j}^2\right]=\left[\left[p-\left(a_j+ib_j\right)\right]\left[p-\left(a_j-ib_j\right)\right]\right]$$

Prenons un exemple simple :

$$S(p)=\frac{3}{p^2-p+1}$$

Méthode classique à l'aide du tableau des transformées de Laplace :

$$S(p)=\frac{3}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=2\sqrt{3}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \quad ; \quad s(t)=2\sqrt{3}e^{\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

Méthode par éléments simples complexes d'ordre 1:

$$\Delta=1-4=-3 \quad ; \quad \begin{cases} p_1=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}} \\ p_2=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}=e^{-i\frac{\pi}{3}} \end{cases}$$

$$S(p)=\frac{3}{p^2-p+1}=\frac{3}{\left(p-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(p-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)}$$

$$S(p)=\frac{A}{\left(p-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)}+\frac{B}{\left(p-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)}=\frac{\left(Ap-Ae^{-i\frac{\pi}{3}}\right)+\left(Bp-Be^{i\frac{\pi}{3}}\right)}{(p+1)^2+1}=\frac{(A+B)p-\left(Ae^{-i\frac{\pi}{3}}+Be^{i\frac{\pi}{3}}\right)}{(p+1)^2+1}$$

Soit :

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -\left(Ae^{-i\frac{\pi}{3}}+Be^{i\frac{\pi}{3}}\right)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-B \\ \left(-Be^{-i\frac{\pi}{3}}+Be^{i\frac{\pi}{3}}\right)=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-B \\ B\left(e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)=-3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A=-\sqrt{3}i \\ B=\dfrac{-3}{2i\sin\frac{\pi}{3}}=\dfrac{-3}{2i\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{3i}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}i \end{cases}$$

Finalement, on a :

$$S(p)=\frac{-\sqrt{3}i}{\left(p-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)}+\frac{\sqrt{3}i}{\left(p-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)}$$

Vérifions qu'il n'y a pas d'erreurs :

$$S(p) = -\sqrt{3}i\frac{\left(p - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) - \left(p - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)}{\left(p - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(p - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)} = -\sqrt{3}i\frac{\left(p - e^{-i\frac{\pi}{3}} - p + e^{i\frac{\pi}{3}}\right)}{\left(p - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(p - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)}$$

$$S(p) = -\sqrt{3}i\frac{\left(e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)}{\left(p - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(p - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)} = -\sqrt{3}i\frac{2i\sin\frac{\pi}{3}}{p^2 - p + 1} = -\sqrt{3}i\frac{2i\frac{\sqrt{3}}{2}}{p^2 - p + 1} = \frac{3}{p^2 - p + 1}$$

On a donc bien :

$$S(p) = \sqrt{3}i\left[\frac{1}{p - e^{-i\frac{\pi}{3}}} - \frac{1}{p - e^{i\frac{\pi}{3}}}\right]$$

Appliquons la transformée de Laplace inverse $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+a}\right) = e^{-at}$:

$$s(t) = \sqrt{3}i\left[e^{e^{-i\frac{\pi}{3}}t} - e^{e^{i\frac{\pi}{3}}t}\right]$$

$$s(t) = \sqrt{3}i\left[e^{\frac{1-\sqrt{3}i}{2}t} - e^{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}t}\right]$$

$$s(t) = \sqrt{3}ie^{\frac{1}{2}t}\left[e^{-\frac{\sqrt{3}i}{2}t} - e^{\frac{\sqrt{3}i}{2}t}\right] = -\sqrt{3}ie^{\frac{1}{2}t}\left[e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}t} - e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}t}\right]$$

On peut utiliser les formules d'Euler :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad ; \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$s(t) = -\sqrt{3}ie^{\frac{1}{2}t}2i\left(\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$s(t) = -2\sqrt{3}e^{\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

On retrouve bien la même solution.

J'ai détaillé cette démarche dans le cours de 1° année pour illustrer le cours sur la stabilité en 2° année. Le petit 1° année de prépa pourra ne pas la connaître !

• **Application 2 : TLI avec polynôme de degré 2 multiple au dénominateur**

J'ai détaillé cette démarche dans le cours de 1° année pour illustrer le cours sur la stabilité en 2° année. Le petit 1° année de prépa pourra ne pas la connaître !

$$S(p)=\frac{3}{(p^2-p+1)^2}=2\sqrt{3}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left[\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]^2}$$

Méthode classique : il n'y en a pas, le tableau des transformées de Laplace ne nous donne pas ce cas

$$\frac{p+a}{[(p+a)^2+\omega^2]^n} \quad ; \quad \frac{\omega}{[(p+a)^2+\omega^2]^n}$$

Méthode par éléments simples complexes d'ordre 1:

$$S(p)=\frac{3}{(p^2-p+1)^2}=\frac{3}{\left(p-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2\left(p-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^2}$$

$$S(p)=\frac{A_1}{\left(p-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)}+\frac{A_2}{\left(p-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2}+\frac{B_1}{\left(p-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)}+\frac{B_2}{\left(p-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^2}$$

Soit :

$$\frac{3}{(p^2-p+1)^2}=\frac{A_1}{\left(p-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)}+\frac{A_2}{\left(p-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2}+\frac{B_1}{\left(p-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)}+\frac{B_2}{\left(p-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^2}$$

Multiplions par	Valeur en p=	
$\left(p-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2$	$e^{i\frac{\pi}{3}}$	$A_2=\frac{3}{\left(e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^2}=\frac{3}{\left(2i\sin\frac{\pi}{3}\right)^2}=\frac{3}{\left(2i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{3}{\left(i\sqrt{3}\right)^2}=\frac{3}{-3}=-1$
$\left(p-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^2$	$e^{-i\frac{\pi}{3}}$	$B_2=\frac{3}{\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2}=\frac{3}{\left(e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^2}=-1$

Soit :

$$\frac{3}{(p^2-p+1)^2}=\frac{A_1}{\left(p-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)}-\frac{1}{\left(p-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2}+\frac{B_1}{\left(p-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)}-\frac{1}{\left(p-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^2}$$

Prenons deux valeurs particulières :

<table>
<tr>
<td>0</td>
<td>
$$\frac{3}{(1)^2} = \frac{A_1}{\left(-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)} - \frac{1}{\left(-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2} + \frac{B_1}{\left(-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)} - \frac{1}{\left(-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^2}$$
$$3 = -\frac{A_1}{e^{i\frac{\pi}{3}}} - \frac{1}{e^{i\frac{2\pi}{3}}} - \frac{B_1}{e^{-i\frac{\pi}{3}}} - \frac{1}{e^{-i\frac{2\pi}{3}}}$$
$$3e^{i\frac{\pi}{3}} = -A_1 - \frac{1}{e^{i\frac{\pi}{3}}} - \frac{B_1 e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}} - \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{-i\frac{2\pi}{3}}}$$
$$3e^{i\frac{\pi}{3}} = -A_1 - \frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{\pi}{3}}} - \frac{B_1 e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{\pi}{3}}} - \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{2\pi}{3}}}{e^{-i\frac{2\pi}{3}}e^{i\frac{2\pi}{3}}}$$
$$3e^{i\frac{\pi}{3}} = -A_1 - e^{-i\frac{\pi}{3}} - B_1 e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\pi}$$
$$3e^{i\frac{\pi}{3}} = -A_1 - e^{-i\frac{\pi}{3}} - B_1 e^{i\frac{2\pi}{3}} + 1$$
$$A_1 + B_1 e^{i\frac{2\pi}{3}} = -3e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{-i\frac{\pi}{3}} + 1$$
$$A_1 + B_1 e^{i\frac{2\pi}{3}} = -2e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{-i\frac{\pi}{3}} + 1$$
$$A_1 + B_1 e^{i\frac{2\pi}{3}} = -2e^{i\frac{\pi}{3}} - \left(e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) + 1$$
$$e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1$$
$$A_1 + B_1 e^{i\frac{2\pi}{3}} = -2e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 + 1$$
$$A_1 + B_1 e^{i\frac{2\pi}{3}} = -2e^{i\frac{\pi}{3}}$$
</td>
</tr>
<tr>
<td>$-e^{i\frac{\pi}{3}}$</td>
<td>
$$\frac{3}{\left(-e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2\left(-e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^2} = \frac{A_1}{\left(-e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)} - \frac{1}{\left(-e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2} + \frac{B_1}{\left(-e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)} - \frac{1}{\left(-e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^2}$$
$$\frac{3}{4e^{i\frac{2\pi}{3}}\left(e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^2} = -\frac{A_1}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} - \frac{1}{4e^{i\frac{2\pi}{3}}} - \frac{B_1}{\left(e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)} - \frac{1}{\left(e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^2}$$
$$e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}} = 1$$
$$\frac{3}{4e^{i\frac{2\pi}{3}}} + \frac{1}{4e^{i\frac{2\pi}{3}}} = -\frac{A_1}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} - B_1 - 1$$
$$\frac{1}{e^{i\frac{2\pi}{3}}} = -\frac{A_1}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} - (B_1 + 1)$$
$$\frac{2}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = -A_1 - 2e^{i\frac{\pi}{3}}(B_1 + 1)$$
$$2 = -A_1 e^{i\frac{\pi}{3}} - 2e^{i\frac{2\pi}{3}}(B_1 + 1)$$
</td>
</tr>
</table>

Résolution :

$$\begin{cases} 2 = -A_1 e^{i\frac{\pi}{3}} - 2e^{i\frac{2\pi}{3}}(B_1 + 1) \\ A_1 + B_1 e^{i\frac{2\pi}{3}} = -2e^{i\frac{\pi}{3}} \end{cases}$$

$$A_1 = -2e^{i\frac{\pi}{3}} - B_1 e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$2 = -A_1 e^{i\frac{\pi}{3}} - 2e^{i\frac{2\pi}{3}}(B_1 + 1)$$

$$\Leftrightarrow 2 = -\left(-2e^{i\frac{\pi}{3}} - B_1 e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) e^{i\frac{\pi}{3}} - 2e^{i\frac{2\pi}{3}}(B_1 + 1)$$

$$\Leftrightarrow 2 = \left(2e^{i\frac{2\pi}{3}} + B_1 e^{i\pi}\right) - 2e^{i\frac{2\pi}{3}}(B_1 + 1)$$

$$\Leftrightarrow 2 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} - B_1 - 2e^{i\frac{2\pi}{3}} B_1 - 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow 2 = -B_1\left(1 + 2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)$$

$$e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow B_1 = -\frac{2}{1 + 2e^{i\frac{2\pi}{3}}} = -\frac{2}{1 - 1 + i\sqrt{3}} = -\frac{2}{i\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} i$$

$$A_1 = -2e^{i\frac{\pi}{3}} - B_1 e^{i\frac{2\pi}{3}} = -1 - i\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} i \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = -1 - i\sqrt{3} - \frac{-\sqrt{3}i - 3}{3}$$

$$A_1 = \frac{-3 - 3\sqrt{3}i + \sqrt{3}i + 3}{3} = \frac{-2\sqrt{3}}{3} i$$

Finalement :

$$\frac{3}{(p^2-p+1)^2}=\frac{\frac{-2\sqrt{3}}{3}i}{\left(p-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)}-\frac{1}{\left(p-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2}+\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}i}{\left(p-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)}-\frac{1}{\left(p-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^2}$$

Soit :

$$s(t)=\left[\frac{-2\sqrt{3}}{3}ie^{e^{i\frac{\pi}{3}}t}-te^{e^{i\frac{\pi}{3}}t}+\frac{2\sqrt{3}}{3}ie^{e^{-i\frac{\pi}{3}}t}-te^{e^{-i\frac{\pi}{3}}t}\right]u(t)$$

$$s(t)=\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}i\left(e^{e^{-i\frac{\pi}{3}}t}-e^{e^{i\frac{\pi}{3}}t}\right)-t\left(e^{e^{-i\frac{\pi}{3}}t}+e^{e^{i\frac{\pi}{3}}t}\right)\right]u(t)$$

On a :

$$e^{e^{-i\frac{\pi}{3}}t}+e^{e^{i\frac{\pi}{3}}t}=e^{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}t}+e^{\frac{1-\sqrt{3}i}{2}t}=e^{\frac{1}{2}t}\left(e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}t}+e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}t}\right)=e^{\frac{1}{2}t}2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$e^{e^{-i\frac{\pi}{3}}t}-e^{e^{i\frac{\pi}{3}}t}=e^{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}t}-e^{\frac{1-\sqrt{3}i}{2}t}=e^{\frac{1}{2}t}\left(e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}t}-e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}t}\right)=e^{\frac{1}{2}t}2i\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$s(t)=\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}ie^{\frac{1}{2}t}2i\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)-te^{\frac{1}{2}t}2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]u(t)$$

$$s(t)=\left[-\frac{4\sqrt{3}}{3}e^{\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)-2te^{\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]u(t)$$

A.II.2.f.iv Application à la résolution d'une équation différentielle

• **Application 1 : Equation différentielle simple**

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2}-3\frac{ds(t)}{dt}+2s(t)=e(t)$$

On suppose toutes les conditions initiales nulles. L'entrée $e(t)$ est un échelon unitaire : $e(t)=u(t)$.

Pour résoudre cette équation, on la passe dans le domaine de Laplace et on exprime $\frac{S(p)}{E(p)}$:

$$p^2S(p)-3pS(p)+2S(p)=E(p)$$

$$(p^2-3p+2)S(p)=E(p)$$

$$\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{1}{p^2-3p+2}$$

On a :

$$E(p) = \frac{1}{p}$$

Donc :

$$S(p) = \frac{1}{p(p^2 - 3p + 2)}$$

Il faut maintenant décomposer $S(p)$ en éléments simples, on peut se rendre compte que le polynôme de degré 2 a un discriminent positif, on a donc :

$$S(p) = \frac{1}{p(p-1)(p-2)}$$

On peut donc proposer le décomposition suivante :

$$S(p) = \frac{1}{p(p-1)(p-2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{(p-1)} + \frac{C}{(p-2)}$$

Comme chaque dénominateur est simple, on peut utiliser la méthode vue précédemment (méthode 2 : multiplication par le dénominateur puis annulation de ce terme)

On obtient :

$$A = \frac{1}{2} \quad ; \quad B = -1 \quad ; \quad C = \frac{1}{2}$$

$$S(p) = \frac{1}{2}\frac{1}{p} - \frac{1}{(p-1)} + \frac{1}{2}\frac{1}{(p-2)}$$

Il reste à appliquer la transformée de Laplace inverse à $S(p)$

$$s(t) = \left(\frac{1}{2} - e^t + \frac{1}{2}e^{2t}\right)u(t)$$

Vérifions que cette solution est correcte :

$$\frac{ds(t)}{dt} = (-e^t + e^{2t})u(t) \quad ; \quad \frac{d^2s(t)}{dt^2} = (-e^t + 2e^{2t})u(t)$$

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} - 3\frac{ds(t)}{dt} + 2s(t) = \left(-e^t + 2e^{2t} - 3(-e^t + e^{2t}) + 2\left(\frac{1}{2} - e^t + \frac{1}{2}e^{2t}\right)\right)u(t)$$

$$= (-e^t + 2e^{2t} + 3e^t - 3e^{2t} + 1 - 2e^t + e^{2t})u(t) = u(t) = e(t)$$

$$cqfd$$

• **<u>Application 2 : Equation différentielle plus complexe</u>**

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^3s(t)}{dt^3} - s(t) = \frac{d^2e(t)}{dt^2} - 6\frac{de(t)}{dt} - e(t)$$

On suppose toutes les conditions initiales nulles.

Pour résoudre cette équation, on la passe dans le domaine de Laplace et on exprime $\frac{S(p)}{E(p)}$:

$$p^3S(p) - S(p) = p^2E(p) - 6pE(p) - E(p)$$

$$(p^3 - 1)S(p) = (p^2 - 6p - 1)E(p)$$

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{p^2 - 6p - 1}{p^3 - 1}$$

Supposons que l'entrée soit une impulsion : $E(p) = 1$

On a donc :

$$S(p) = \frac{p^2 - 6p - 1}{p^3 - 1}$$

Il faut factoriser le dénominateur, donnons le résultat :

$$p^3 - 1 = (p - \mathbf{1})(p^2 + p + 1)$$

(cf méthode Horner avec racine évidente par exemple)

Donc :

$$S(p) = \frac{p^2 - 6p - 1}{(p - 1)(p^2 + p + 1)}$$

On a montré que :

$$S(p) = \frac{-2}{(p - 1)} + \frac{3p - 1}{(p^2 + p + 1)}$$

Transformons les termes afin de reconnaître des fonctions du tableau des transformées de Laplace :

$$S(p) = \frac{-2}{(p - 1)} + \frac{3p - 1}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

On voit ici que l'on fait apparaître des fonctions qui ressemblent à des fonctions du tableau des transformées de Laplace :

$$\frac{1}{p + a} \quad ; \quad \frac{p + a}{(p + a)^2 + \omega^2} \quad ; \quad \frac{\omega}{(p + a)^2 + \omega^2}$$

Il reste donc à effectuer des transformations, judicieuses, permettant de se rapporter à ces exemples :

$$S(p)=\frac{-2}{(p-1)}+3\frac{p+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{-1}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$S(p)=\frac{-2}{(p-1)}+3\frac{p+\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\sqrt{\frac{3}{4}}^2}+\frac{-\frac{3}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\sqrt{\frac{3}{4}}^2}+\frac{-1}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\sqrt{\frac{3}{4}}^2}$$

$$S(p)=\frac{-2}{(p-1)}+3\frac{p+\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\sqrt{\frac{3}{4}}^2}+\frac{-\frac{5}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\sqrt{\frac{3}{4}}^2}$$

$$S(p)=\frac{-2}{(p-1)}+3\frac{p+\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\sqrt{\frac{3}{4}}^2}+\frac{-\frac{5}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}\sqrt{\frac{4}{3}}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\sqrt{\frac{3}{4}}^2}$$

$$S(p)=\frac{-2}{(p-1)}+3\frac{\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\sqrt{\frac{3}{4}}^2}-\frac{5}{2}\sqrt{\frac{4}{3}}\frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\sqrt{\frac{3}{4}}^2}$$

$$S(p)=\frac{-2}{(p-1)}+3\frac{\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\sqrt{\frac{3}{4}}^2}-\frac{5}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\sqrt{\frac{3}{4}}^2}$$

Il reste, pour trouver les solutions temporelles de l'équation, à appliquer les transformées de Laplace inverse :

$$s(t)\left[=-2e^t+3e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\sqrt{\frac{3}{4}}t\right)-\frac{5}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\sqrt{\frac{3}{4}}t\right)\right]$$

A.III. Fonctions de transfert et schéma blocs

A.III.1 Fonction de transfert d'un système dans le domaine de Laplace

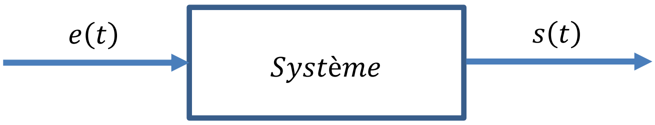
A.III.1.a Détermination de la fonction de transfert

A.III.1.a.i Principe

Le système représenté par le modèle introduit précédemment :

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s = b_m \frac{d^m e}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{de}{dt} + b_0 e$$

Se représente ainsi :



Supposons que toutes les conditions initiales sont nulles. Cette condition est appelée **« condition de Heaviside »**.

Appliquons la transformation de Laplace à son modèle :

$$\mathcal{L}\left(a_n \frac{d^n s}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s\right) = \mathcal{L}\left(b_m \frac{d^m e}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{de}{dt} + b_0 e\right)$$

$$a_n p^n S(p) + \cdots + a_1 p S(p) + a_0 S(p) = b_m p^m E(p) + \cdots + b_1 p E(p) + b_0 E(p)$$

$$(a_n p^n + \cdots + a_1 p + a_0) S(p) = (b_m p^m + \cdots + b_1 p + b_0) E(p)$$

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \cdots + a_1 p + a_0}$$

On introduit dont la fonction de transfert FT (ou transmittance) $H(p)$ telle que :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \cdots + a_1 p + a_0} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

$N(p)$ est le numérateur de $H(p)$

$D(p)$ est le dénominateur de $H(p)$

La relation entrée/sortie du système dans le domaine de Laplace se met sous la forme :

$$S(p) = H(p) E(p)$$

$H(p)$ représente de manière intrinsèque (indépendante de l'entrée) le comportement du système. Elle est caractéristique du système, qu'elle représente mathématiquement. C'est une fraction rationnelle en p.

Si l'on explicite les racines réelles et complexes des polynômes numérateur (z_i) et dénominateur (p_i), on peut écrire $H(p)$ sous la forme :

$$H(p) = k\frac{(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_m)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)} \quad ; \quad k = \frac{b_m}{a_n}$$

- z_i sont les **zéros** de la fonction de transfert (réels ou complexes)
- p_i sont les **pôles** de la fonction de transfert (réels ou complexes)
- Le degré de $D(p)$ est appelé **ordre** de la fonction de transfert ou du système
- L'équation $D(p) = 0$ est appelée **équation caractéristique**

Selon les valeurs des coefficients a_i et b_i, $D(p)$ et $N(p)$ présentent des 0 soit nuls, soit réels ou complexes.

A.III.1.a.ii Forme générale à connaître

D'une manière générale, indépendamment des coefficients n et m introduits au paragraphe précédent, on montre que toute fonction de transfert se met sous la forme suivante :

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha}\frac{\prod_{i=1}^{m}\left(1 - \frac{p}{z_i}\right)}{\prod_{k=1}^{n-\alpha}\left(1 - \frac{p}{p_k}\right)}$$

- α est la classe de la fonction de transfert
- n est l'ordre de la fonction de transfert
- Le facteur constant K est appelé **gain statique** du système. On l'obtient en multipliant la FT par p^α et en faisant tendre p vers 0. L'unité du gain statique est telle que $\frac{[s(t)]}{[e(t)]} = \frac{[K]}{s^{-\alpha}}$, soit $[K] = \frac{[s(t)]}{[e(t)]}s^{-\alpha}$

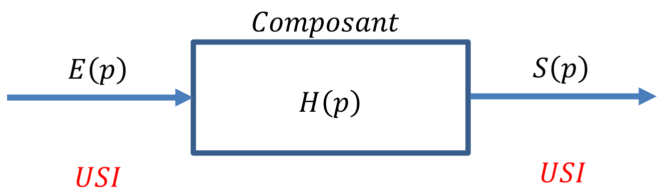
Remarques :

- Il est nécessaire d'avoir des conditions initiales nulles pour former la fonction de transfert d'un système.
- La connaissance de la fonction de transfert d'un système suffit à le décrire complètement

A.III.1.a.iii Représentation pas schéma bloc

• <u>Chaîne directe</u>

On peut finalement représenter le système à l'aide d'un schéma bloc dans le domaine de Laplace, ici en chaîne directe :

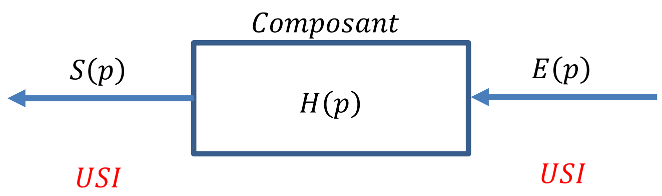


$$S(p) = H(p)E(p)$$

On note les variables à l'extérieur des blocs et la fonction de transfert à l'intérieur des blocs. On peut préciser le nom du bloc concerné et les unités des variables, dans le système international *USI*

• <u>Chaîne de retour</u>

Dans le cas d'une chaîne de retour, il faut penser au fait que le sens de « circulation » des données est inversé, ce qui conduit à lire les blocs en sens inverse :



$$S(p) = H(p)E(p)$$

A.III.1.b Fonctions de transfert des composants

Traitons deux exemples :

A.III.1.b.i Résistance

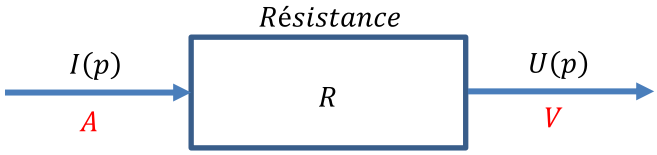
L'équation qui met en relation tension et intensité aux bornes d'une résistance s'écrit :

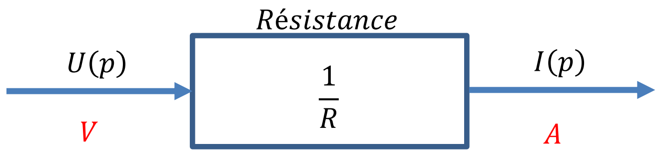
$$u(t) = Ri(t)$$

Dans le domaine de Laplace, on a :

$$U(p) = RI(p)$$

On représente la fonction de transfert du système ci-dessous selon le choix de ce qui est en entrée et en sortie :





Dans le cas d'une constante (indépendant de p), on appelle la fonction de transfert un **GAIN**, on parle aussi de gain pur.

On parlera donc ici d'une résistance de gain R.

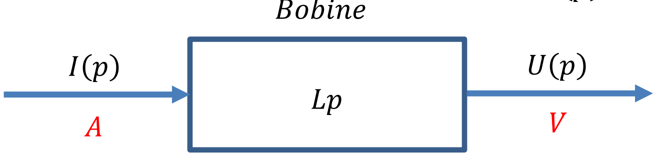
A.III.1.b.ii Bobine

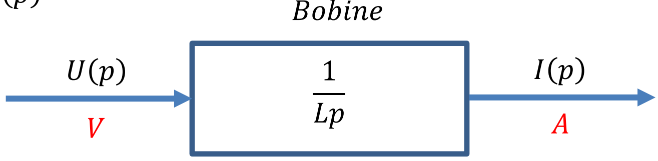
L'équation qui met en relation tension et intensité aux bornes d'une bobine s'écrit :

$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

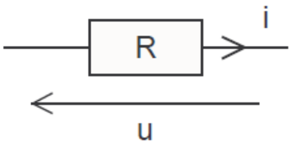
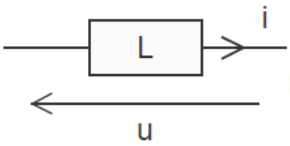
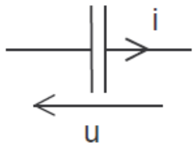
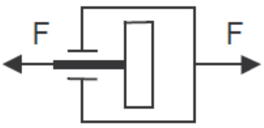
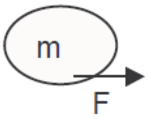
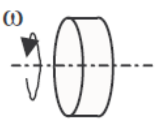
Dans le domaine de Laplace avec des conditions initiales nulles :

$$U(p) = LpI(p)$$



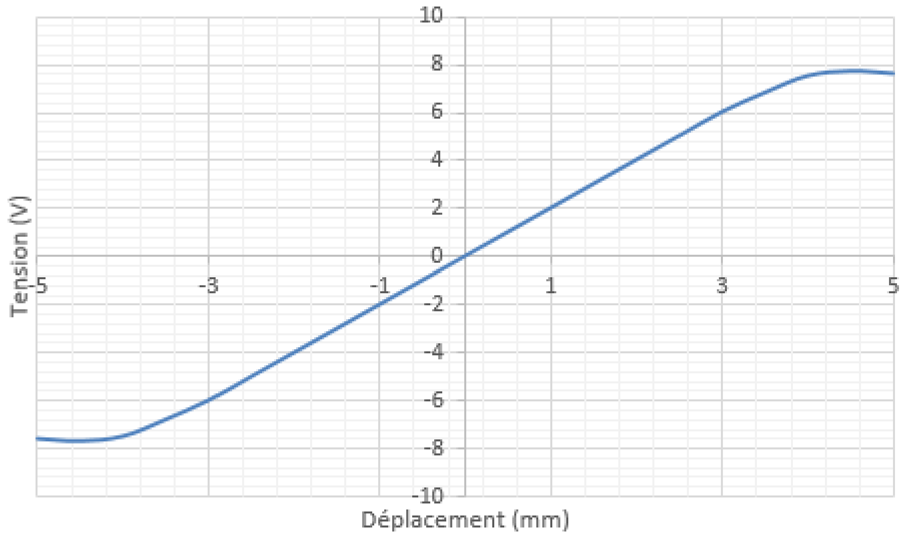


A.III.1.b.iii Fonctions de transfert usuelles

Résistance	 $u=Ri$	$I(p) \rightarrow \boxed{R} \rightarrow U(p)$ $U(p) \rightarrow \boxed{1/R} \rightarrow I(p)$
Inductance	 $u = L\dfrac{di}{dt}$	$I(p) \rightarrow \boxed{Lp} \rightarrow U(p)$ $U(p) \rightarrow \boxed{1/Lp} \rightarrow I(p)$
Condensateur	 $u = \dfrac{1}{C}\int idt$	$I(p) \rightarrow \boxed{1/Cp} \rightarrow U(p)$ $U(p) \rightarrow \boxed{Cp} \rightarrow I(p)$
Ressort	$F=kx$ 	$X(p) \rightarrow \boxed{K} \rightarrow F(p)$ $F(p) \rightarrow \boxed{1/K} \rightarrow X(p)$
Frottement visqueux (amortisseur)	 $F = fv\dfrac{dx}{dt}$	$X(p) \rightarrow \boxed{fv.p} \rightarrow F(p)$
Masse	 $F = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$	$X(p) \rightarrow \boxed{m.p^2} \rightarrow F(p)$
Inertie en rotation	 $C = J\dfrac{d\omega}{dt}$	$\Omega(p) \rightarrow \boxed{J.p} \rightarrow C(p)$

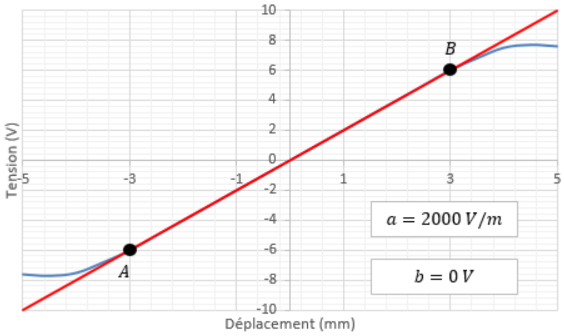
A.III.1.b.iv Linéarisation d'un comportement

Il arrive fréquemment qu'un composant présente un comportement linéaire sur une plage de variation de ses grandeurs puis que cette relation devienne plus complexe. Prenons par exemple un capteur dont la tension de sortie $u(t)$ varie en fonction de la position mesurée $x(t)$ comme suit :



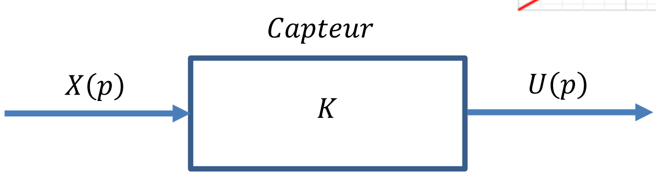
Si les déplacements mesurés restent dans la plage de variation $[-3; 3]$ mm, la fonction de transfert du capteur peut être assimilée à un gain K pur tel que

$$u(t) = Kx(t)\ \forall x \epsilon [-3; 3]$$



On a alors :

$$U(p) = KX(p)$$



Attention à exprimer le gain dans les unités du système international :

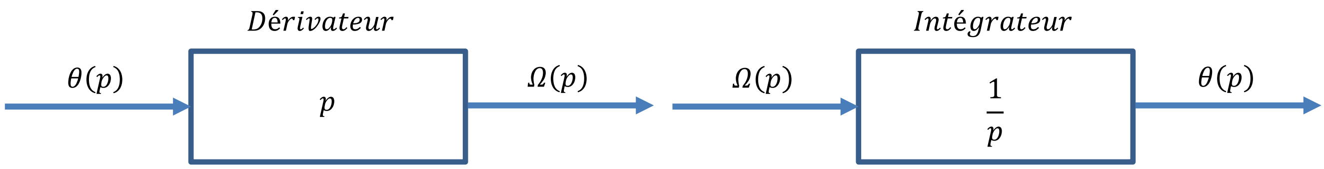
$$K = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6 - (-6)}{3 - (-3)} = 2\ V.mm^{-1} = 2000\ V.m^{-1}$$

Ce que nous venons de faire s'appelle la **linéarisation du comportement d'un système**.

A.III.1.b.v Intégrateur et dérivateur

Deux fonctions de transfert sont à connaître, elles permettent de passer de la donnée d'une fonction à sa dérivée (dérivateur) ou de la fonction à sa primitive (intégrateur). Attention, ces deux blocs sont les deux seuls blocs qui ne représentent pas d'éléments physiques d'un système. Donnons l'exemple pour une vitesse de rotation Ω et la position angulaire associée θ:

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \quad ; \quad \Omega(p) = p\theta(p)$$



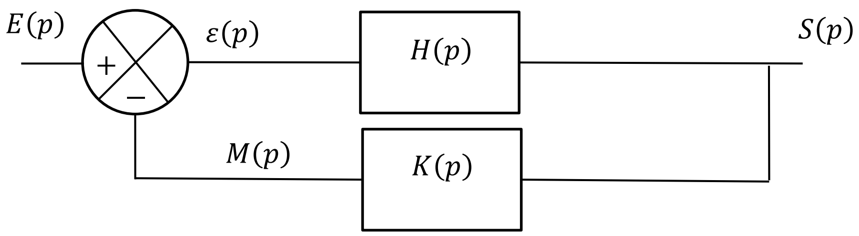
Remarques :

- Multiplier par p est homogène à une division par des secondes (dérivation temporelle)
- Diviser par p est homogène à une multiplication par des secondes (intégration temporelle)

A.III.1.c Fonction de transfert d'un système bouclé

A.III.1.c.i Représentation

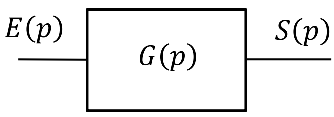
Soit un système en boucle fermée (avec retour) représenté par le schéma bloc suivant :



La fonction de transfert associée à ce système est :

$$FTBF(p) = G(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

On peut modéliser le système étudié à l'aide d'un seul bloc représentant la relation entre entrée et sortie.



A.III.1.c.ii FTBF

$$\begin{cases} S(p) = H(p)\varepsilon(p) \\ \varepsilon(p) = E(p) - M(p) = E(p) - K(p)S(p) \end{cases}$$

$$S(p) = H(p)[E(p) - K(p)S(p)]$$

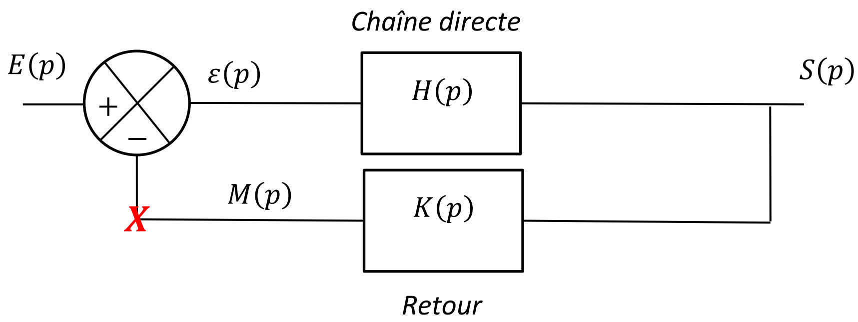
$$\big(1 + K(p)H(p)\big)S(p) = H(p)E(p)$$

$$\boxed{G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H(p)}{1 + K(p)H(p)}}$$

Formule de Black

On peut exprimer la $FTBF$ en fonction de la $FTBO$ du système : Fonction de Transfert en Boucle Ouverte et de la chaîne directe.

La $FTBO$ est la fonction de transfert du système lorsqu'il est en boucle ouverte, c'est-à-dire lorsque l'on coupe fictivement la boucle au niveau du comparateur :



$$FTBO(p) = Chaine\ directe(p) * Retour(p)$$

Dans le cas de la boucle ouverte, la $FTBO$ représente la relation entre l'entrée et la sortie fictive de la boucle ouverte (c'est une définition), soit :

$$FTBO(p) = \frac{M(p)}{\varepsilon(p)} = H(p)K(p)$$

Remarque : Si d'autres blocs sont présents entre $\varepsilon(p)$ et $M(p)$, on les prend donc en compte également

La chaîne directe est la chaîne qui va directement de l'entrée à la sortie sans considérer le retour :

$$Chaine\ directe(p) = H(p)$$

Remarque : Si plusieurs blocs sont en série dans la chaîne directe, on doit tous les prendre en compte.

Finalement :

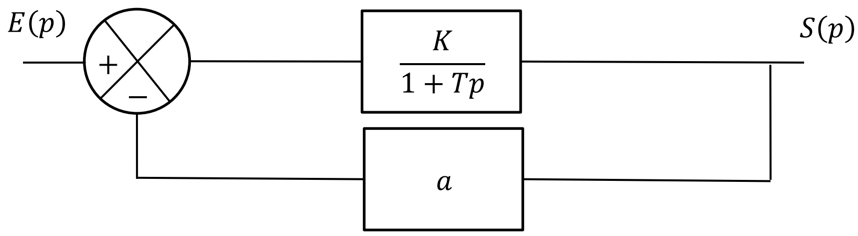
$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{Chaine\ directe(p)}{1 + FTBO(p)}$$

Remarque: $1 + FTBO(p)$ est le polynôme caractéristique du système. Il permet de rechercher les pôles de la fonction de transfert.

A.III.1.c.iii Forme à obtenir

Lors du calcul d'une $FTBF$, ne pas garder de quotients de quotients de polynômes. Simplifier le plus possible la fonction de transfert afin d'obtenir un quotient simple.

Exemple :



$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\frac{K}{1+Tp}}{1 + a\frac{K}{1+Tp}}$$

Ne pas garder la fonction de transfert sous cette forme, mais plutôt :

$$G(p) = \frac{K}{1 + Tp + aK}$$

Voire mieux, regrouper les termes selon les puissances de p :

$$G(p) = \frac{K}{(1 + aK) + Tp}$$

Si c'est demandé, on pourra alors proposer la forme canonique :

$$G(p) = \frac{\frac{K}{1+aK}}{1 + \frac{T}{1+aK}p}$$

A.III.1.d Propriétés des schémas blocs

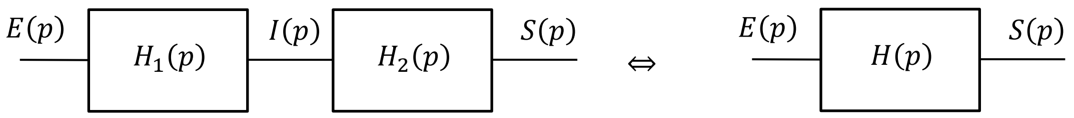
Lors de la mise en place d'un schéma bloc, on représente le système réel sous forme de différents blocs. La représentation obtenue est alors une représentation correspondant au système physique étudié.

Dans ce paragraphe, nous allons voir différents outils permettant de modifier la forme des schémas blocs. Il faut bien avoir en tête que ces modifications ne sont que des outils permettant de décrire les mêmes relations entre entrée et sortie, mais conduisent à une représentation non physique du système.

A.III.1.d.i Association de blocs en série

Considérons le système constitué de deux sous-systèmes en série de fonction de transfert respectif $H_1(p)$ et $H_2(p)$. Ce système est équivalent à un seul système de fonction de transfert

$$H(p) = H_1(p)H_2(p)$$



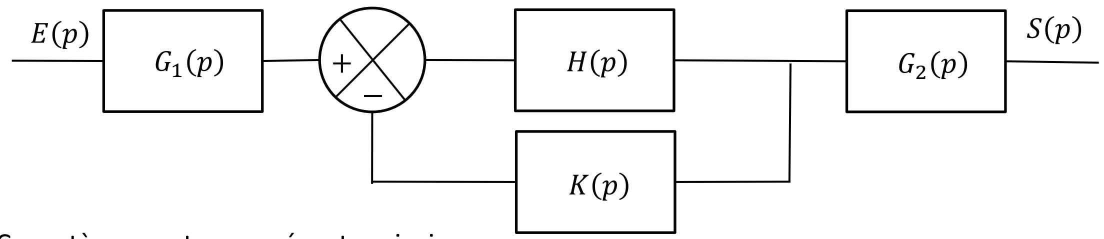
Démonstration :

$$H_1(p) = \frac{I(p)}{E(p)} \quad ; \quad H_2(p) = \frac{S(p)}{I(p)}$$

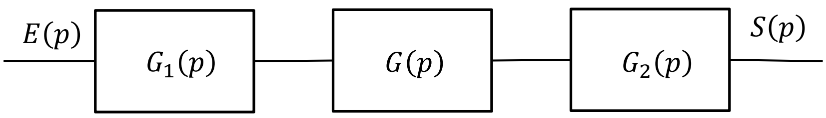
$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{S(p)}{I(p)}\frac{I(p)}{E(p)} = H_1(p)H_2(p)$$

A.III.1.d.ii Série de blocs avec partie bouclée

Soit le schéma bloc suivant :



Ce système peut se représenter ainsi :



Avec :

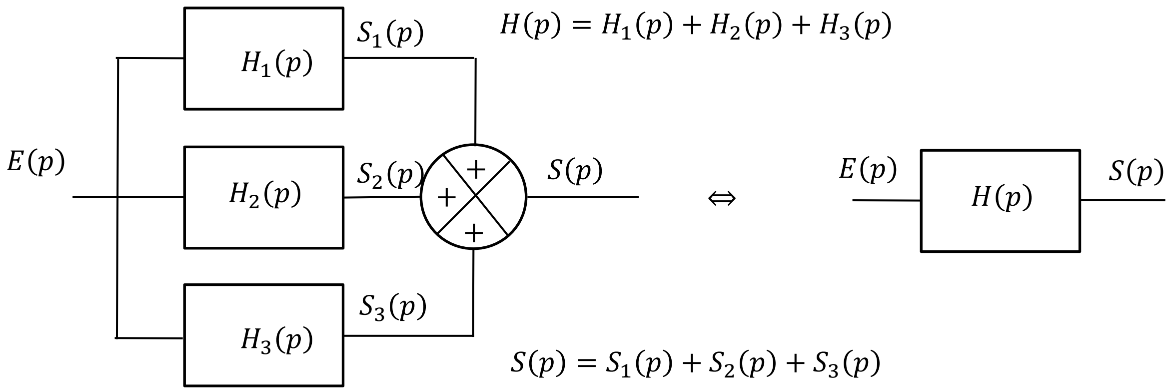
$$G(p) = \frac{H(p)}{1 + K(p)H(p)}$$

La fonction de transfert du système s'écrit donc comme suit :

$$M(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = G_1(p)G(p)G_2(p) = \frac{G_1(p)H(p)G_2(p)}{1 + K(p)H(p)}$$

Une erreur souvent commise consiste à inclure G_1 et/ou G_2 dans le calcul de la $FTBF$ de la partie bouclée du système.

A.III.1.d.iii Association de blocs en parallèle



$$H(p) = H_1(p) + H_2(p) + H_3(p)$$

$$S(p) = S_1(p) + S_2(p) + S_3(p)$$

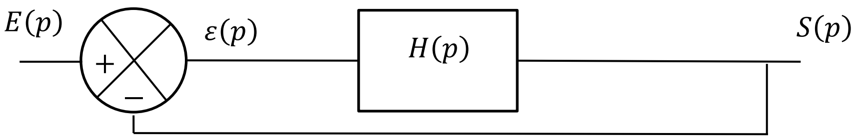
$$S(p) = \big(H_1(p) + H_2(p) + H_3(p)\big)E(p)$$

$$S(p) = H(p)E(p)$$

$$H(p) = H_1(p) + H_2(p) + H_3(p)$$

A.III.1.d.iv Retour unitaire

Un système est à retour unitaire si la fonction de transfert de la chaîne retour est égale à 1. Le schéma bloc est alors de la forme :

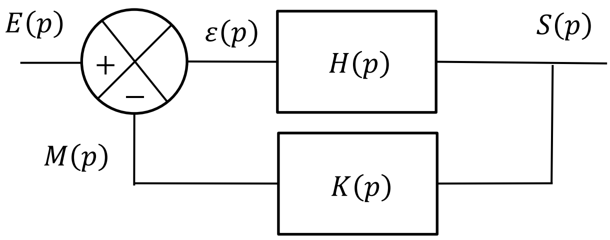


Dans le cas d'un système à retour unitaire, on a la relation :

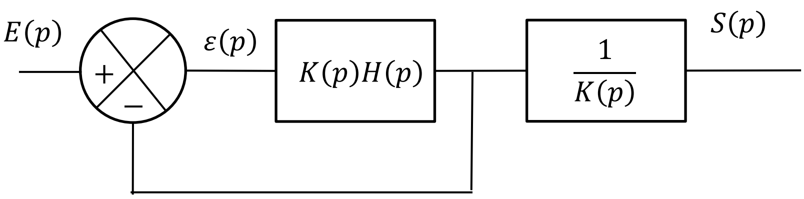
$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{FTBO(p)}{1 + FTBO(p)}$$

$$FTBO(p) = H(p) \ dans \ ce \ cas$$

Lorsqu'un système n'est pas à retour unitaire, il est possible d'effectuer des manipulations afin de le représenter de manière équivalente avec un retour unitaire. En utilisant la formule de Black sur les trois schémas blocs suivants, on montre qu'ils représentent le même système et qu'ils sont donc équivalents.

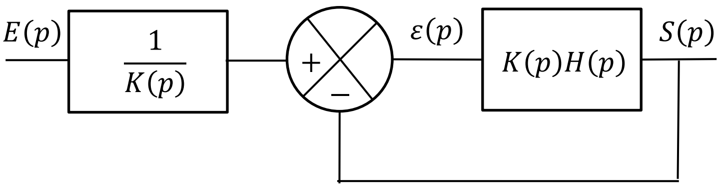


$$G(p) = \frac{H(p)}{1 + K(p)H(p)}$$



$$G'(p) = \frac{1}{K(p)} \frac{K(p)H(p)}{1 + K(p)H(p)}$$

$$= G(p)$$



$$G''(p) = \frac{K(p)H(p)}{1 + K(p)H(p)} \frac{1}{K(p)}$$

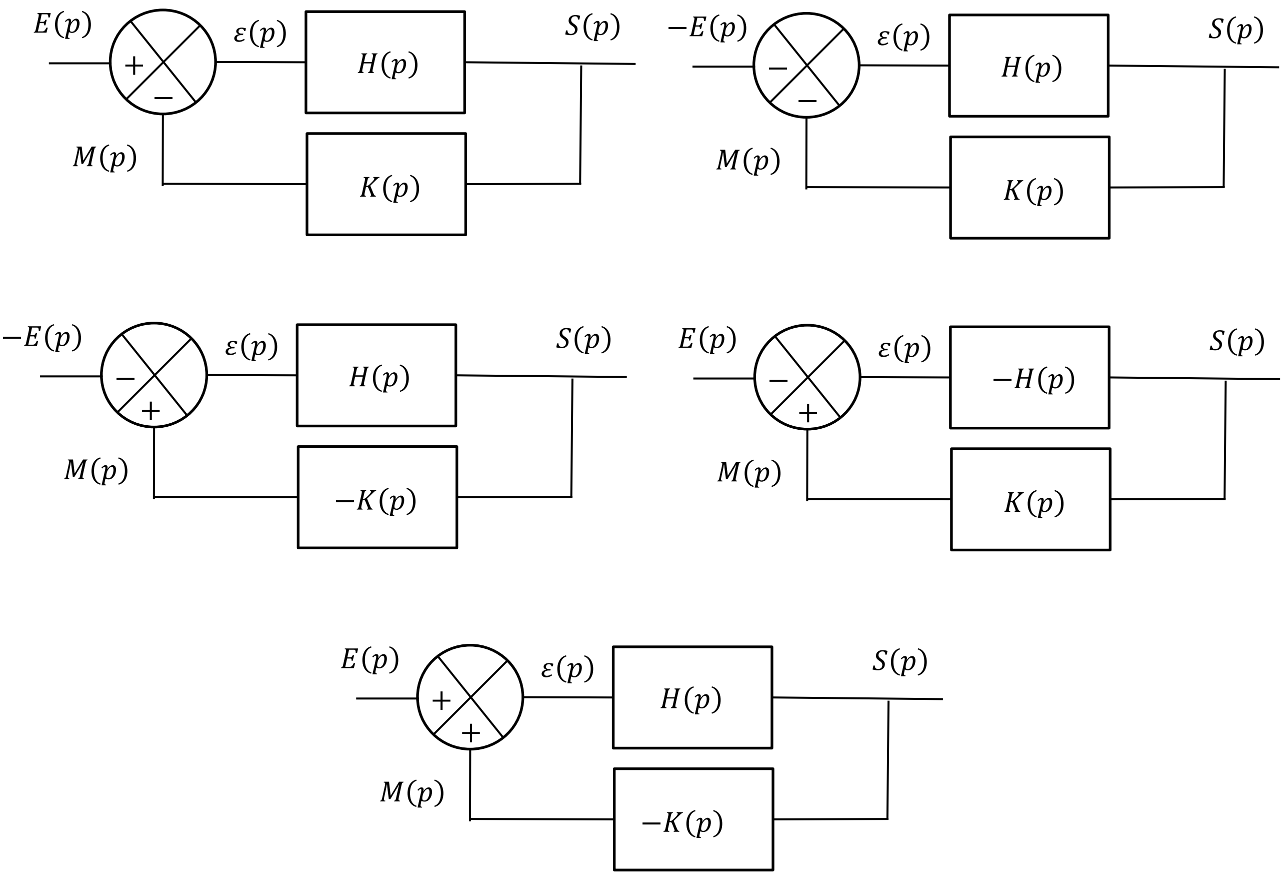
$$= G(p)$$

Cette transformation a deux avantages :

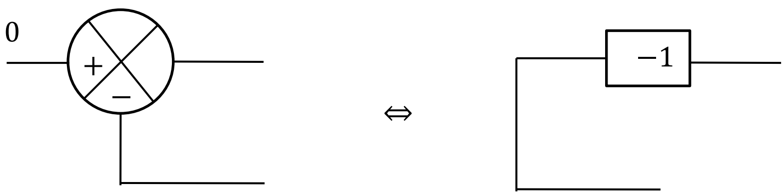
- Nous mettrons en place des résultats lors de l'étude des performances des SLCI qui seront associés aux boucles à retours unitaires
- L'abaque de Black-Nichols que nous verrons plus tard permettra de déterminer des caractéristiques fréquentielles de FTBF connaissant la FTBO (plus simple) d'une boucle à retour unitaire

A.III.1.d.v Changements de signes

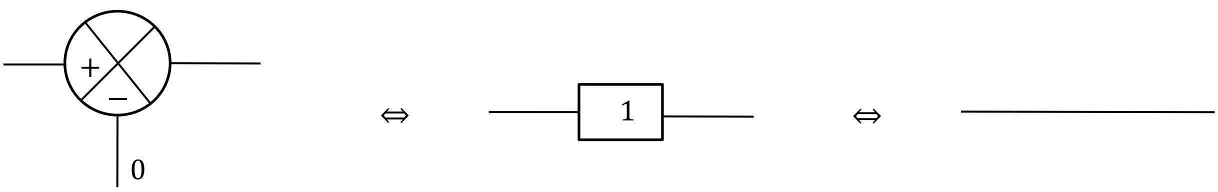
On peut effectuer des changements de signes sur les variables, les comparateurs ou les fonctions de transfert sans aucuns soucis. Tous ces schémas sont équivalents :



Lors de l'application d'un théorème de superposition, on peut obtenir le cas suivant si $E = 0$

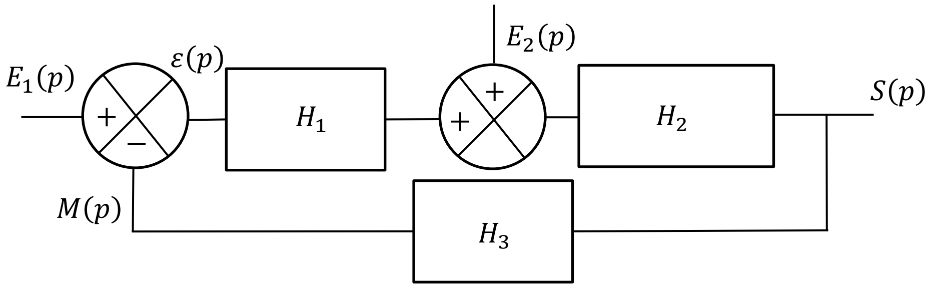


Remarque :



A.III.1.d.vi Théorème de superposition

Soit un système avec deux entrées :



La plupart du temps l'entrée E_1 est l'entrée de commande (consigne) et l'entrée E_2 est une perturbation qui vient « gêner » le processus.

$$\varepsilon(p) = E_1(p) - M(p) = E_1(p) - H_3(p)S(p)$$

$$\varepsilon(p) = E_1(p) - H_3(p)H_2(p)[H_1(p)\varepsilon(p) + E_2(p)]$$

$$\varepsilon(p) = E_1(p) - H_3(p)H_2(p)H_1(p)\varepsilon(p) - H_3(p)H_2(p)E_2(p)$$

$$\varepsilon(p) + H_3(p)H_2(p)H_1(p)\varepsilon(p) = E_1(p) - H_3(p)H_2(p)E_2(p)$$

$$\varepsilon(p)[1 + H_3(p)H_2(p)H_1(p)] = E_1(p) - H_3(p)H_2(p)E_2(p)$$

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + H_3(p)H_2(p)H_1(p)}E_1(p) - \frac{H_3(p)H_2(p)}{1 + H_3(p)H_2(p)H_1(p)}E_2(p)$$

$$H_3(p)S(p) = E_1(p) - \varepsilon(p)$$

$$= E_1(p) - \frac{1}{1 + H_3(p)H_2(p)H_1(p)}E_1(p) + \frac{H_3(p)H_2(p)}{1 + H_3(p)H_2(p)H_1(p)}E_2(p)$$

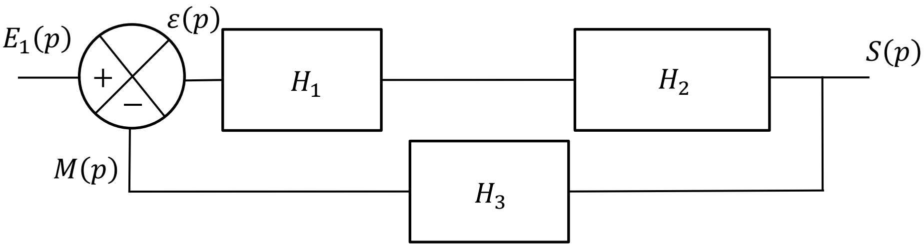
$$= \frac{H_3(p)H_2(p)H_1(p)}{1 + H_3(p)H_2(p)H_1(p)}E_1(p) + \frac{H_3(p)H_2(p)}{1 + H_3(p)H_2(p)H_1(p)}E_2(p)$$

$$S(p) = \frac{H_2(p)H_1(p)}{1 + H_3(p)H_2(p)H_1(p)}E_1(p) + \frac{H_2(p)}{1 + H_3(p)H_2(p)H_1(p)}E_2(p)$$

$$S(p) = G_1(p)E_1(p) + G_2(p)E_2(p)$$

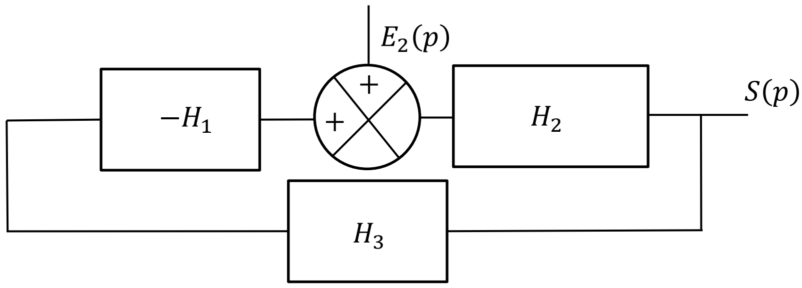
On voit ici que le système soumis à deux entrées répond par deux sorties ajoutées.

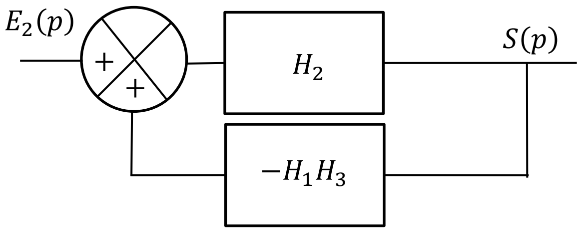
Etudions le système lorsque $E_2(p)$ est nulle. Cela revient à l'enlever du schéma bloc :

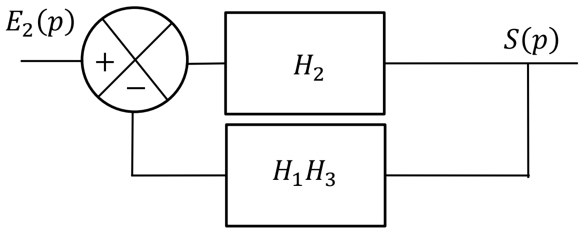


$$\left.\frac{S(p)}{E_1(p)}\right|_{E_2(p)=0} = \frac{H_1(p)H_2(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = G_1(p)$$

Faisons de même en supposant que $E_1(p)$ est nulle :





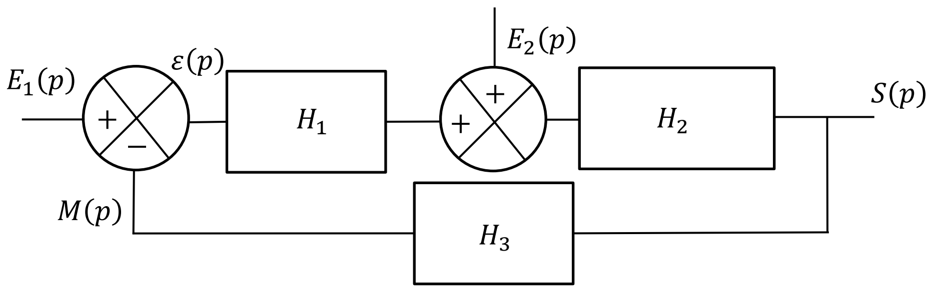


$$\left.\frac{S(p)}{E_2(p)}\right|_{E_1(p)=0} = \frac{H_2(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)H_3(p)} = G_2(p)$$

On voit donc ici que lorsqu'il y a plusieurs entrées sur un système, on peut utiliser le théorème de superposition en annulant tour à tour toutes les entrées sauf une et en déterminant la fonction de transfert associée.

A retenir :

Pour un système mis sous la forme suivante :

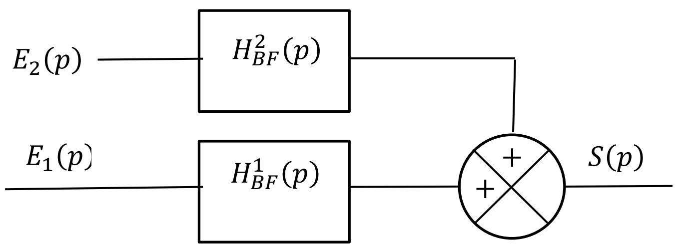


Les deux fonctions de transfert $\left.\frac{S(p)}{E_2(p)}\right|_{E_1(p)=0}$ et $\left.\frac{S(p)}{E_1(p)}\right|_{E_2(p)=0}$ ont comme dénominateur le même polynôme caractéristique : $1+FTBO=1+H_1(p)H_2(p)H_3(p)$ et pour numérateur les fonctions en chaîne directe après l'entrée considérée, soit $H_1(p)H_2(p)$ pour $\left.\frac{S(p)}{E_1(p)}\right|_{E_2(p)=0}$ et $H_2(p)$ pour $\left.\frac{S(p)}{E_2(p)}\right|_{E_1(p)=0}$, soit :

$$H_{BF}^1(p)=\left.\frac{S(p)}{E_1(p)}\right|_{E_2(p)=0}=\frac{H_1(p)H_2(p)}{1+H_1(p)H_2(p)H_3(p)}=\frac{Cha\hat{\imath}ne\ directe\ apr\grave{e}s\ E_1}{1+FTBO(p)}$$

$$H_{BF}^2(p)=\left.\frac{S(p)}{E_2(p)}\right|_{E_1(p)=0}=\frac{H_2(p)}{1+H_1(p)H_2(p)H_3(p)}=\frac{Cha\hat{\imath}ne\ directe\ apr\grave{e}s\ E_2}{1+FTBO(p)}$$

On pourra alors proposer un nouveau modèle du système :



Remarque : Dans ce genre de système, on demande souvent d'estimer l'effet de la perturbation e_2 sur l'erreur ε entre entrée e_1 et sortie s.

On calcule donc : $\lim_{t\to+\infty}\big(e_1(t)-s(t)\big)$ avec $e_1(t)$ nulle et $e_2(t)$ non nulle, soit :

$$\varepsilon=-\lim_{t\to+\infty}\big(s(t)\big)=-\lim_{p\to+0^+}\big(pS(p)\big)=-\lim_{p\to+0^+}\left(pH_{BF}^2(p)E_2(p)\right)$$

A.III.1.d.vii Déplacement de points de jonction et des sommateurs

• **Principe**

Les schémas blocs peuvent subir des modifications en vue de les simplifier. La figure ci-dessous montre quelques schémas équivalents. L'inconvénient lié à la modification de la structure du schéma est de perdre le lien entre les entrées/sorties du schéma et les grandeurs physiques du système étudié.

• **Déplacement d'un point de mesure**

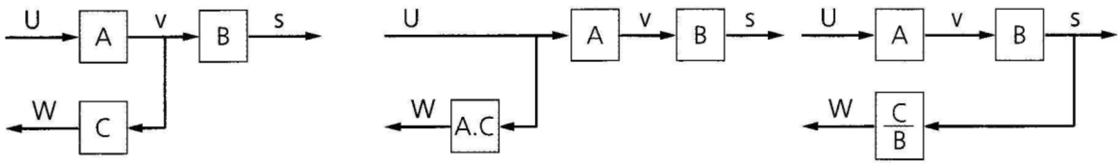


Schéma de départ — Déplacement vers l'amont — Déplacement vers l'aval

$$\begin{cases} W = CAU \\ S = BAU \end{cases} \qquad \begin{cases} W = ACU \\ S = BAU \end{cases} \qquad \begin{cases} W = \frac{C}{B}BAU = CAU \\ S = BAU \end{cases}$$

• **Déplacement d'un sommateur**

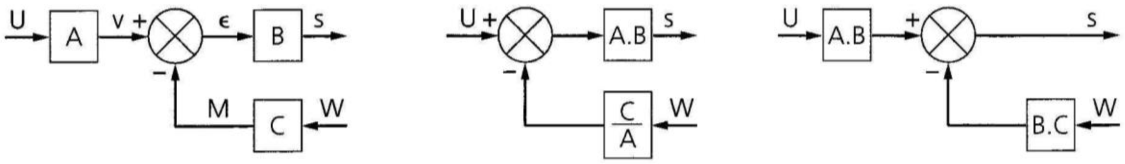


Schéma de départ — Déplacement vers l'amont — Déplacement vers l'aval

$$S = B\varepsilon = B(AU - CW)$$
$$S = ABU - CBW$$

$$S = AB\varepsilon = AB\left(U - \frac{C}{A}W\right)$$
$$S = ABU - CBW$$

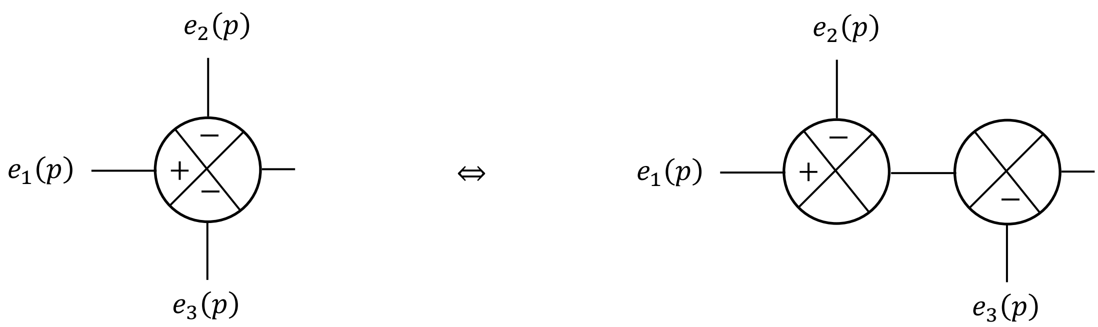
$$S = \varepsilon = ABU - CBW$$

• **Applications**

Ces transformations permettent d'obtenir, sur des schémas blocs complexe avec des boucles imbriquées, des structures avec des boucles simples dont le calcul des $FTBF$ est rendu possible.

A.III.1.d.viii Sommateur à plus de 2 entrées

Lorsqu'un sommateur possède plus de deux entrées, il est simple de le scinder en plusieurs sommateurs à la suite pour, par exemple, déterminer une FTBF.



A.IV. Systèmes du 1° et 2° ordre

A.IV.1 Introduction

A.IV.1.a Modélisation des systèmes

A.IV.1.a.i Fonction de transfert canonique

Les paragraphes précédents nous ont conduits à savoir modéliser un système, qu'il soit composé

- d'une seule fonction de transfert traduisant son comportement
- de plusieurs fonctions de transfert en chaîne directe
- de plusieurs fonctions de transfert dans un système asservi avec chaîne de retour

Les outils introduits nous permettent, dans tous les cas, de représenter le système avec un seul bloc contenant la fonction de transfert globale du système $H^n(p)$ d'ordre n :

$$E(p) \longrightarrow \boxed{H^n(p)} \longrightarrow S(p)$$

$$H^n(p) = \frac{b_m p^m + \cdots + b_1 p + b_0}{p^\alpha (a_n p^{n-\alpha} + \cdots + a_1 p + a_0)} \quad ; a_0 \neq 0$$

On cherchera toujours à exprimer la fonction de transfert $H^n(p)$ sous forme canonique. Cette forme laisse apparaître un facteur **1** au numérateur et au dénominateur sur le terme en p^0 :

$$H^n(p) = \frac{b_0}{a_0}\frac{1}{p^\alpha}\frac{\left(\frac{b_m}{b_0}p^m + \cdots + \frac{b_1}{b_0}p + \mathbf{1}\right)}{\left(\frac{a_{n-\alpha}}{a_0}p^{n-\alpha} + \cdots + \frac{a_1}{a_0}p + \mathbf{1}\right)}$$

On appelle gain statique de H^n le terme $K = \frac{b_0}{a_0} = \lim_{p \to 0}\left(p^\alpha H^n(p)\right)$

La forme canonique de la fonction de transfert est donc la forme suivante :

$$\frac{K}{p^\alpha}\frac{\left(\frac{b_m}{b_0}p^m + \cdots + \frac{b_1}{b_0}p + \mathbf{1}\right)}{\left(\frac{a_{n-\alpha}}{a_0}p^{n-\alpha} + \cdots + \frac{a_1}{a_0}p + \mathbf{1}\right)}$$

A.IV.1.a.ii Unités des termes d'une fonction de transfert

Comme il y a des termes **1** dans les polynômes au numérateur et au dénominateur de la fonction de transfert, tous les autres termes de ces polynômes doivent être homogènes à des nombres, c'est-à-dire :

$$\left[\frac{b_m}{b_0}p^m\right] = [\dots] = \left[\frac{b_1}{b_0}p\right] = [1]$$

$$\left[\frac{a_{n-\alpha}}{a_0}p^{n-\alpha}\right] = [\dots] = \left[\frac{a_1}{a_0}p\right] = [1]$$

Or, la multiplication par p dans le domaine de Laplace correspond à une dérivation, elle est donc homogène à des s^{-1}, on a donc :

$$\left[\frac{b_m}{b_0}\right] = s^m \quad ; \quad \dots \quad ; \quad \left[\frac{b_1}{b_0}\right] = s$$

$$\left[\frac{a_{n-\alpha}}{a_0}\right] = s^{n-\alpha} \quad ; \quad \dots \quad ; \quad \left[\frac{a_1}{a_0}\right] = s$$

Le gain statique K est tel que :

$$[s(t)] = [K]s^\alpha[e(t)]$$

Soit :

$$[K] = \frac{[s(t)]}{[e(t)]}\frac{1}{s^\alpha}$$

A.IV.1.a.iii Remarques

- On ne doit pas garder de termes inverses de puissances de p
- Une erreur courante est commise lorsque la fonction de transfert n'est pas exprimée uniquement sous forme d'un quotient de polynômes en p mais fait apparaître des fonctions de transfert. Dans ce cas, on ne peut pas obtenir la forme canonique de $H^n(p)$. Il faut d'abord exprimer les fonctions de transfert en quotients de polynômes et les remplacer dans $H^n(p)$.
- Veiller au plus possible à ne pas garder de quotients de quotients de polynômes, simplifier l'expression dans le but d'avoir un polynôme au numérateur et au dénominateur.

A.IV.1.a.iv Ecart statique et gain statique

Pour un système de gain statique K et de classe 0 (on montrera en 2° année que cette condition est à l'origine de l'existence d'une valeur finale – stabilité), on a toujours

$$\varepsilon_s = E_0(1-K)$$

En effet, avec une classe nulle, on a :

$$H^n(p) = K\frac{\left(\frac{b_m}{b_0}p^m + \cdots + \frac{b_1}{b_0}p + \mathbf{1}\right)}{\left(\frac{a_n}{a_0}p^n + \cdots + \frac{a_1}{a_0}p + \mathbf{1}\right)}$$

Par ailleurs :

$$E(p) - S(p) = E_0 - H^n(p)E_0 = E_0\big(1 - H^n(p)\big)$$

Enfin, en appliquant le théorème de la valeur finale pour un échelon d'entrée $\frac{E_0}{p}$, le p du TVF annule le $\frac{1}{p}$ de l'échelon :

$$\varepsilon_s = \lim_{t\to+\infty}\big(E(p) - S(p)\big) = \lim_{p\to 0} E_0\big(1 - H^n(p)\big) = E_0\left[1 - \lim_{p\to 0}\big(H^n(p)\big)\right]$$

Or :

$$H^n(p) = \frac{K\left(\frac{b_m}{b_0}p^m + \cdots + \frac{b_1}{b_0}p + \mathbf{1}\right)}{\left(\frac{a_n}{a_0}p^n + \cdots + \frac{a_1}{a_0}p + \mathbf{1}\right)} \underset{0}{\sim} K$$

Soit :

$$\varepsilon_s = E_0(1-K)$$

Attention : bien que cette formule donne toujours une valeur, elle n'a de sens réel que si K est sans unité, c'est-à-dire si entrée et sortie sont de même unité. Un moteur qui transforme une tension en vitesse de rotation ne permet pas d'interpréter le résultat de ce calcul qui n'a aucun sens réel.

A.IV.1.a.v Tangentes à l'origines de réponses indicielles de système d'ordres quelconques

Soit une fonction de transfert quelconque d'ordre n :

$$H^n(p) = K\frac{(n_n p^m + \cdots + n_1 p + \mathbf{1})}{(d_n p^n + \cdots + d_1 p + \mathbf{1})}$$

Soit une entrée de type échelon :

$$E(p) = \frac{E_0}{p}$$

On a :

$$S(p) = H^n(p)\,E(p) = \frac{KE_0}{p}\frac{(n_n p^m + \cdots + n_1 p + \mathbf{1})}{(d_n p^n + \cdots + d_1 p + \mathbf{1})}$$

Trouver la tangente à l'origine de $s(t)$ est très simple dans Laplace en supposant des conditions initiales nulles :

$$s'(0) = \lim_{t\to+\infty}\left(p\mathcal{L}\big(s'(t)\big)\right) = \lim_{p\to+\infty}\left(p^2 S(p)\right) = \lim_{p\to+\infty}\left(p^2\frac{KE_0}{p}\frac{(n_n p^m + \cdots + n_1 p + \mathbf{1})}{(d_n p^n + \cdots + d_1 p + \mathbf{1})}\right)$$

$$s'(0) = \lim_{p\to+\infty}\left(pKE_0\frac{(n_n p^m + \cdots + n_1 p + \mathbf{1})}{(d_n p^n + \cdots + d_1 p + \mathbf{1})}\right)$$

Il suffira alors de garder les termes de plus haut degré au numérateur et au dénominateur et d'étudier cette limite.

Exemple :

$$H^n(p) = \frac{K}{1 + ap + bp^2}$$

$$s'(0) = \lim_{p\to+\infty}\left(pKE_0\frac{K}{1 + ap + b}\right) = \lim_{p\to+\infty}\left(\frac{pKE_0}{bp^2}\right) = \lim_{p\to+\infty}\left(\frac{KE_0}{b}\frac{1}{p}\right) = 0$$

On remarquera que toute fonction dont le numérateur est une constante et donc l'ordre est au minimum de 2 présente une réponse à un échelon de pente à l'origine nulle.

A.IV.1.b Systèmes du 1° et du 2° ordre

Nous avons vu précédemment que quelle que soit la forme de la fonction de transfert d'un système causal, on peut la mettre sous la forme de somme de fractions rationnelles d'ordre 1 et 2 (cf décomposition en éléments simples). Une sortie d'un système d'ordre supérieur se décomposera donc toujours en somme de sorties de systèmes du premier et du second ordre.

Soit $H^n(p)$la fonction de transfert d'un système d'ordre $n > 2$, on aura :

$$H^n(p) = \sum_j H_j^1(p) + \sum_j H_j^2(p)$$

Avec H_j^1 et H_j^2 des fonctions de transfert du premier et du second ordre.

Toute réponse $S(p)$ d'un système d'ordre n s'écrit comme somme de réponses de systèmes d'ordre 1 et 2 :

$$S(p) = H^n(p)E(p) = \sum_j H_j^1(p)E(p) + \sum_j H_j^2(p)E(p)$$

Nous allons donc nous limiter dans l'étude des systèmes d'ordre 1 et 2 et nous saurons déterminer la réponse d'un système d'ordre quelconque.

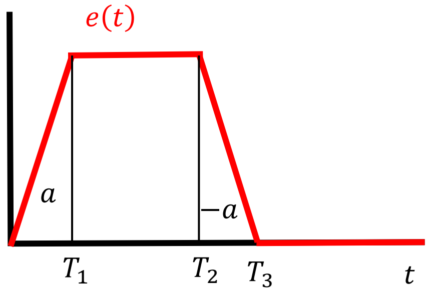
A.IV.1.c Entrée échelon et rampe

Nous avons abordé les entrées Dirac (peu utilisée), échelon et rampe. L'entrée sinusoïdale et les réponses harmoniques associées seront traitées dans un chapitre ultérieur.

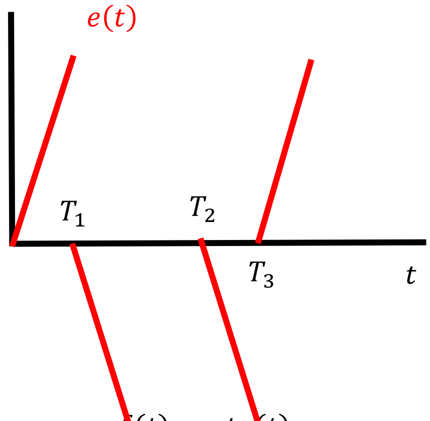
Dans la plupart des asservissement qui seront étudiés, les entrée seront décomposables en sommes de signaux usuels de type échelon et rampe, et il suffira donc de savoir déterminer la réponse d'un système du 1° ou du 2° ordre à un échelon et à une rampe pour pouvoir donner la réponse complète du système à une entrée composée de ces entrées types.

Exemples :

Soit le signal suivant, souvent imposé en entrée des systèmes linéaires :



Ce signal d'entré est en réalité la somme de 4 rampes de pente a et $-a$ avec des retards différents:



$$f(t) = atu(t)$$

$$e(t) = f(t) - f(t - T_1) - f(t - T_2) + f(t - T_3)$$

$$E(p) = \frac{a}{p^2} - \frac{a}{p^2} e^{-pT_1} - \frac{a}{p^2} e^{-pT_2} + \frac{a}{p^2} e^{-pT_3}$$

$$E(p) = E_1(p) + E_2(p) + E_3(p) + E_4(p)$$

Ainsi, la sortie d'un système soumis à cette entrée se décomposera en la somme de 4 réponses du système pour 4 rampes avec des retards différents.

$$S(p) = H(p)E(p) = H(p)E_1(p) + H(p)E_2(p) + H(p)E_3(p) + H(p)E_4(p)$$

Remarque : lors de la présence d'un retard sur l'entrée, on effectue la démarche de résolution dans le domaine de Laplace comme vue précédemment, en gardant en facteur le terme e^{-pT}, puis lors de l'application de la transformée de Laplace inverse, on déduit les fonctions temporelles en changeant (t) en $(t - T)$ (ne pas oublier le $u(t - T)$ qui annule la réponse à l'entrée retardée avant T

A.IV.2 Systèmes du premier ordre

A.IV.2.a Généralités

A.IV.2.a.i Définition

Un système du premier ordre est décrit par une équation différentielle du premier ordre :

$$s(t) + T\frac{ds(t)}{dt} = Ke(t)$$

$$(K,T) > 0$$

Cette écriture de l'équation différentielle est la forme normalisée d'un système du premier ordre :

- T est la constante de temps du système (à ne pas confondre avec une période)
- K est le gain statique du système
- On définit aussi la pulsation de coupure du système : $\omega_0 = \frac{1}{T}$

A.IV.2.a.ii Fonction de transfert

Dans le cas de conditions initiales nulles, passons cette équation dans le domaine de Laplace :

$$S(p) + TpS(p) = KE(p)$$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\mathbf{1} + Tp}$$

Cette écriture est la représentation canonique d'un système du premier ordre. Pour l'obtenir, il faut que le terme constant du dénominateur soit égal à 1.

A.IV.2.a.iii Unités des constantes

K est tel que : $[K] = \frac{[s(t)]}{[e(t)]}$

T est homogène à des secondes : $[T] = s$

A.IV.2.b Réponses temporelles d'un système du 1° ordre

Etudions la réponse des systèmes du 1° ordre à un échelon et à une rampe.

A.IV.2.b.i Réponse indicielle

Considérons un échelon en entrée du système :

$$e(t) = e_0u(t)$$

$$E(p) = \frac{e_0}{p}$$

$$S(p) = H(p)E(p) = \frac{K}{1+Tp}\frac{e_0}{p} = \frac{Ke_0}{p(1+Tp)}$$

La décomposition en éléments simples de $S(p)$ est de la forme :

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{1+Tp}$$

Déterminons A et B :

$$S(p) = \frac{A + ATp + Bp}{p(1+Tp)} = \frac{(AT+B)p + A}{p(1+Tp)}$$

Soit :

$$\begin{cases} AT + B = 0 \\ A = Ke_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = -Ke_0T \\ A = Ke_0 \end{cases}$$

$$S(p) = \frac{Ke_0}{p} - \frac{Ke_0T}{1+Tp} = Ke_0\left[\frac{1}{p} - \frac{T}{1+Tp}\right] = Ke_0\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p+\frac{1}{T}}\right]$$

Appliquons la transformée de Laplace inverse à $S(p)$ afin de déterminer la réponse temporelle d'un système du premier ordre à une entrée échelon

$$\boxed{s(t) = Ke_0\left[1 - e^{-\frac{t}{T}}\right]u(t)}$$

Quelques caractéristiques sont à connaître :

Valeur finale s_∞	Réponse à $t = T$
$s_\infty = \lim\limits_{t\to+\infty} s(t)$ $s_\infty = \lim\limits_{t\to+\infty} \left[Ke_0\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)\right]$ $s_\infty = Ke_0$ $s_\infty = \lim\limits_{p\to 0^+} pS(p) = \lim\limits_{p\to 0^+} p\frac{K}{1+Tp}\frac{e_0}{p}$ $s_\infty = \lim\limits_{p\to 0^+} \frac{Ke_0}{1+Tp} = Ke_0$ L'écart statique vaut donc : $\varepsilon_s = \lim\limits_{t\to+\infty} [e(t)-s(t)]$ $\varepsilon_s = e_0 - Ke_0 = e_0(1-K)$	$s(T) = Ke_0\left[1-e^{-\frac{T}{T}}\right]$ $s(T) = Ke_0\left[1-\frac{1}{e}\right]$ $s(T) = 0{,}63Ke_0$ $s(T) = 0{,}63 s_\infty$
Pente à l'origine $s'(0^+)$	**Temps de réponse à 5% $t_{r5\%}$**
$s'(t) = \frac{K}{T}e_0 e^{-\frac{t}{T}}$ $s'(0^+) = \frac{Ke_0}{T}$ Soit la droite tangente à l'origine de $s(t)$ $y = \frac{Ke_0}{T}t$ En $t = T$, on a : $y = Ke_0 = s_\infty$	$s(t_{r5\%}) = 0{,}95 s_\infty$ $Ke_0\left[1-e^{-\frac{t_{r5\%}}{T}}\right] = 0{,}95Ke_0$ $1-e^{-\frac{t_{r5\%}}{T}} = 0{,}95$ $e^{-\frac{t_{r5\%}}{T}} = 0{,}05$ $-\frac{t_{r5\%}}{T} = \ln 0{,}05 \approx -3$ $t_{r5\%} \approx 3T$

Propriétés de la tangente en un point quelconque

A tout instant t_1, la dérivée de cette réponse vaut :

$$s'(t_1) = \frac{K}{T}e_0 e^{-\frac{t_1}{T}}$$

La droite qui passe par le point $(t_1, s(t_1))$ et de pente $s'(t_1)$ a pour équation :

$$y(t) = s(t_1) + (t-t_1)s'(t_1) = Ke_0\left(1-e^{-\frac{t_1}{T}}\right) + t\frac{Ke_0}{T}e^{-\frac{t_1}{T}}$$

Cette droite coupe la valeur $s_\infty = Ke_0$ en t_2 tel que

$$y(t_2) = Ke_0\left(1-e^{-\frac{t_1}{T}}\right) + (t_2-t_1)\frac{Ke_0}{T}e^{-\frac{t_1}{T}} = Ke_0$$

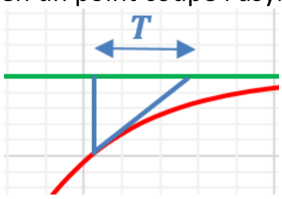
$$1-e^{-\frac{t_1}{T}} + \frac{t_2-t_1}{T}e^{-\frac{t_1}{T}} = 1$$

$$-1 + \frac{t_2-t_1}{T} = 0$$

$$t_2 - t_1 = T$$

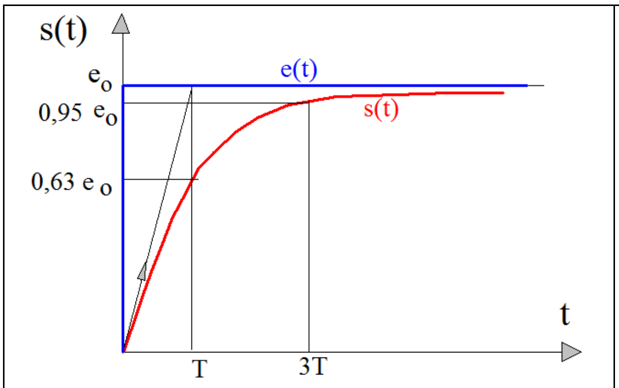
$$t_2 = t_1 + T$$

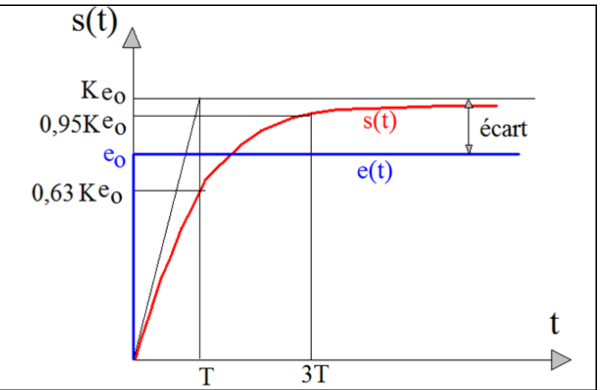
Ainsi, à tout moment, la tangente en un point coupe l'asymptote finale T secondes plus tard



Conclusions : un système du premier ordre de fonction de transfert $\frac{K}{1+Tp}$ à un échelon de valeur e_0

- A sa réponse qui tend vers $s_\infty = Ke_0$
- A un écart statique valant $\varepsilon_s = e_0(1-K)$, nul si $K = 1$
- A sa pente à l'origine qui coupe la valeur finale s_∞ à $t = T$
- Atteint 63% de sa valeur finale s_∞ à $t = T$
- A un temps de réponse à 5% tel que $t_{r_{5\%}} \approx 3T$
- A tout instant, la tangente à la réponse coupe la valeur finale T secondes plus tard





$K = 1$	Exemple si $K > 1$

A.IV.2.b.ii Réponse à une rampe

Considérons une rampe en entrée du système :

$$e(t) = atu(t)$$

$$E(p) = \frac{a}{p^2}$$

$$S(p) = H(p)E(p) = \frac{K}{1+Tp}\frac{a}{p^2} = \frac{Ka}{p^2(1+Tp)}$$

La décomposition en éléments simples de $S(p)$ est de la forme :

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{1+Tp}$$

Déterminons A, B et C :

$$S(p) = \frac{Ap+B}{p^2} + \frac{p^2C}{p^2(1+Tp)} = \frac{Ap+B+ATp^2+TBp+p^2C}{p^2(1+Tp)} = \frac{(AT+C)p^2+(A+TB)p+B}{p^2(1+Tp)}$$

Soit :

$$\begin{cases} AT + C = 0 \\ A + TB = 0 \\ B = Ka \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = -AT = KaT^2 \\ A = -TB = -KaT \\ B = Ka \end{cases}$$

$$S(p) = -\frac{KaT}{p} + \frac{Ka}{p^2} + \frac{KaT^2}{1+Tp}$$

$$S(p) = Ka\left[\frac{1}{p^2} - \frac{T}{p} + T\frac{1}{p+\frac{1}{T}}\right]$$

Appliquons la transformée de Laplace inverse à $S(p)$ afin de déterminer la réponse temporelle d'un système du premier ordre à une entrée rampe

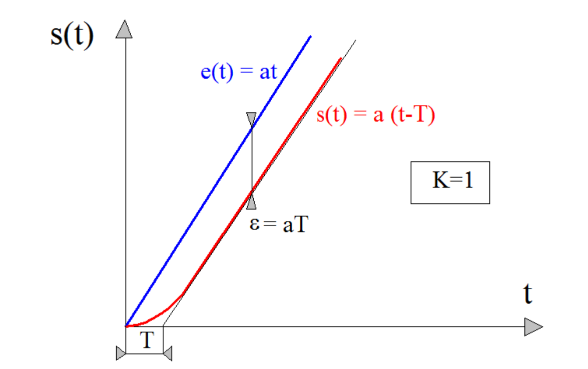
$$\boxed{\begin{gathered} s(t) = Ka\left[t - T + Te^{-\frac{t}{T}}\right]u(t) \\ s(t) = Ka\left[t - T\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)\right]u(t) \end{gathered}}$$

Quelques caractéristiques sont à connaître :

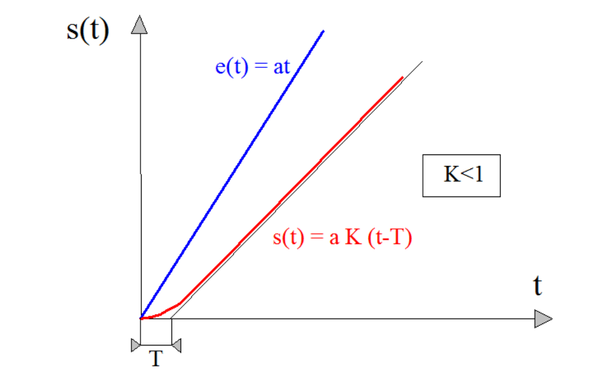
<table>
<tr><th colspan="2">Asymptote à l'infini a_∞</th></tr>
<tr><td colspan="2">$$Ka\left(t-T+Te^{-\frac{t}{T}}\right)u(t) \underset{+\infty}{\sim} Ka(t-T)$$ $$a_\infty = Ka(t-T)$$</td></tr>
<tr><th colspan="2">Ecart de poursuite ε_v</th></tr>
<tr><th colspan="2">Méthode temporelle</th></tr>
<tr><td colspan="2">$$\varepsilon_v = \lim_{t\to+\infty}[e(t)-s(t)]$$ $$\varepsilon_v = \lim_{t\to+\infty}[at-Ka(t-T)]$$ $$\varepsilon_v = \lim_{t\to+\infty}[at(1-K)+KaT]$$</td></tr>
<tr><td>$K=1$</td><td>$K\neq 1$</td></tr>
<tr><td>$$\varepsilon_v = \lim_{t\to+\infty}[aT]$$ $$\varepsilon_v = aT$$</td><td>$$\varepsilon_v = \lim_{t\to+\infty}[at(1-K)+KaT]$$ $$\varepsilon_v = \pm\infty$$</td></tr>
<tr><th colspan="2">Méthode Laplace</th></tr>
<tr><td colspan="2">Détaillons ce calcul car il présente une petite particularité : $$\varepsilon_v = \lim_{t\to+\infty}[e(t)-s(t)] = \lim_{p\to 0^+} p[E(p)-S(p)] = \lim_{p\to 0^+} p\left[\frac{a}{p^2}-\frac{K}{1+Tp}\frac{a}{p^2}\right]$$ $$\varepsilon_v = \lim_{p\to 0^+}\frac{a}{p}\left[1-\frac{K}{1+Tp}\right] = \lim_{p\to 0^+}\frac{a}{p}\left[\frac{1+Tp-K}{1+Tp}\right] = \lim_{p\to 0^+}\left[\frac{a(1-K)+aTp}{p+Tp^2}\right]$$ Selon la valeur de K, cette fraction n'a pas le même équivalent en 0</td></tr>
<tr><td>$K=1$</td><td>$K\neq 1$</td></tr>
<tr><td>$$\frac{a(1-K)+aTp}{p+Tp^2} \underset{0}{\sim} \frac{aTp}{p} \underset{0}{\sim} aT$$ $$\varepsilon_v = aT$$</td><td>$$\frac{a(1-K)+aTp}{p+Tp^2} \underset{0}{\sim} \frac{a(1-K)}{p}$$ $$\varepsilon_v = \pm\infty$$</td></tr>
<tr><th colspan="2">Pente à l'origine $s'(0^+)$</th></tr>
<tr><td colspan="2">$$s'(t) = Ka\left[1-e^{-\frac{t}{T}}\right]u(t)$$ $$s'(0) = 0$$</td></tr>
</table>

Conclusions : un système du premier ordre de fonction de transfert $\frac{K}{1+Tp}$ à une rampe de coefficient directeur a

- A une pente à l'origine nulle
- Tend vers une asymptote d'équation $y = Ka(t-T)$
- Dans le cas où $K=1$
    - cette asymptote est parallèle à la consigne
    - elle correspond à une translation de l'entrée d'un vecteur $T\vec{x}$
    - l'écart de poursuite en régime permanent vaut $\varepsilon_v = aT$
    - tout se passe comme si la sortie suivait l'entrée avec un retard T
- Dans le cas où $K \neq 1$
    - cette asymptote n'est pas parallèle à la consigne
    - l'écart de poursuite tend vers une valeur infinie



$K = 1$



Exemple si $K < 1$

A.IV.2.b.iii Bilan des performances d'un système du 1° ordre

Rapidité	**Stabilité**	**Précision**
$t_{r5\%} \approx 3T$	La réponse n'oscille pas Système stable	Pas de dépassement $s_\infty = Ke_0$ $\varepsilon_s = e_0(1-K)$ $\varepsilon_v = \begin{cases} aT \ si \ K = 1 \\ \pm\infty \ si \ K \neq 1 \end{cases}$
Autre		
$s'(0^+) = \begin{cases} \dfrac{Ke_0}{T} \ si \ e(t) = e_0 u(t) \\ s'(0^+) = 0 \ si \ e(t) = btu(t) \end{cases}$		

Remarques :

- Il est souvent plus parlant de donner un écart statique en % de la valeur de consigne afin d'évaluer la précision du système :

$$\varepsilon_s = e_0(1-K) = \frac{e_0(1-K)}{e_0}\% = (1-K)\%$$

- Rappelons que parler d'écart n'a de sens que si l'on compare deux grandeurs de même unité

A.IV.3 Systèmes du second ordre

A.IV.3.a Généralités

A.IV.3.a.i Définition

Un système du deuxième ordre est décrit par une équation différentielle du deuxième ordre :

$$s(t) + \frac{2z}{\omega_0}\frac{ds(t)}{dt} + \frac{1}{{\omega_0}^2}\frac{d^2s(t)}{dt^2} = Ke(t)$$

$$(K, \omega_0, z) > 0$$

Cette écriture de l'équation différentielle est la forme normalisée d'un système du deuxième ordre :

- z est le coefficient d'amortissement du système
- K est le gain statique du système
- ω_0 est la pulsation propre non amortie

A.IV.3.a.ii Fonction de transfert

Dans le cas de conditions initiales nulles, passons cette équation dans le domaine de Laplace :

$$S(p) + \frac{2z}{\omega_0}pS(p) + \frac{1}{{\omega_0}^2}p^2S(p) = KE(p)$$

$$S(p)\left[1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{1}{{\omega_0}^2}p^2\right] = KE(p)$$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\mathbf{1} + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{1}{{\omega_0}^2}p^2}$$

Cette écriture est la représentation canonique d'un système du second ordre. Pour l'obtenir, il faut que le terme constant du dénominateur soit égal à 1.

A.IV.3.a.iii Unités des constantes

K est tel que : $[K] = \frac{[s(t)]}{[e(t)]}$

ω_0 est une pulsation en $rd.s^{-1}$

z est un nombre sans dimensions

On a alors bien : $\left[\frac{1}{{\omega_0}^2}p^2\right] = \left[\frac{2z}{\omega_0}p\right] = [1]$

A.IV.3.b Réponses temporelles d'un système du 2° ordre

Etudions la réponse des systèmes du 2° ordre à un échelon et à une rampe.

A.IV.3.b.i Préliminaires

Selon les valeurs des coefficients du système, il est possible ou non de factoriser le dénominateur de la fonction de transfert, ce qui va avoir une influence sur les formes de décomposition en éléments simples de la sortie recherchés.

$$D(p)=\frac{1}{{\omega_0}^2}p^2+\frac{2z}{\omega_0}p+1 \quad ; \quad \Delta=\frac{4z^2}{{\omega_0}^2}-\frac{4}{{\omega_0}^2}=4\frac{z^2-1}{{\omega_0}^2}$$

Cas n°1 $z>1$	Cas n°2 $z=1$	Cas n°3 $z<1$
$\Delta>0$ Soient p_1 et p_2 les racines de $D(p)$ $p_i=\omega_0\left(-z\pm\sqrt{z^2-1}\right)$ $D(p)=k(p-p_1)(p-p_2)$ $=kp^2-k(p_1+p_2)p+kp_1p_2$ $=\frac{1}{{\omega_0}^2}p^2+\frac{2z}{\omega_0}p+1$ Soit : $k=\frac{1}{p_1p_2}$ $H(p)=\frac{K}{\frac{1}{p_1p_2}(p-p_1)(p-p_2)}$ $=\frac{K}{\left(\frac{p}{p_1}-1\right)\left(\frac{p}{p_2}-1\right)}$ $T_i=-\frac{1}{p_i}=\frac{1}{\omega_i}$ $=\frac{K}{[-(1+T_1p)][-(1+T_2p)]}$ $\boxed{H(p)=\frac{K}{(1+T_1p)(1+T_2p)}}$ $\boxed{\omega_i=\omega_0\left(z\pm\sqrt{z^2-1}\right)}$ $\boxed{min(\omega_i)<\omega_0<max(\omega_i)}$ Remarques : $z-\sqrt{z^2-1}<1<z+\sqrt{z^2-1}$ $\begin{cases}T_1+T_1=-\frac{2z}{\omega_0}\\T_1T_2=\frac{1}{{\omega_0}^2}\end{cases}$	$\Delta=0$ Soit p_0 la racine double de $D(p)$ $p_0=-z\omega_0=-\omega_0$ $D(p)=k(p-p_0)^2$ $=kp^2-2kp_0p+k{p_0}^2$ $=\frac{1}{{\omega_0}^2}p^2+\frac{2z}{\omega_0}p+1$ Soit : $k=\frac{1}{{p_0}^2}$ $H(p)=\frac{K}{\frac{1}{{p_0}^2}(p-p_0)^2}$ $=\frac{K}{\frac{1}{{p_0}^2}{p_0}^2\left(\frac{p}{p_0}-1\right)^2}$ $T=-\frac{1}{p_0}=\frac{1}{\omega_0}$ $=\frac{K}{[-(1+Tp)^2]}$ $\boxed{H(p)=\frac{K}{(1+Tp)^2}}$ $\boxed{T=\frac{1}{\omega_0}}$	$\Delta<0$ Le dénominateur ne peut être factorisé $H(p)=\frac{K}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{{\omega_0}^2}p^2}$ $H(p)=\frac{K{\omega_0}^2}{{\omega_0}^2+2z\omega_0p+p^2}$ $D(p)=p^2+2z\omega_0p+{\omega_0}^2$ $\Delta=4z^2{\omega_0}^2-4{\omega_0}^2$ $\Delta=-4{\omega_0}^2(1-z^2)<0$ $p_i=-\boldsymbol{z\omega_0}\pm i\boldsymbol{\omega_0\sqrt{1-z^2}}$ $p_i=-\boldsymbol{a}\pm i\boldsymbol{\omega_n}$ $D(p)=k(p-p_1)(p-p_2)$ $D(p)=k(p+\boldsymbol{a}-i\boldsymbol{\omega_n})(p+\boldsymbol{a}+i\boldsymbol{\omega_n})$ $=\cdots$ $=kp^2+2kap+k(a^2+{\omega_n}^2)$ $a^2+{\omega_n}^2=z^2{\omega_0}^2+{\omega_0}^2(1-z^2)$ $={\omega_0}^2$ $D(p)=kp^2+2kap+k{\omega_0}^2$ $=p^2+2z\omega_0p+{\omega_0}^2$ Soit : $k=1$ $H(p)=\frac{K{\omega_0}^2}{(p-p_1)(p-p_2)}$ $(p-p_1)(p-p_2)$ $=p^2+2ap+a^2+{\omega_n}^2$ $=(p+a)^2+{\omega_n}^2$ $H(p)=\frac{K{\omega_0}^2}{(p+a-i\omega_n)(p+a+i\omega_n)}$ $\boxed{H(p)=\frac{K{\omega_0}^2}{(p+a)^2+{\omega_n}^2}}$ $\boxed{a=z\omega_0 \quad ; \quad \omega_n=\omega_0\sqrt{1-z^2}}$

A.IV.3.b.ii Réponse indicielle

$$e(t) = e_0 u(t)$$

$$E(p) = \frac{e_0}{p}$$

$$S(p) = H(p)E(p) = \frac{Ke_0}{p\left(1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{1}{{\omega_0}^2}p^2\right)}$$

• **<u>Caractéristiques de la réponse temporelle indicielle en 0 et $+\infty$</u>**

Avant de prendre en compte les différents cas possibles, étudions les limites en 0 et $+\infty$ de $s(t)$:

En 0	En $+\infty$
Théorème de la valeur initiale $s_0 = \lim_{t \to 0^+} s(t) = \lim_{p \to +\infty} pS(p)$ $s_0 = \lim_{p \to +\infty} \left[\frac{Ke_0}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{1}{{\omega_0}^2}p^2}\right]$ $s_0 = 0$	Théorème de la valeur finale Résultat valable uniquement le système est stable $s_\infty = \lim_{t \to +\infty} s(t) = \lim_{p \to 0^+} pS(p)$ $s_\infty = \lim_{p \to 0^+} \left[\frac{Ke_0}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{1}{{\omega_0}^2}p^2}\right]$ $s_\infty = Ke_0$

De même, nous pouvons étudier la pente à l'origine de la sortie $s'_0 = s'(0)$:

$$s'_0 = \lim_{t\to 0^+} s'(t) = \lim_{p\to+\infty} p\mathcal{L}\big(s'(t)\big) = \lim_{p\to+\infty} p^2 S(p) = \lim_{p\to+\infty}\left[\frac{p^2 K e_0}{p\left(1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{{\omega_0}^2}p^2\right)}\right]$$

$$s'_0 = \lim_{p\to+\infty}\left[\frac{pKe_0}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{{\omega_0}^2}p^2}\right] = 0$$

Premières conclusions :

- La tangente à l'origine de la réponse indicielle d'un système du second ordre est horizontale.
- Si le système est stable, sa réponse asymptotiquement vers sa valeur finale $s_\infty = Ke_0$ et l'écart statique vaut $\varepsilon_s = e_0(1-K)$

• Réponse temporelle complète

Pour déterminer la forme des réponses temporelles à un échelon, nous devons décomposer les réponses en fonction du cas concerné parmi les 3 cas mis en évidence précédemment.

Cas n°1 $z>1$	Cas n°2 $z=1$	Cas n°3 $z<1$
$S(p)=\frac{K}{(1+T_1p)(1+T_2p)}\frac{e_0}{p}$ $S(p)=\frac{Ke_0}{p(1+T_1p)(1+T_2p)}$	$S(p)=\frac{K}{(1+Tp)^2}\frac{e_0}{p}$ $S(p)=\frac{Ke_0}{p(1+Tp)^2}$	$S(p)=\frac{K}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{{\omega_0}^2}p^2}\frac{e_0}{p}$ $S(p)=\frac{Ke_0{\omega_0}^2}{p[(p+a)^2+{\omega_n}^2]}$

• **Cas n°1 : $z > 1$**

$$S(p) = \frac{Ke_0}{p(1+T_1p)(1+T_2p)}$$

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{1+T_1p} + \frac{C}{1+T_2p}$$

$$S(p) = \frac{A + (AT_1 + B)p}{p(1+T_1p)} + \frac{C + CT_1p}{(1+T_1p)(1+T_2p)}$$

$$S(p) = \frac{A + (AT_1 + B)p + AT_2p + (AT_1 + B)T_2p^2 + Cp + CT_1p^2}{p(1+T_1p)(1+T_2p)}$$

$$S(p) = \frac{(AT_1T_2 + BT_2 + CT_1)p^2 + (A(T_1+T_2) + B + C)p + A}{p(1+T_1p)(1+T_2p)}$$

$$\begin{cases} A = Ke_0 \\ A(T_1+T_2) + B + C = 0 \\ AT_1T_2 + BT_2 + CT_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = Ke_0 \\ B = -C - Ke_0(T_1+T_2) \\ Ke_0T_1T_2 - CT_2 - Ke_0(T_1+T_2)T_2 + CT_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = Ke_0 \\ B = -C - Ke_0(T_1+T_2) \\ Ke_0T_1T_2 - CT_2 - Ke_0T_1T_2 - Ke_0{T_2}^2 + CT_1 = 0 \end{cases}$$

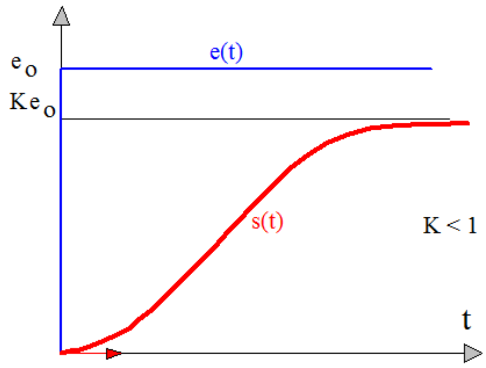
$$\begin{cases} A = Ke_0 \\ B = \frac{Ke_0{T_2}^2}{T_2 - T_1} - Ke_0(T_1+T_2) = \frac{Ke_0{T_2}^2 - Ke_0(T_1+T_2)(T_2-T_1)}{T_2-T_1} = \frac{Ke_0{T_1}^2}{T_2-T_1} \\ C = -\frac{Ke_0{T_2}^2}{T_2-T_1} \end{cases}$$

$$S(p) = \frac{Ke_0}{p} + \frac{Ke_0{T_1}^2}{T_2-T_1}\frac{1}{1+T_1p} - \frac{Ke_0{T_2}^2}{T_2-T_1}\frac{1}{1+T_2p}$$

$$S(p) = \frac{Ke_0}{p} + \frac{Ke_0}{T_2-T_1}\left[T_1\frac{1}{p+\frac{1}{T_1}} - T_2\frac{1}{p+\frac{1}{T_2}}\right]$$

$$\boxed{s(t) = Ke_0\left[1 + \frac{1}{T_2-T_1}\left[T_1e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2e^{-\frac{t}{T_2}}\right]\right]u(t)}$$

Régime apériodique $z > 1$



Ainsi, dans le cas où $z > 1$, le système répond de manière non oscillante et amortie.

• **Cas n°2 : $z = 1$**

$$S(p) = \frac{Ke_0}{p(1+Tp)^2}$$

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{1+Tp} + \frac{C}{(1+Tp)^2}$$

$$S(p) = \frac{A + (AT+B)p}{p(1+Tp)} + \frac{Cp}{p(1+Tp)^2}$$

$$S(p) = \frac{(AT+B)Tp^2 + (2AT+B+C)p + A}{p(1+Tp)^2}$$

$$\begin{cases} (AT+B)T = 0 \\ 2AT+B+C = 0 \\ A = Ke_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = -AT = -Ke_0T \\ C = -Ke_0T \\ A = Ke_0 \end{cases}$$

$$S(p) = Ke_0\left[\frac{1}{p} - \frac{T}{1+Tp} - \frac{T}{(1+Tp)^2}\right] = Ke_0\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p+\frac{1}{T}} - \frac{1}{T}\frac{1}{\left(p+\frac{1}{T}\right)^2}\right]$$

$$S(t) = Ke_0\left[1 - e^{-\frac{t}{T}} - \frac{1}{T}te^{-\frac{t}{T}}\right]u(t)$$

$$s(t) = Ke_0\left[1 - e^{-\frac{t}{T}}\left(1+\frac{t}{T}\right)\right]u(t)$$

Régime apériodique critique $z = 1$

Ici encore, la réponse est apériodique. C'est un régime limite avec le cas n°1 présentant la même courbe de réponse. Il sera donc appelé critique

• **Cas n°3 : $z < 1$**

$$S(p) = \frac{Ke_0{\omega_0}^2}{p[(p+a)^2 + {\omega_n}^2]}$$

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{Bp + C}{(p+a)^2 + {\omega_n}^2}$$

$$S(p) = \frac{A[(p+a)^2 + {\omega_n}^2]}{pp[(p+a)^2 + {\omega_n}^2]} + \frac{Bp^2 + Cp}{p[(p+a)^2 + {\omega_n}^2]}$$

$$S(p) = \frac{Ap^2 + 2Aap + Aa^2 + A{\omega_n}^2 + Bp^2 + Cp}{p[(p+a)^2 + {\omega_n}^2]}$$

$$S(p) = \frac{(A+B)p^2 + (2Aa + C)p + A(a^2 + {\omega_n}^2)}{p[(p+a)^2 + {\omega_n}^2]}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2Aa + C = 0 \\ A(a^2 + {\omega_n}^2) = Ke_0{\omega_0}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = -A = -Ke_0 \\ C = -2Aa = -2aKe_0 \\ A = \dfrac{Ke_0{\omega_0}^2}{a^2 + {\omega_n}^2} = \dfrac{Ke_0{\omega_0}^2}{z^2{\omega_0}^2 + {\omega_0}^2(1 - z^2)} = Ke_0 \end{cases}$$

$$S(p) = \frac{Ke_0}{p} + \frac{-Ke_0p - 2aKe_0}{(p+a)^2 + {\omega_n}^2}$$

$$S(p) = Ke_0\left[\frac{1}{p} - \frac{p + 2a}{(p+a)^2 + {\omega_n}^2}\right]$$

$$S(p) = Ke_0\left[\frac{1}{p} - \frac{p + a}{(p+a)^2 + {\omega_n}^2} - \frac{a}{\omega_n}\frac{\omega_n}{(p+a)^2 + {\omega_n}^2}\right]$$

$$s(t) = Ke_0\left[1 - e^{-at}\cos(\omega_n t) - \frac{a}{\omega_n}e^{-at}\sin(\omega_n t)\right]u(t)$$

$$s(t) = Ke_0\left[1 - e^{-at}\left(\cos(\omega_n t) + \frac{a}{\omega_n}\sin(\omega_n t)\right)\right]u(t)$$

$$\cos(\omega_n t) + \frac{a}{\omega_n}\sin(\omega_n t) = \sqrt{1 + \frac{a^2}{{\omega_n}^2}}\frac{\cos(\omega_n t) + \frac{a}{\omega_n}\sin(\omega_n t)}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{{\omega_n}^2}}}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{a^2}{{\omega_n}^2}}\left[\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{{\omega_n}^2}}}\cos(\omega_n t) + \frac{\frac{a}{\omega_n}}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{{\omega_n}^2}}}\sin(\omega_n t)\right]$$

Calculons :

$$\sqrt{1+\frac{a^2}{{\omega_n}^2}}=\sqrt{\frac{{\omega_0}^2(1-z^2)+z^2{\omega_0}^2}{{\omega_0}^2(1-z^2)}}=\sqrt{\frac{{\omega_0}^2}{{\omega_0}^2(1-z^2)}}=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

Ainsi :

$$\cos(\omega_n t)+\frac{a}{\omega_n}\sin(\omega_n t)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\left[\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}}\cos(\omega_n t)+\frac{\frac{a}{\omega_n}}{\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}}\sin(\omega_n t)\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\left[\sqrt{1-z^2}\cos(\omega_n t)+\frac{a\sqrt{1-z^2}}{\omega_n}\sin(\omega_n t)\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\left[\sqrt{1-z^2}\cos(\omega_n t)+z\sin(\omega_n t)\right]$$

Soit ϕ tel que

$\sin\phi=\sqrt{1-z^2}\in[0;1]$	$\cos\phi=z\in[0;1]$	$\tan\phi=\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}$
$\phi=\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}$		

Alors

$$\cos(\omega_n t)+\frac{a}{\omega_n}\sin(\omega_n t)=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}[\sin\phi\cos(\omega_n t)+\cos\phi\sin(\omega_n t)]=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\sin(\omega_n t+\phi)$$

Finalement

$$s(t) = Ke_0\left[1 - \frac{e^{-z\omega_0 t}}{\sqrt{1-z^2}}\sin(\omega_n t + \phi)\right]u(t)$$

$$\omega_n = \omega_0\sqrt{1-z^2}$$

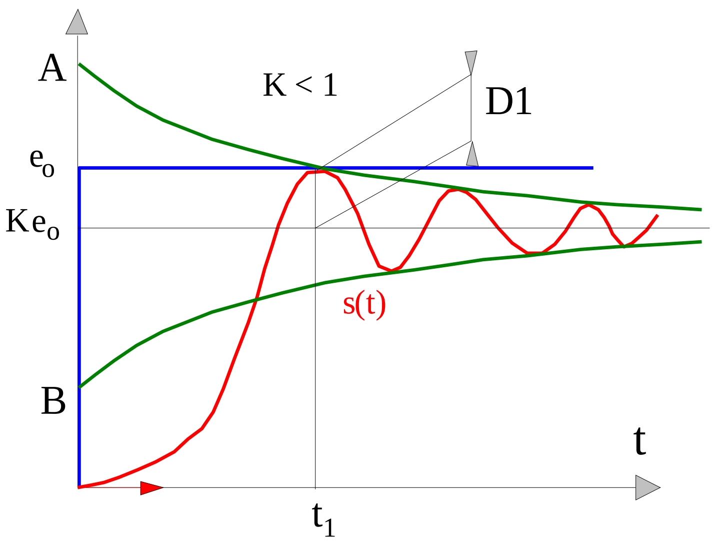
$$\phi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}$$

Régime pseudopériodique $z < 1$

La réponse temporelle d'un système du second ordre en régime pseudopériodique

- Est déphasée de $\phi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}$
- A une pseudo pulsation de $\omega_n = \omega_0\sqrt{1-z^2}$ et une pseudo période de $T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}$
- Est une sinusoïdale amortie encadrée par deux exponentielles d'équations

$$y(t) = Ke_0\left[1 \pm \frac{e^{-z\omega_0 t}}{\sqrt{1-z^2}}\right]$$



Cette réponse présente plusieurs maximums, les premiers correspondant généralement à des dépassements. On caractérise l'amortissement du système à l'aide du premier dépassement. Pour le déterminer, il suffit d'annuler la dérivée de la réponse temporelle :

$$S(p) = \frac{Ke_0{\omega_0}^2}{p[(p+a)^2 + {\omega_n}^2]}$$

$$\mathcal{L}\big(s'(t)\big) = pS(p) - s(0^+) = pS(p)$$

$$\mathcal{L}\big(s'(t)\big) = Ke_0\frac{{\omega_0}^2}{(p+a)^2 + {\omega_n}^2} = \frac{Ke_0{\omega_0}^2}{\omega_n}\frac{\omega_n}{(p+a)^2 + {\omega_n}^2}$$

$$s'(t) = \frac{Ke_0{\omega_0}^2}{\omega_0\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_0 t}\sin(\omega_n t)\,u(t)$$

$$s'(t) = \frac{Ke_0\omega_0}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_0 t}\sin(\omega_n t)\,u(t)$$

$$s'(t) = 0 \Leftrightarrow \omega_n t = k\pi$$

Le premier maximum est atteint pour $k = 1$ (les suivants étant atteints pour des valeurs de k impaires, les nombres pairs correspondant à des minimums)

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega_n} = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}} = \frac{T_n}{2}$$

Le premier maximum est donc atteint après un temps correspondant à un demie pseudo période du signal.

$$s(t_1) = Ke_0\left[1 - \frac{e^{-\frac{\pi z}{\sqrt{1-z^2}}}}{\sqrt{1-z^2}}\sin(\pi+\phi)\right]$$

$$s(t_1) = Ke_0\left[1 + \frac{e^{-\frac{\pi z}{\sqrt{1-z^2}}}}{\sqrt{1-z^2}}\sin(\phi)\right]$$

$$s(t_1) = Ke_0\left[1 + e^{-\frac{\pi z}{\sqrt{1-z^2}}}\right]$$

On définit le dépassement relatif comme le rapport :

$$D_{i\%} = \frac{s(t_i) - s(+\infty)}{s(+\infty)}$$

Ainsi, le premier dépassement relatif vaut :

$$D_{1\%} = \frac{s(t_1) - s(+\infty)}{s(+\infty)} = \frac{Ke_0\left[1 + e^{-\frac{\pi z}{\sqrt{1-z^2}}}\right] - Ke_0}{Ke_0}$$

$$\boxed{D_{1\%} = e^{-\frac{\pi z}{\sqrt{1-z^2}}}}$$

$$D_{1\%} \epsilon [0;1]\ et\ s'emprime\ en\ \%\ de\ 0\ à\ 100\%$$

Cette valeur ne dépend que de l'amortissement z

Le dépassement réel obtenu vaut donc :

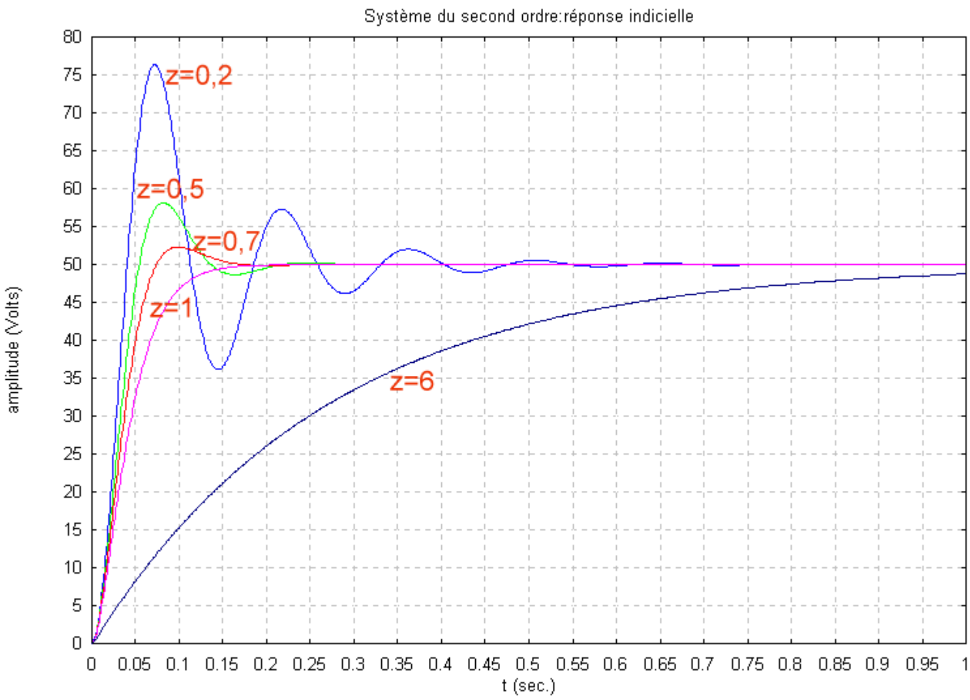
$$D_1 = D_{1\%}s_\infty = Ke_0D_{1\%}$$

• **Résumé de la réponse à un échelon d'un 2° ordre**

Un système du second ordre répondant à un échelon présente

- Un écart statique valant $\varepsilon_s = e_0(1-K)$
- Une réponse sans dépassement ni oscillations si $z \geq 1$
- Une réponse avec dépassements et oscillations si $z < 1$

La figure ci-dessous présente des réponses temporelles d'un système du 2° ordre pour le même échelon et différentes valeurs du coefficient d'amortissement z

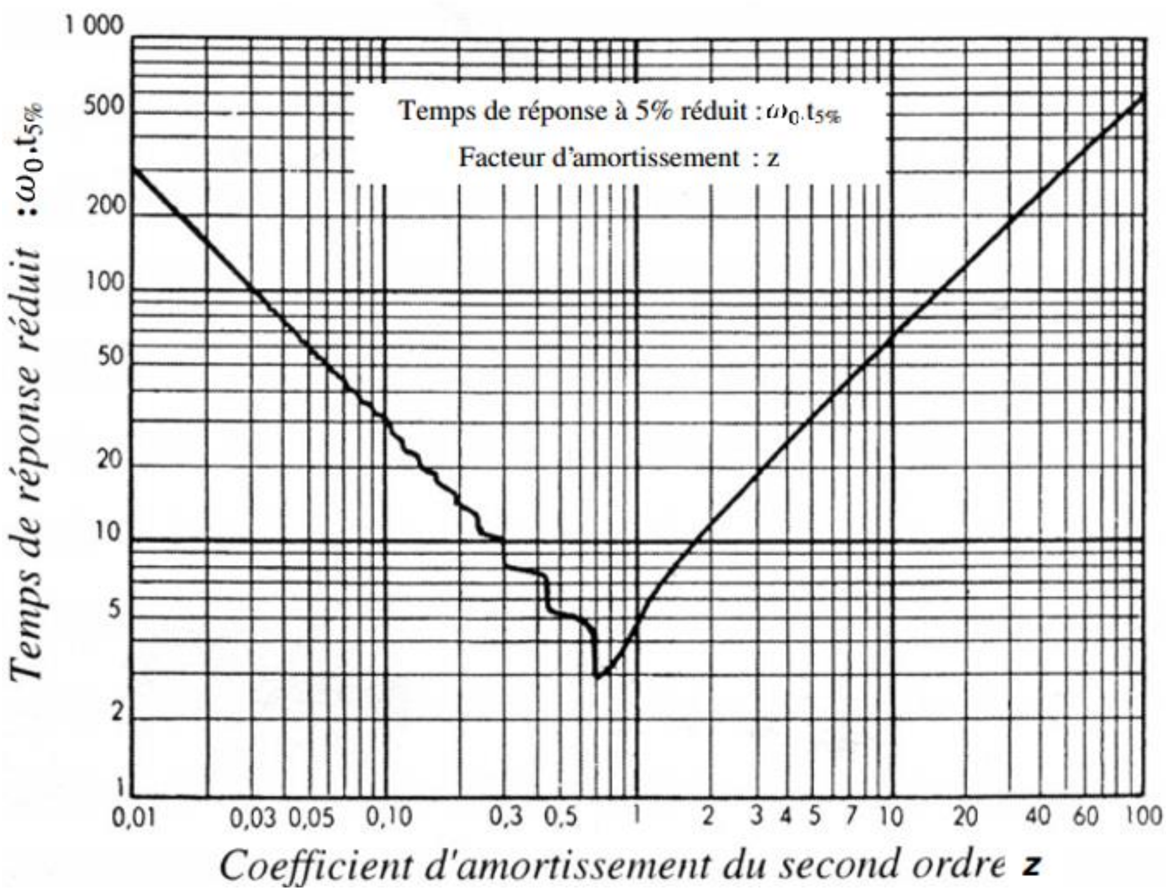


Résumé des réponses à un échelon d'un 2° ordre	
$z > 1$	$s(t) = Ke_0\left[1+\frac{1}{T_2-T_1}\left[T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t}{T_2}}\right]\right]$
$z = 1$	$s(t) = Ke_0\left[1-e^{-\frac{t}{T}}\left(1+\frac{t}{T}\right)\right]$
$z < 1$	$s(t) = Ke_0\left[1-\frac{e^{-z\omega_0 t}}{\sqrt{1-z^2}}\sin(\omega_n t+\phi)\right]u(t)$ $\omega_n = \omega_0\sqrt{1-z^2}$ $\phi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}$

Rapidité des systèmes du second ordre en fonction de z

$z<1$			$z=1$	$z>1$
Régime pseudo périodique $\omega_n=\omega_0\sqrt{1-z^2}$			Régime apériodique critique	Régime apériodique
$z<\frac{\sqrt{2}}{2}$	$z=\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}7$	$z>\frac{\sqrt{2}}{2}$		
Régime oscillant	Régime LE PLUS RAPIDE Présence d'un dépassement $D_{1\%}=e^{-\frac{\pi z}{\sqrt{1-z^2}}}$ $D_{1\%}=e^{-\pi}$ $=4{,}3\%$ $t_1=\frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}$	Régime oscillant	Le plus rapide sans dépassement	Régime amorti Lent

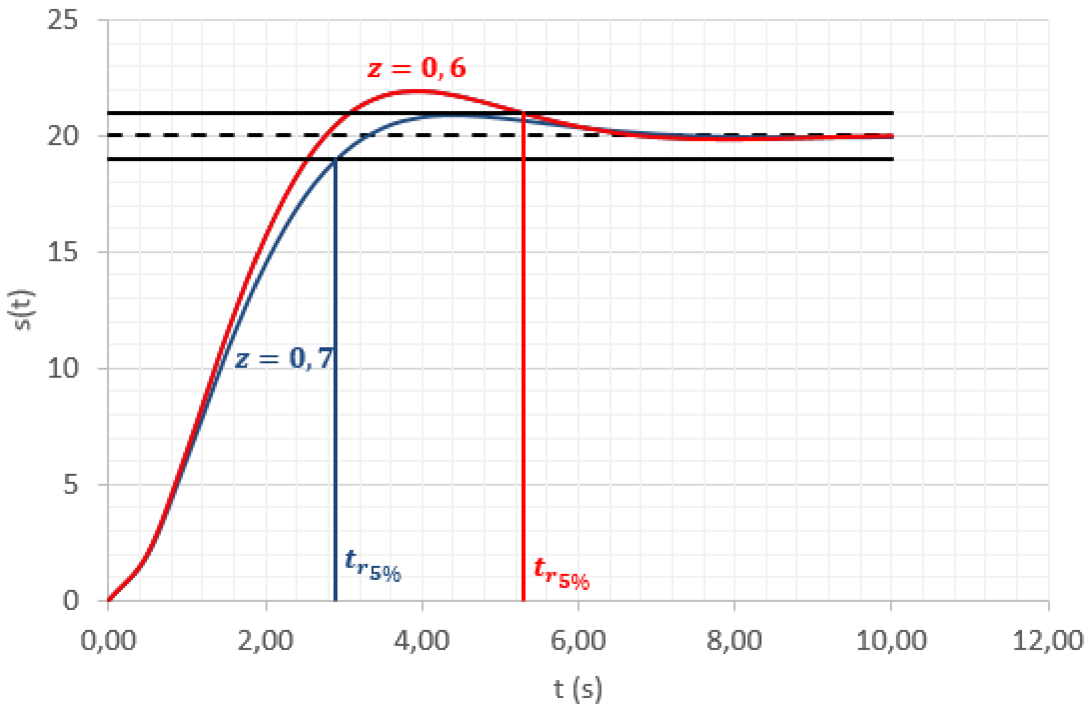
Pour un système du second ordre, le temps de réponse à 5% d'une réponse indicielle dépend du facteur d'amortissement. La courbe suivante permet de le déterminer :



Cette courbe illustre le fait que pour un second ordre, si z est fixé, on a :

$$tr_{5\%}\omega_0=k(z)$$

Le comportement en escaliers pour la partie où $z < 0{,}7$ s'explique bien en regardant les oscillations de la réponse :



Lorsque $z = 0{,}7$, on a le système LE PLUS RAPIDE. On voit bien que si on diminue encore un tout petit peu z, la réponse va dépasser la plage $\pm 5\% s_\infty$ et le temps de réponse va augmenter jusqu'à ce que la réponse reste dans cette plage. On illustre ce fait avec le cas $z = 0{,}6$ ci-dessus.

Il est recommandé de savoir qu'au temps de réponse le plus faible $(z = 0{,}7)$, avec présence d'un dépassement, on a :

$$tr_{5\%}\omega_0 = 3$$

De même, il faut savoir qu'au temps de réponse le plus faible sans dépassement $(z = 1)$, on a :

$$tr_{5\%}\omega_0 = 5$$

A.IV.3.b.iii Réponse à une rampe

Considérons une rampe en entrée du système :

$$e(t) = btu(t)$$

$$E(p) = \frac{b}{p^2}$$

Pour déterminer la forme des réponses temporelles à un échelon, nous devons décomposer les réponses en fonction du cas concerné parmi les 3 cas mis en évidence précédemment.

Cas n°1 $z > 1$	Cas n°2 $z = 1$	Cas n°3 $z < 1$
$S(p) = \frac{K}{(1+T_1p)(1+T_2p)}\frac{b}{p^2}$ $S(p) = \frac{Kb}{p^2(1+T_1p)(1+T_2p)}$	$S(p) = \frac{K}{(1+Tp)^2}\frac{b}{p^2}$ $S(p) = \frac{Kb}{p^2(1+Tp)^2}$	$S(p) = \frac{K}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{{\omega_0}^2}p^2}\frac{b}{p^2}$ $S(p) = \frac{Kb{\omega_0}^2}{p^2[(p+a)^2+{\omega_n}^2]}$

• **Cas n°1 : $z > 1$**

$$S(p) = \frac{Kb}{p^2(1+T_1p)(1+T_2p)}$$

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{1+T_1p} + \frac{D}{1+T_2p}$$

$$S(p) = \frac{Ap+B}{p^2} + \frac{C + CT_2p + D + DT_1p}{(1+T_1p)(1+T_2p)}$$

$$S(p) = \frac{Ap + B + AT_1p^2 + T_1Bp}{p^2(1+T_1p)} + \frac{C + CT_2p + D + DT_1p}{(1+T_1p)(1+T_2p)}$$

$$S(p) = \frac{Ap + B + AT_1p^2 + T_1Bp + AT_2p^2 + BT_2p + AT_1T_2p^3 + T_1BT_2p^2 + Cp^2 + CT_2p^3 + Dp^2 + DT_1p^3}{p^2(1+T_1p)(1+T_2p)}$$

$$S(p) = \frac{(AT_1T_2 + CT_2 + DT_1)p^3 + (AT_1 + AT_2 + BT_1T_2 + C + D)p^2 + (A + BT_1 + BT_2)p + B}{p^2(1+T_1p)(1+T_2p)}$$

$$\begin{cases} AT_1T_2 + CT_2 + DT_1 = 0 \\ AT_1 + AT_2 + BT_1T_2 + C + D = 0 \\ A + BT_1 + BT_2 = 0 \\ B = Kb \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = -D\dfrac{T_1}{T_2} - AT_1 \\ AT_1 + AT_2 + BT_1T_2 - D\dfrac{T_1}{T_2} - AT_1 + D = 0 \\ A = -Kb(T_1 + T_2) \\ B = Kb \end{cases}$$

$$D\frac{T_2 - T_1}{T_2} = -T_2(A + BT_1)$$

$$D = -\frac{{T_2}^2}{T_2 - T_1}(A + BT_1) = -\frac{{T_2}^2}{T_2 - T_1}Kb(-T_1 - T_2 + T_1) = Kb\frac{{T_2}^3}{T_2 - T_1}$$

$$C = -\frac{{T_2}^3}{T_2 - T_1}Kb\frac{T_1}{T_2} \pm Kb(T_1 + T_2)T_1 = Kb\left(-\frac{{T_2}^2T_1 - (T_1 + T_2)(T_2 - T_1)T_1}{T_2 - T_1}\right)$$

$$C = Kb\left(-\frac{{T_2}^2T_1 - \left({T_2}^2T_1 - {T_1}^3\right)}{T_2 - T_1}\right) = -Kb\frac{{T_1}^3}{T_2 - T_1}$$

$$\begin{cases} C = -Kb\dfrac{{T_1}^3}{T_2 - T_1} \\ D = Kb\dfrac{{T_2}^3}{T_2 - T_1} \\ A = -Kb(T_1 + T_2) \\ B = Kb \end{cases}$$

$$S(p) = Kb\left[-\frac{T_1 + T_2}{p} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{T_2 - T_1}\left({T_1}^2\frac{1}{p + \frac{1}{T_1}} - {T_2}^2\frac{1}{p + \frac{1}{T_2}}\right)\right]$$

$$\boxed{s(t) = Kb\left[t - T_1 - T_2 - \frac{1}{T_2 - T_1}\left({T_1}^2e^{-\frac{t}{T_1}} - {T_2}^2e^{-\frac{t}{T_2}}\right)\right]u(t)}$$

$$\boldsymbol{z > 1}$$

- **Cas n°2 : $z = 1$**

$$S(p) = \frac{Kb}{p^2(1+Tp)^2}$$

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{1+Tp} + \frac{D}{(1+Tp)^2}$$

$$S(p) = \frac{Ap+B}{p^2} + \frac{C+CTp+D}{(1+Tp)^2}$$

$$S(p) = \frac{(Ap+B)(1+2Tp+T^2p^2)+(C+D)p^2+CTp^3}{p^2(1+Tp)^2}$$

$$S(p) = \frac{(Ap+B+2ATp^2+2TBp+AT^2p^3+BT^2p^2)+(C+D)p^2+CTp^3}{p^2(1+Tp)^2}$$

$$S(p) = \frac{T(C+AT)p^3+(2AT+BT^2+C+D)p^2+(A+2TB)p+B}{p^2(1+Tp)^2}$$

$$\begin{cases} T(C+AT) = 0 \\ 2AT+BT^2+C+D = 0 \\ A+2TB = 0 \\ B = Kb \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = -AT \\ 2AT+BT^2-AT+D = 0 \\ A = -2TKb \\ B = Kb \end{cases}$$

$$D = -2AT - BT^2 + AT = 4KbT^2 - KbT^2 - 2KbT^2 = KbT^2$$

$$\begin{cases} C = 2KbT^2 \\ D = KbT^2 \\ A = -2TKb \\ B = Kb \end{cases}$$

$$S(p) = Kb\left[\frac{-2T}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{2T^2}{1+Tp} + \frac{T^2}{(1+Tp)^2}\right]$$

$$S(p) = Kb\left[-\frac{2T}{p} + \frac{1}{p^2} + \left(2T\frac{1}{p+\frac{1}{T}} + \frac{1}{\left(p+\frac{1}{T}\right)^2}\right)\right]$$

$$s(t) = Kb\left[-\frac{2T}{p} + \frac{1}{p^2} + \left(2Te^{-\frac{t}{T}} + te^{-\frac{t}{T}}\right)\right]u(t)$$

$$\boxed{\begin{gathered} s(t) = Kb\left[t - 2T + (t+2T)e^{-\frac{t}{T}}\right]u(t) \\ \boldsymbol{z = 1} \end{gathered}}$$

• **Cas n°3 : $z < 1$**

$$S(p) = \frac{Kb{\omega_0}^2}{p^2[(p+a)^2 + {\omega_n}^2]}$$

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{Cp + D}{(p+a)^2 + {\omega_n}^2}$$

$$S(p) = \frac{Ap + B}{p^2} + \frac{Cp^3 + Dp^2}{p^2[(p+a)^2 + {\omega_n}^2]}$$

$$S(p) = \frac{(Ap + B)[p^2 + 2ap + (a^2 + {\omega_n}^2)] + Cp^3 + Dp^2}{p^2[(p+a)^2 + {\omega_n}^2]}$$

$$S(p) = \frac{[Ap^3 + 2Aap^2 + A(a^2 + {\omega_n}^2)p + Bp^2 + 2Bap + B(a^2 + {\omega_n}^2)] + Cp^3 + Dp^2}{p^2[(p+a)^2 + {\omega_n}^2]}$$

$$S(p) = \frac{(A + C)p^3 + (2Aa + B + D)p^2 + [A(a^2 + {\omega_n}^2) + 2Ba]p + B(a^2 + {\omega_n}^2)}{p^2[(p+a)^2 + {\omega_n}^2]}$$

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ 2Aa + B + D = 0 \\ A(a^2 + {\omega_n}^2) + 2Ba = 0 \\ B(a^2 + {\omega_n}^2) = Kb{\omega_0}^2 \end{cases}$$

$$B = \frac{Kb{\omega_0}^2}{a^2 + {\omega_n}^2}$$

On a vu précédemment que :

$$\frac{{\omega_0}^2}{a^2 + {\omega_n}^2} = \frac{{\omega_0}^2}{z^2{\omega_0}^2 + {\omega_0}^2(1 - z^2)} = 1$$

De même, on a

$$\frac{a}{a^2 + {\omega_n}^2} = \frac{\mathrm{z}\omega_0}{z^2{\omega_0}^2 + {\omega_0}^2(1 - z^2)} = \frac{\mathrm{z}}{\omega_0} = \frac{\mathrm{a}}{{\omega_0}^2}$$

$$\begin{cases} C = -A = Kb\dfrac{2z}{\omega_0} \\ D = -2Aa - B = 2Kb\dfrac{2z}{\omega_0}a - Kb = Kb\left[\dfrac{4z}{\omega_0}a - 1\right] = Kb[4z^2 - 1] \\ A = -\dfrac{2Ba}{a^2 + {\omega_n}^2} = -\dfrac{2Kba}{a^2 + {\omega_n}^2} = -Kb\dfrac{2z}{\omega_0} \\ B = Kb \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = Kb\dfrac{2z}{\omega_0} \\ D = Kb[4z^2 - 1] \\ A = -Kb\dfrac{2z}{\omega_0} \\ B = Kb \end{cases}$$

$$S(p) = -Kb\frac{2z}{\omega_0}\frac{1}{p} + \frac{Kb}{p^2} + \frac{Kb\frac{2z}{\omega_0}p + Kb[4z^2-1]}{(p+a)^2+{\omega_n}^2}$$

$$S(p) = Kb\left[-\frac{2z}{\omega_0}\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{\frac{2z}{\omega_0}p + [4z^2-1]}{(p+a)^2+{\omega_n}^2}\right]$$

$$\frac{\frac{2z}{\omega_0}p + [4z^2-1]}{(p+a)^2+{\omega_n}^2} = \frac{\frac{2a}{{\omega_0}^2}p + 4\frac{a^2}{{\omega_0}^2} - 1}{(p+a)^2+{\omega_n}^2}$$

$$= \frac{2a}{{\omega_0}^2}\frac{p+2a}{(p+a)^2+{\omega_n}^2} - \frac{1}{(p+a)^2+{\omega_n}^2}$$

$$= \frac{2a}{{\omega_0}^2}\frac{p+a}{(p+a)^2+{\omega_n}^2} + \frac{2a}{{\omega_0}^2}\frac{a}{(p+a)^2+{\omega_n}^2} - \frac{1}{(p+a)^2+{\omega_n}^2}$$

$$= \frac{2a}{{\omega_0}^2}\frac{p+a}{(p+a)^2+{\omega_n}^2} - \frac{\frac{2a^2}{{\omega_0}^2} - 1}{(p+a)^2+{\omega_n}^2}$$

$$= \frac{2a}{{\omega_0}^2}\frac{p+a}{(p+a)^2+{\omega_n}^2} + \frac{2z^2-1}{(p+a)^2+{\omega_n}^2}$$

$$= \frac{2z}{\omega_0}\frac{p+a}{(p+a)^2+{\omega_n}^2} + \frac{2z^2-1}{\omega_n}\frac{\omega_n}{(p+a)^2+{\omega_n}^2}$$

$$s(t) = Kb\left[t - \frac{2z}{\omega_0} + \frac{2z}{\omega_0}e^{-at}\cos(\omega_n t) + \frac{2z^2-1}{\omega_n}e^{-at}\sin(\omega_n t)\right]u(t)$$

$$s(t) = Kb\left[t - \frac{2z}{\omega_0} + e^{-at}\left(\frac{2z}{\omega_0}\cos(\omega_n t) + \frac{2z^2-1}{\omega_n}\sin(\omega_n t)\right)\right]u(t)$$

Posons :

$$N = \sqrt{\left(\frac{2z}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{2z^2-1}{\omega_n}\right)^2} = \sqrt{\frac{4z^2(1-z^2)}{{\omega_n}^2} + \frac{4z^4-4z^2+1}{{\omega_n}^2}}$$

$$N = \sqrt{\frac{4z^2-4z^4+4z^4-4z^2+1}{{\omega_n}^2}} = \frac{1}{\omega_n}$$

$$\frac{2z}{\omega_0}\cos(\omega_n t) + \frac{2z^2-1}{\omega_n}\sin(\omega_n t) = N\left[\frac{\frac{2z}{\omega_0}}{N}\cos(\omega_n t) + \frac{\frac{2z^2-1}{\omega_n}}{N}\sin(\omega_n t)\right]$$

$$= \frac{1}{\omega_n}\left[2z\sqrt{1-z^2}\cos(\omega_n t) + (2z^2-1)\sin(\omega_n t)\right]$$

Soit ϕ tel que

$\sin\phi = 2z\sqrt{1-z^2} \in [0;1]$	$\cos\phi = 2z^2-1 \in [0;1]$	$\tan\phi = \frac{2z\sqrt{1-z^2}}{2z^2-1}$
$\phi = \tan^{-1}\frac{2z\sqrt{1-z^2}}{2z^2-1}$		

$$\frac{2z}{\omega_0}\cos(\omega_n t) + \frac{2z^2-1}{\omega_n}\sin(\omega_n t) = \frac{1}{\omega_n}[\sin\phi\cos(\omega_n t) + \cos\phi\sin(\omega_n t)]$$

$$= \frac{1}{\omega_n}\sin(\omega_n t + \phi)$$

Finalement, on a donc :

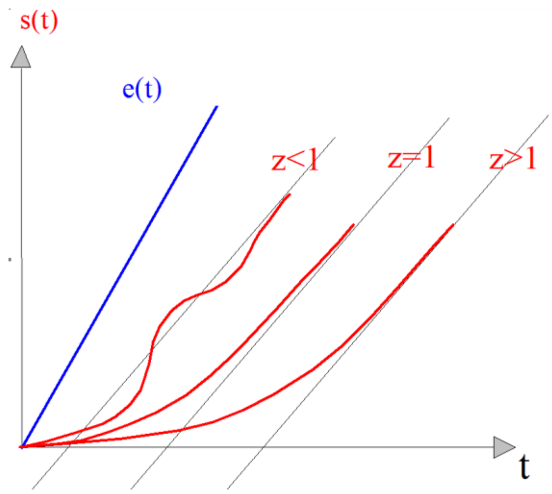
$$s(t) = Kb\left[t - \frac{2z}{\omega_0} + \frac{1}{\omega_n}e^{-z\omega_0 t}\sin(\omega_n t + \phi)\right]u(t)$$

$$\omega_n = \omega_0\sqrt{1-z^2}$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{2z\sqrt{1-z^2}}{2z^2-1}$$

$$\boldsymbol{z < 1}$$

• **Bilan**



Résumé des réponses à une rampe d'un 2° ordre	
$z > 1$	$s(t) = Kb\left[t - T_1 - T_2 - \frac{1}{T_2 - T_1}\left({T_1}^2 e^{-\frac{t}{T_1}} - {T_2}^2 e^{-\frac{t}{T_2}}\right)\right]$

$z = 1$	$s(t) = Kb\left[t - 2T + (t + 2T)e^{-\frac{t}{T}}\right]$
$z < 1$	$s(t) = Kb\left[t - \frac{2z}{\omega_0} + \frac{1}{\omega_n} e^{-z\omega_0 t} \sin(\omega_n t + \phi)\right] u(t)$ $\omega_n = \omega_0\sqrt{1 - z^2}$ $\phi = \tan^{-1}\frac{2z\sqrt{1-z^2}}{2z^2 - 1}\phi = \tan^{-1}\frac{2z\sqrt{1-z^2}}{2z^2 - 1}$

Asymptote à l'infini		
$z > 1$	$z = 1$	$z < 1$
$s(t) \underset{+\infty}{\sim} Kb(t - T_1 - T_2)$	$s(t) \underset{+\infty}{\sim} Kb(t - 2T)$	$s(t) \underset{+\infty}{\sim} Kb\left(t - \frac{2z}{\omega_0}\right)$

Erreur de poursuite $\boldsymbol{\varepsilon_v = \lim_{t \to +\infty} [e(t) - s(t)]}$		
$z > 1$	$\lim_{t \to +\infty} [bt - Kb(t - T_1 - T_2)]$ $\lim_{t \to +\infty} [bt(1 - K) + Kb(T_1 + T_2)]$	$\varepsilon_v = \begin{cases} b(T_1 + T_2)\ si\ K = 1 \\ \infty\ si\ K \neq 1 \end{cases}$
$z = 1$	$\lim_{t \to +\infty} [bt - Kb(t - 2T)]$ $\lim_{t \to +\infty} [bt(1 - K) + 2KbT]$	$\varepsilon_v = \begin{cases} 2bT\ si\ K = 1 \\ \infty\ si\ K \neq 1 \end{cases}$
$z < 1$	$\lim_{t \to +\infty} \left[bt - Kb\left(t - \frac{2z}{\omega_0}\right)\right]$ $\lim_{t \to +\infty} \left[bt(1 - K) + Kb\frac{2z}{\omega_0}\right]$	$\varepsilon_v = \begin{cases} b\frac{2z}{\omega_0}\ si\ K = 1 \\ \infty\ si\ K \neq 1 \end{cases}$

Bilan de l'erreur de poursuite : $K = 1 \Rightarrow erreur\ de\ poursuite\ constante$, sinon elle est infinie

A.IV.3.b.iv Bilan des performances d'un système du 2° ordre

Rapidité	Stabilité	Précision
$tr_{5\%}\omega_0 = k(z)$ A lire sur courbe fournie A savoir : $k(0{,}7) = 3$ $k(1) = 5$	Oscillations si $z < 1$ $\omega_n = \omega_0\sqrt{1 - z^2}$ Système stable	Echelon Dépassement si $z < 1$ $D_{1\%} = e^{-\frac{\pi z}{\sqrt{1-z^2}}}$ $s_\infty = Ke_0$ $\varepsilon_s = e_0(1 - K)$ Rampe $\varepsilon_v = \begin{cases} \infty\ si\ K \neq 1 \\ \begin{cases} b(T_1 + T_2)\ si\ z > 1 \\ 2bT\ si\ z = 1 \\ b\frac{2z}{\omega_0}\ si\ z < 1 \end{cases} \end{cases}$
Autre		
$s'(0^+) = 0\ si\ e(t) = \begin{cases} e_0 u(t) \\ btu(t) \end{cases}$		

Remarque :

- Il est souvent plus parlant de donner un écart statique en % de la valeur de consigne afin d'évaluer la précision du système :

$$\varepsilon_s = e_0(1 - K) = \frac{e_0(1 - K)}{e_0}\% = (1 - K)\%$$

- Rappelons que parler d'écart n'a de sens que si l'on compare deux grandeurs de même unité

A.V. Identification

L'identification d'un système consiste à déterminer son ordre et les coefficients caractéristiques de sa fonction de transfert à partir de la courbe temporelle de sa réponse à un échelon afin de proposer un son modèle de connaissance. On peut toutefois étudier sa réponse à d'autres sollicitations, en particulier ses réponses harmoniques, que nous verrons plus tard. Il faudra donc toujours passer par une manipulation expérimentale afin d'obtenir cette courbe. Souvent, la courbe obtenue est bruitée et la précision de l'identification s'en trouvera diminuée.

Dans ce cours, nous aborderons l'identification des systèmes du 1° et du 2° ordre à un échelon.

Par ailleurs, nous aborderons un cas particulier d'étude la réponse en oscillations libres d'un système du second ordre pour l'identification de certains de ses coefficients.

A.V.1 Préliminaires

La détermination de l'ordre d'un système à partir de sa réponse à un échelon se fait progressivement et par élimination.

Un premier ordre

- ne peut présenter de dépassement
- a une pente à l'origine non nulle

Si le système présente une pente à l'origine nulle ou s'il présente au moins un dépassement, son ordre sera au minimum 2.

Prouvons que tout système d'ordre n supérieur ou égal à 2 dont le numérateur de la fonction de transfert est un gain statique a une pente à l'origine nulle :

Soit un système d'ordre n de fonction de transfert canonique

$$H(p) = \frac{K}{a_n p^n + \cdots + a_1 p + a_0}$$

$$E(p) = \frac{E_0}{p} \quad ; \quad S(p) = H(p)E(p) = \frac{E_0}{p}\frac{K}{a_n p^n + \cdots + a_1 p + 1} \ (a_0 = 1)$$

$$\lim_{t\to 0^+} s'(t) = \lim_{p\to+\infty} p\mathcal{L}\big(s'(t)\big) = \lim_{p\to+\infty} p^2 S(p)$$

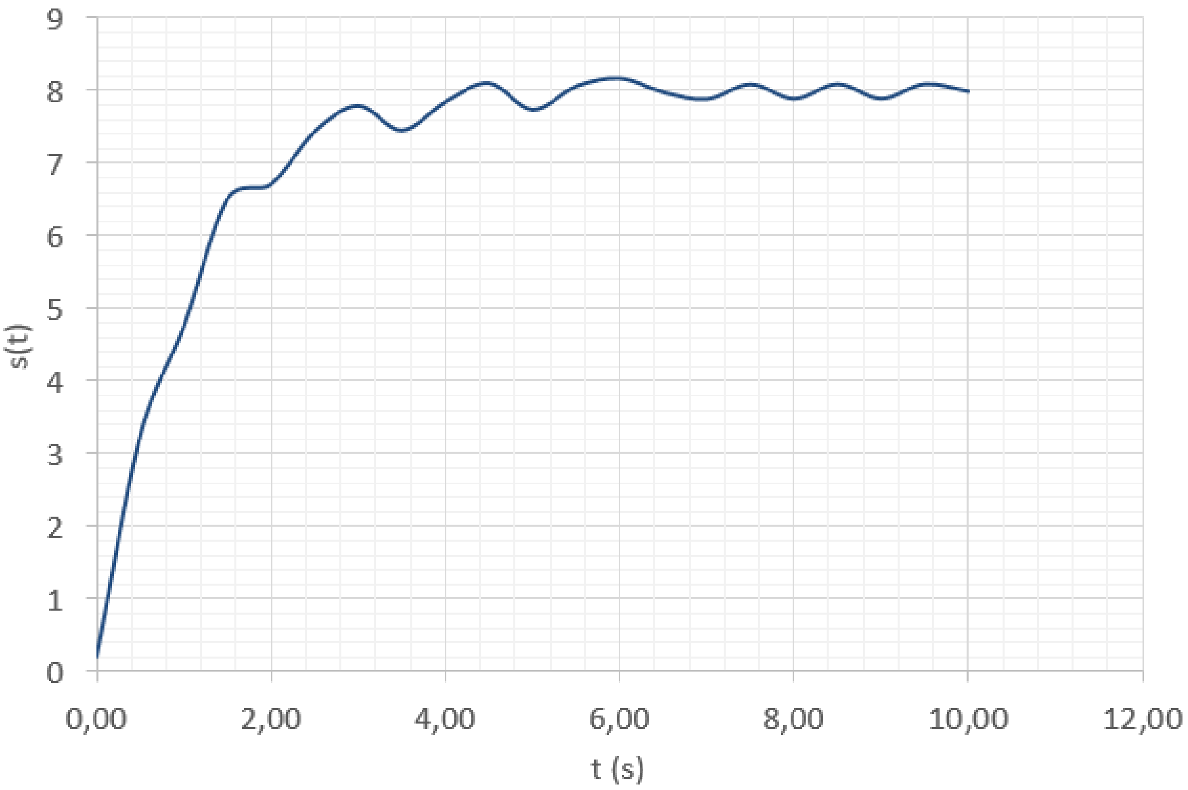
$$p^2 S(p) = pE_0 \frac{K}{a_n p^n + \cdots + a_1 p + 1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{KE_0}{a_n}\frac{p}{p^n} = \frac{KE_0}{a_n} p^{1-n}$$

$$= \lim_{p\to+\infty}\left(\frac{KE_0}{a_n}p^{1-n}\right) = \begin{cases} \dfrac{KE_0}{a_n} \ si\ n = 1 \\ 0\ si\ n > 1 \end{cases}$$

A.V.2 Réponse à un échelon d'un 1° ordre

A.V.2.a Courbe expérimentale

Nous avons à notre disposition un système réel sur lequel on impose un échelon $e_0 = 10\ V$ en entrée. On obtient la courbe de réponse expérimentale suivante :



A.V.2.b Proposition d'un modèle

On observe une pente à l'origine non nulle et une réponse sans dépassement, on propose donc un modèle du premier ordre :

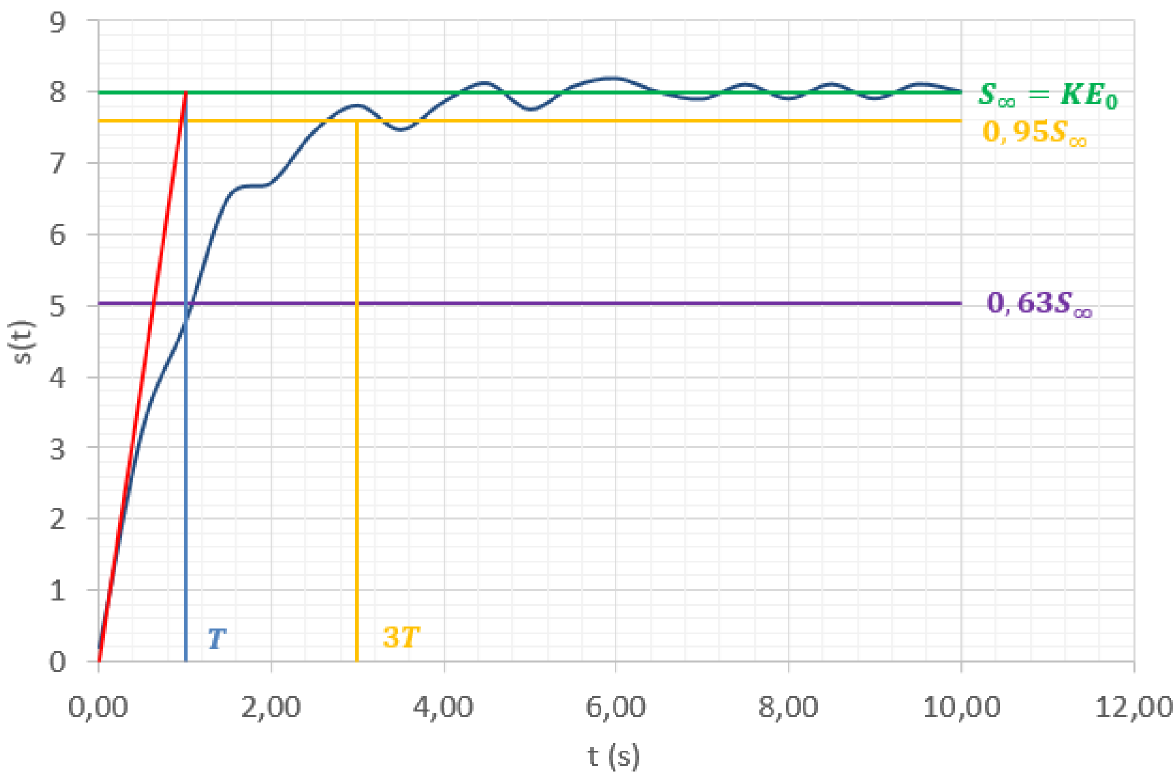
$$H(p) = \frac{K}{1 + Tp}$$

A.V.2.c Identification des paramètres

Il faut identifier K et T.

On sait que :

- s_∞ vaut Ke_0
- La pente à l'origine coupe la valeur s_∞ en $t = T$
- A tout moment, la tangente en un point coupe l'asymptote finale T secondes plus tard
- $s(t)$ vaut $0{,}63 s_\infty$ en $t = T$
- $s(t)$ vaut $0{,}95 s_\infty$ en $t = 3T$
- … et toute autre valeur de $s(t)$ pour $t = kT$



En fonction du bruit, il peut être plus ou moins aisé de repérer les valeurs $0{,}63s_\infty$, $0{,}95s_\infty$ ainsi que les pentes à tout instant. Dans le cas ci-dessus, ce n'est pas évident.

A.V.2.c.i Détermination classique

On utilise en priorité

- la valeur finale pour déterminer K
- la tangente à l'origine pour déterminer T

s_∞ vaut Ke_0	La pente à l'origine coupe la valeur s_∞ en $t = T$
$s_\infty = 8 = 10K$ $K = 0{,}8$	$T = 1\ s$

A.V.2.c.ii Amélioration de la précision

Il reste à notre disposition la tangente à tout instant ainsi que les deux valeurs caractéristiques $0{,}63s_\infty$ et $0{,}95s_\infty$. En réalité, connaissant la forme de la réponse temporelle d'un premier ordre à un échelon, on a une infinité de valeurs à notre disposition. Ces deux dernières sont les plus utilisées connues classiquement.

Si la tangente à l'origine est difficile à déterminer, où pour avoir de nouvelles valeurs de T afin d'être plus précis, on peut prendre d'autres tangentes le long de $s(t)$ et déterminer T lorsque la tangente au point $(t, s(t))$ coupe l'asymptote finale.

Lorsque plusieurs valeurs de T ou K sont déterminées, on fait la moyenne des valeurs trouvées afin de déterminer les coefficients définitifs.

Les autres valeurs particulières peuvent être utilisées de deux manières différentes selon la fiabilité avec laquelle on a déterminé K ou T au préalable :

- Si K est fiable (cas présent), c'est-à-dire qu'on voit bien l'asymptote horizontale, on peut utiliser les valeurs particulières pour déterminer d'autres valeurs de T. On part de $s_\infty = 8$
    - $0{,}63 s_\infty = 0.63 * 8 = 5{,}04$ – On trace cette droite et on détermine $T \approx 1$
    - $0{,}95 s_\infty = 0.95 * 8 = 7{,}6$ – On trace cette droite et on détermine $3T \approx 3$

  Au final : $T = \frac{1+1+1}{3} = 1$
- Si T est fiable, c'est-à-dire qu'on a bien la pente à l'origine, on peut utiliser les valeurs particulières pour déterminer d'autres valeurs de K. On part de $T = 1$
    - A $t = T$, $s(T) \approx 5 = 0{,}63 s_\infty = 0{,}63 * 10 * K$ – On en déduit $K \approx \frac{5}{6{,}3} = 0{,}79$
    - A $t = 3T$, $s(3T) \approx 7{,}6 = 0{,}95 s_\infty = 0{,}95 * 10 * K$ – On en déduit $K \approx \frac{7{,}6}{9{,}5} = 0{,}8$

  Au final : $K = \frac{0{,}8+0{,}79+0{,}8}{3} \approx 0{,}796$

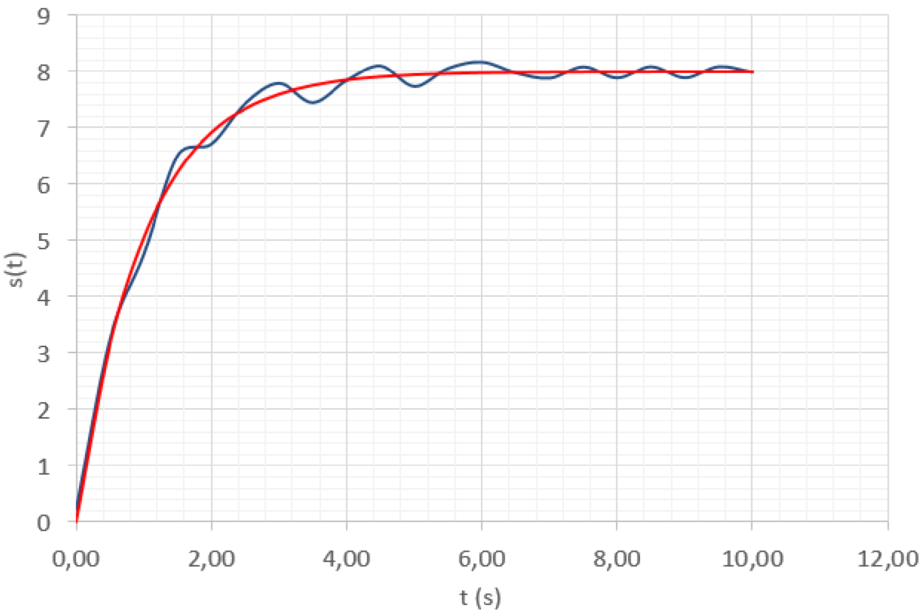
A.V.2.d Modèle proposé

Finalement, on a donc :

$$H(p) = \frac{0{,}8}{1+p}$$

A.V.2.e Vérification

Superposons la courbe expérimentale et la courbe du système ayant la fonction de transfert trouvée :



L'identification a été correctement menée.

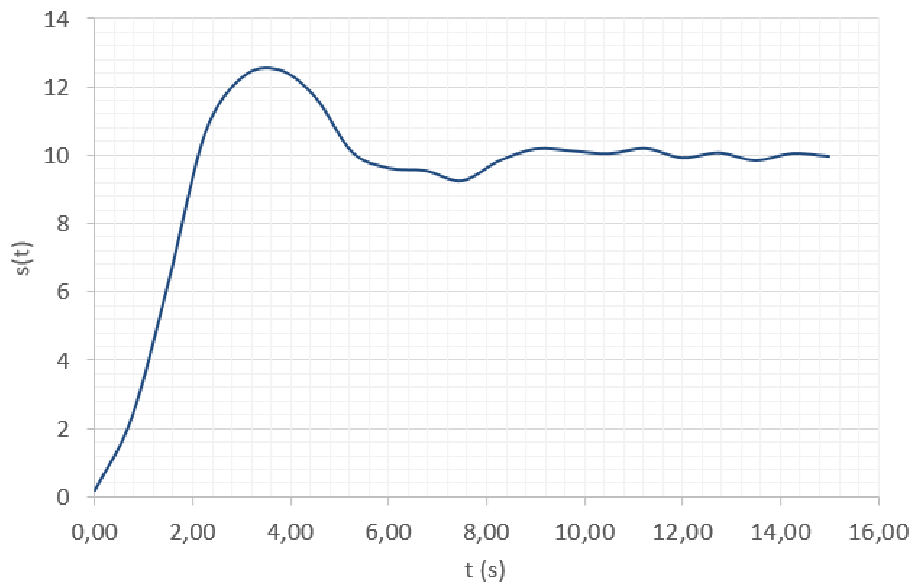
A.V.3 Réponse à un échelon d'un 2° ordre

A.V.3.a Cas $z < 1$

Ce cas ne pose pas de difficultés particulières, contrairement au cas $z > 1$ traité ensuite.

A.V.3.a.i Courbe expérimentale

Nous avons à notre disposition un système réel sur lequel on impose un échelon $e_0 = 10\ V$ en entrée. On obtient la courbe de réponse expérimentale suivante :



A.V.3.a.ii Proposition d'un modèle

On ne peut pas dire grand-chose sur la pente à l'origine vue la précision. Il semble qu'elle soit nulle. La présence d'un dépassement permet de dire que le système n'est pas du premier ordre. L'allure de la réponse laisse penser à un second ordre avec un coefficient d'amortissement inférieur à 1.

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{1}{{\omega_0}^2}p^2}$$

A.V.3.a.iii Identification des paramètres

On sait que :

- s_∞ vaut Ke_0
- La pseudo T_n période vaut

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}$$

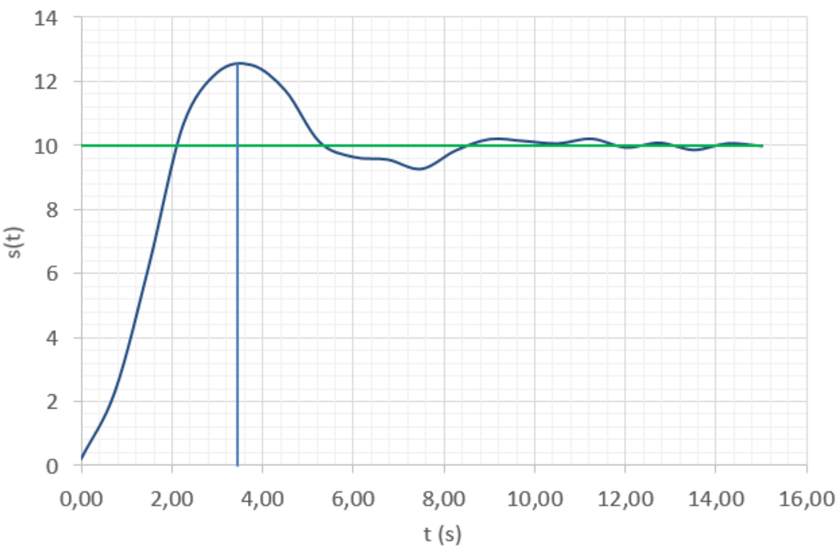
- Le premier dépassement en % vaut :

$$D_{1\%} = e^{-\frac{\pi z}{\sqrt{1-z^2}}}$$

$$\Leftrightarrow \ln D_{1\%} = -\frac{\pi z}{\sqrt{1-z^2}}$$
$$\Leftrightarrow \left(\ln D_{1\%}\right)^2 = \frac{\pi^2 z^2}{1-z^2}$$
$$\Leftrightarrow \left(\ln D_{1\%}\right)^2 - \left(\ln D_{1\%}\right)^2 z^2 = \pi^2 z^2$$
$$\Leftrightarrow z^2\left[\left(\ln D_{1\%}\right)^2 + \pi^2\right] = \left(\ln D_{1\%}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow z^2 = \frac{\left(\ln D_{1\%}\right)^2}{\left(\ln D_{1\%}\right)^2 + \pi^2}$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{\left|\ln D_{1\%}\right|}{\sqrt{\left(\ln D_{1\%}\right)^2 + \pi^2}} \quad car\ z > 0$$

- Il est atteint en t_1

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega_n} = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}$$
$$\Leftrightarrow \omega_0 = \frac{\pi}{t_1\sqrt{1-z^2}}$$



• **Détermination classique**

On utilise en priorité

- la valeur finale pour déterminer K
- le premier dépassement pour déterminer z et ω_0

$s_\infty = Ke_0$	$z = \frac{\left\|\ln D_{1\%}\right\|}{\sqrt{\left(\ln D_{1\%}\right)^2 + \pi^2}}$	$\omega_0 = \frac{\pi}{t_1\sqrt{1-z^2}}$
$10 = 10K$ $K = 1$	$D_{1\%} = \frac{2,5}{10} = 0,25$ $z = \frac{\left\|\ln 0,25\right\|}{\sqrt{(\ln 0,25)^2 + \pi^2}}$ $z = 0,4$	$t_1 = 3,5$ $\omega_0 = \frac{\pi}{3,5\sqrt{1-0,4^2}}$ $\omega_0 \approx 1$

• **Amélioration de la précision**

Il est possible d'utiliser d'autres dépassements et plus généralement extremums et leurs temps associés lorsqu'ils sont bien visibles afin d'être plus précis.

On peut aussi utiliser la valeur de la pseudo période si elle est bien visible.

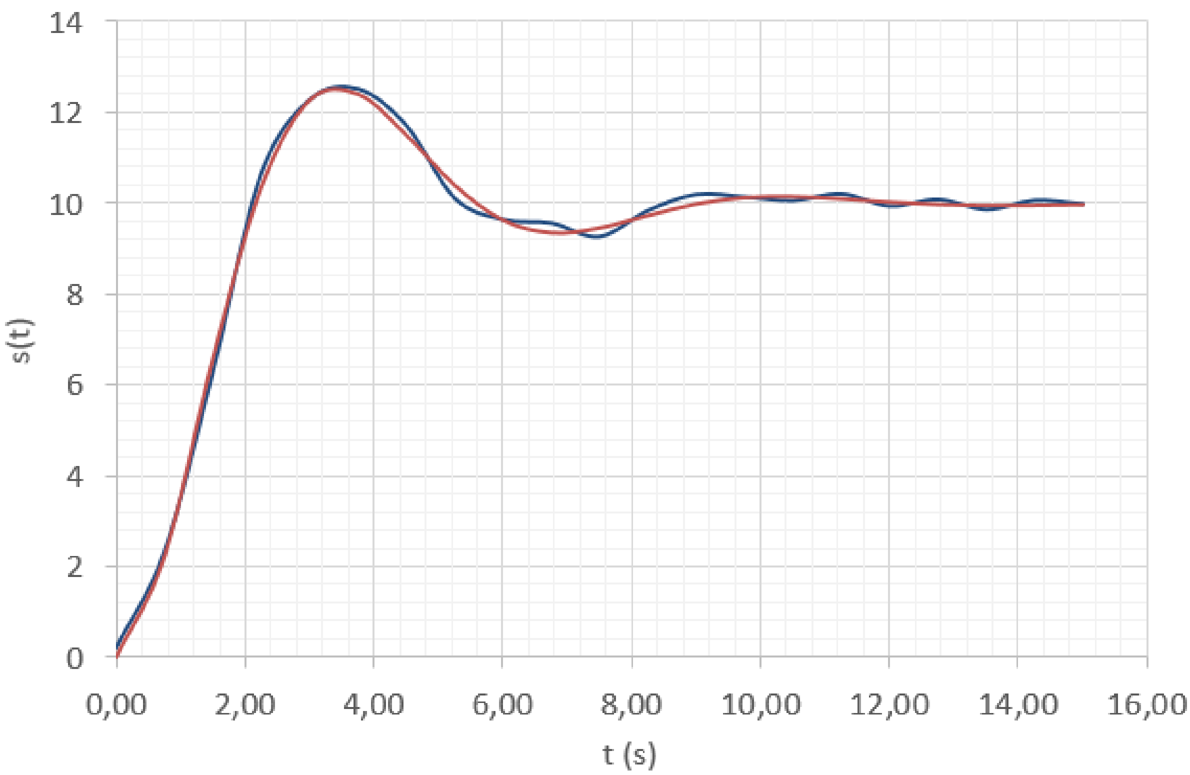
A.V.3.a.iv Modèle proposé

Finalement, on a donc :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2 * 0{,}4}{1}p + \frac{1}{1^2}p^2} = \frac{1}{1 + 0{,}8p + p^2}$$

A.V.3.a.v Vérification

Superposons la courbe expérimentale et la courbe du système ayant la fonction de transfert trouvée :



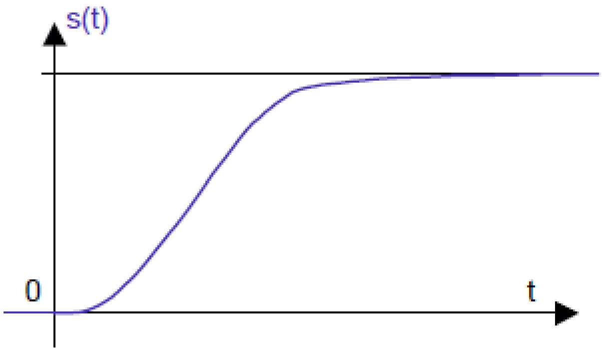
L'identification a été correctement menée.

A.V.3.b Cas $z > 1$

L'identification d'un système du second ordre dans le cas d'un amortissement supérieur à 1 n'est pas simple à mener.

A.V.3.b.i Courbe expérimentale

Nous avons à notre disposition un système réel sur lequel on impose un échelon en entrée. On obtient la courbe de réponse expérimentale suivante :



A.V.3.b.ii Proposition d'un modèle

La pente à l'origine étant nulle, on sait que ce n'est pas un système du premier ordre. Proposons un modèle du second ordre avec un coefficient d'amortissement $z > 1$.

$$H(p) = \frac{K}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)} = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{1}{{\omega_0}^2} p^2}$$

A.V.3.b.iii Identification des paramètres

N'ayant pas de dépassement, la résolution ne sera pas aussi simple et précise que précédemment. On va montrer qu'il est possible de déterminer ses deux constantes de temps T_1 et T_2 à l'aide d'une méthode un peu particulière. La réponse temporelle d'un tel système est connue

$$s(t) = K e_0 \left[1 + \frac{1}{T_2 - T_1} \left[T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t}{T_2}} \right] \right]$$

Il faut déterminer K, T_1 et T_2

• **Démarche**

Introduisons la fonction $z(t)$ suivante :

$$z(t) = Ke_0 - s(t)$$

Choisissons T, t_1, t_2 des temps quelconques tels que l'on connaisse la courbe de réponse en t_1, t_2, $T - t_1$ et $T - t_2$.

Calculer les valeurs suivantes :

$x_1 = \frac{z(t_1 - T)}{z(t_1)}$	$x_2 = \frac{z(t_2 - T)}{z(t_2)}$
$y_1 = \frac{z(t_1 - 2T)}{z(t_1)}$	$y_2 = \frac{z(t_2 - 2T)}{z(t_2)}$

En déduire les coefficients suivants :

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$a_2 = y_2 - a_1 x_2$$

Déterminer les racines X_1 et X_2 du polynôme suivant :

$$X^2 + a_1 X + a_2 = 0$$

On a alors

$$\begin{cases} T_1 = \dfrac{T}{\ln X_1} \\ T_2 = \dfrac{T}{\ln X_2} \end{cases}$$

• **Démonstration**

$$s(t) = Ke_0\left[1 + \frac{1}{T_2 - T_1}\left[T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t}{T_2}}\right]\right]$$

$$z(t) = Ke_0 - s(t)$$

$$= Ke_0 - Ke_0\left[1 + \frac{1}{T_2 - T_1}\left[T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t}{T_2}}\right]\right]$$

$$= Ke_0\left[-\frac{1}{T_2 - T_1}\left[T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t}{T_2}}\right]\right]$$

Soit T un temps quelconque.

$$z(t - 2T) + a_1 z(t - T) + a_2 z(t) = 0$$

$$a_1 = -\left(e^{\frac{T}{T_1}} + e^{\frac{T}{T_2}}\right) \quad ; \quad a_2 = e^{\frac{T}{T_1}} e^{\frac{T}{T_2}}$$

Démonstration :

$$z(t-2T) = -\frac{Ke_0}{T_2 - T_1}\left[T_1 e^{-\frac{t-2T}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t-2T}{T_2}}\right]$$

$$a_1 z(t-T) = \frac{Ke_0}{T_2 - T_1}\left(e^{\frac{T}{T_1}} + e^{\frac{T}{T_2}}\right)\left[T_1 e^{-\frac{t-T}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t-T}{T_2}}\right]$$

$$a_2 z(t) = -\frac{Ke_0}{T_2 - T_1} e^{\frac{T}{T_1}} e^{\frac{T}{T_2}}\left[T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t}{T_2}}\right]$$

$$z(t-2T) + a_1 z(t-T) + a_2 z(t)$$

$$= \frac{Ke_0}{T_2 - T_1}\left[-\left[T_1 e^{-\frac{t-2T}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t-2T}{T_2}}\right] + \left(e^{\frac{T}{T_1}} + e^{\frac{T}{T_2}}\right)\left[T_1 e^{-\frac{t-T}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t-T}{T_2}}\right] - e^{\frac{T}{T_1}} e^{\frac{T}{T_2}}\left[T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t}{T_2}}\right]\right]$$

$$= \frac{Ke_0}{T_2 - T_1}\left[-T_1 e^{-\frac{t-2T}{T_1}} + T_2 e^{-\frac{t-2T}{T_2}} + T_1 e^{\frac{T}{T_1}} e^{-\frac{t-T}{T_1}} - T_2 e^{\frac{T}{T_1}} e^{-\frac{t-T}{T_2}} + T_1 e^{\frac{T}{T_2}} e^{-\frac{t-T}{T_1}} - T_2 e^{\frac{T}{T_2}} e^{-\frac{t-T}{T_2}} - T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} e^{\frac{T}{T_1}} e^{\frac{T}{T_2}} + T_2 e^{-\frac{t}{T_2}} e^{\frac{T}{T_1}} e^{\frac{T}{T_2}}\right]$$

$$= \frac{Ke_0}{T_2 - T_1}\left[-T_1 e^{-\frac{t-2T}{T_1}} + T_2 e^{-\frac{t-2T}{T_2}} + T_1 e^{-\frac{t-2T}{T_1}} - T_2 e^{\frac{T}{T_1}} e^{-\frac{t-T}{T_2}} + T_1 e^{\frac{T}{T_2}} e^{-\frac{t-T}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t-2T}{T_2}} - T_1 e^{-\frac{t-T}{T_1}} e^{\frac{T}{T_2}} + T_2 e^{-\frac{t-T}{T_2}} e^{\frac{T}{T_1}}\right]$$

$$= 0$$

On a donc :

$$z(t) = Ke_0 - s(t)$$

$$z(t-2T) + a_1 z(t-T) + a_2 z(t) = 0$$

$$a_1 = -\left(e^{\frac{T}{T_1}} + e^{\frac{T}{T_2}}\right) \quad ; \quad a_2 = e^{\frac{T}{T_1}} e^{\frac{T}{T_2}}$$

Soit :

$$\frac{z(t-2T)}{z(t)} + a_1 \frac{z(t-T)}{z(t)} + a_2 = 0$$

$$\frac{z(t-2T)}{z(t)} = -a_1 \frac{z(t-T)}{z(t)} + a_2$$

Ceci correspond à l'équation d'une droite de pente $-a_1$ et d'ordonnée à l'origine a_2

Choisissons T, t_1, t_2 des temps quelconques tels que l'on connaisse la courbe de réponse en t_1, t_2, $T - t_1$ et $T - t_2$.

On calcule les valeurs suivantes :

$x_1 = \frac{z(t_1 - T)}{z(t_1)}$	$x_2 = \frac{z(t_2 - T)}{z(t_2)}$
$y_1 = \frac{z(t_1 - 2T)}{z(t_1)}$	$y_2 = \frac{z(t_2 - 2T)}{z(t_2)}$

On en déduit :

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$a_2 = y_2 - a_1 x_2$$

Enfin, connaissant a_1 et a_2, on a :

$$a_1 = -\left(e^{\frac{T}{T_1}} + e^{\frac{T}{T_2}}\right) \quad ; \quad a_2 = e^{\frac{T}{T_1}} e^{\frac{T}{T_2}}$$

Rappel : x_1 et x_2 sont les racines du polynôme $ax^2 + bx + c \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

Soit le polynôme suivant :

$$X^2 + a_1 X + a_2 = 0$$

Les racines X_1 et X_2 de ce polynôme sont telles que :

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = -a_1 = e^{\frac{T}{T_1}} + e^{\frac{T}{T_2}} \\ X_1 X_2 = a_2 = e^{\frac{T}{T_1}} e^{\frac{T}{T_2}} \end{cases}$$

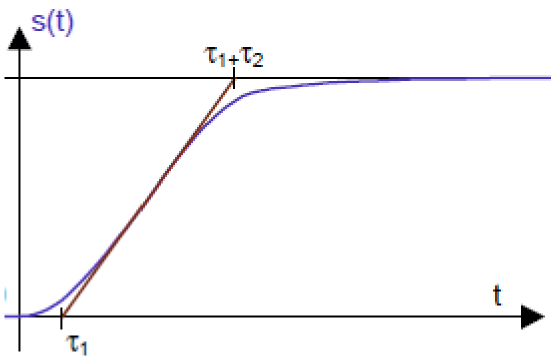
C'est-à-dire :

$$\begin{cases} X_1 = e^{\frac{T}{T_1}} \\ X_2 = e^{\frac{T}{T_2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T_1 = \frac{T}{\ln X_1} \\ T_2 = \frac{T}{\ln X_2} \end{cases}$$

Il faut donc déterminer les racines du polynôme $X^2 + a_1 X + a_2 = 0$ afin de déduire T_1 et T_2

• **Cas particulier**

Cette méthode est difficile à mettre en place. Lorsqu'une constante de temps est très petite devant l'autre, exemple $T_1 \ll T_2$, on peut utiliser une méthode approchée. On trace la tangente au point d'inflexion et les intersections de cette tangente avec l'axe des abscisses et l'asymptote horizontale donnent T_1 et T_2



Il est alors nécessaire de tracer la réponse théorique pour vérifier qu'elle modélise correctement la réponse expérimentale.

A.V.4 Oscillations libres d'un 2° ordre

Il arrive que l'on identifie certains coefficients des systèmes du 2° ordre à partir de leur réponse en oscillations libres. Cela consiste à imposer un déplacement initial au système et à le relâcher. Cette démarche est souvent appliquée à des ressorts. C'est une identification partielle du système, connaissant l'équation différentielle le caractérisant du second ordre. On s'intéresse dans ce cas à la détermination de sa pulsation propre non amortie ω_0 et de son coefficient d'amortissement z.

Cette identification ne peut fonctionner qu'à partir du moment où il existe plusieurs oscillations bien visibles. Cela correspond à des valeurs d'amortissement z faibles. Il faut retenir l'ordre de grandeur suivant : si l'on voit plus de 5 périodes d'oscillations, $z \leq 0{,}1$ et cette démarche est applicable.

Ainsi, il est possible de déterminer z et ω_0

A.V.4.a Modèle étudié et équation différentielle associée

Soit un système du 2° ordre de fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0}\mathrm{p} + \frac{1}{{\omega_0}^2}\mathrm{p}^2}$$

Ce modèle correspond à l'équation différentielle suivante :

$$s + \frac{2z}{\omega_0}\dot{s} + \frac{1}{{\omega_0}^2}\ddot{s} = e$$

Dans le cas d'oscillations libres, on a l'équation différentielle et les conditions initiales suivantes :

$$\boxed{s + \frac{2z}{\omega_0}\dot{s} + \frac{1}{{\omega_0}^2}\ddot{s} = 0 \quad ; \quad s(0) = S_0 \quad ; \quad s'(0) = 0}$$

A.V.4.b Forme de la réponse temporelle

$$s + \frac{2z}{\omega_0}\dot{s} + \frac{1}{{\omega_0}^2}\ddot{s} = 0$$

L'identification de z et ω_0 ne nécessite pas de mener toute la résolution ci-dessous, il faut toutefois connaître dans ce cas le résultat suivant :

$$s(t) = e^{-z\omega_0 t} A \cos(\omega_n t + \varphi)$$

$$\omega_n = \omega_0\sqrt{1 - z^2}$$

Elle ne nécessite pas non plus de connaître la valeur du déplacement initial imposé X_0.

Démonstration :

$$s+\frac{2z}{\omega_0}\dot{s}+\frac{1}{{\omega_0}^2}\ddot{s}=0$$

Polynôme caractéristique :

$$\frac{1}{{\omega_0}^2}r^2+\frac{2z}{\omega_0}r+1=0$$

$$\Delta=\frac{4z^2}{{\omega_0}^2}-\frac{4}{{\omega_0}^2}=\frac{4}{{\omega_0}^2}(z^2-1)$$

On est dans le cas d'oscillations : $z<1$

$$r=\frac{-\frac{2z}{\omega_0}\pm i\sqrt{\frac{4}{{\omega_0}^2}(1-z^2)}}{2\frac{1}{{\omega_0}^2}}$$

$$r=-z\omega_0\pm i\omega_0\sqrt{1-z^2}=-z\omega_0\pm i\omega_n$$

$$\omega_n=\omega_0\sqrt{1-z^2}$$

$$s(t)=e^{-z\omega_0 t}(A\cos(\omega_n t)+B\sin(\omega_n t))$$

$$s(t)=e^{-z\omega_0 t}\sqrt{A^2+B^2}\left[\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos(\omega_n t)+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin(\omega_n t)\right]$$

$$s(t)=e^{-z\omega_0 t}C[\cos(\varphi)\cos(\omega_n t)+\sin(\varphi)\sin(\omega_n t)]$$

$$C=\sqrt{A^2+B^2}$$

$$\cos(\varphi)=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad ; \quad \sin(\varphi)=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad ; \quad \tan(\varphi)=\frac{B}{A}$$

$$s(t)=e^{-z\omega_0 t}C[\cos(\varphi)\cos(\omega_n t)+\sin(\varphi)\sin(\omega_n t)]$$

$$\boxed{s(t)=e^{-z\omega_0 t}C\cos(\omega_n t-\varphi)}$$

A.V.4.c Détermination des constantes si nécessaire

Les conditions initiales permettent de déterminer C et φ si nécessaire :

$$s'(t)=-\omega_n e^{-z\omega_0 t}C\sin(\omega_n t+\varphi)-z\omega_0 e^{-z\omega_0 t}C\cos(\omega_n t+\varphi)$$

$$s(0)=S_0=C\cos(\varphi)$$

$$\boldsymbol{C=\frac{S_0}{\cos(\varphi)}}$$

$$s'(0) = 0 = -\omega_n C \sin(\varphi) - z\omega_0 C \cos(\varphi)$$

$$0 = \omega_n \sin(\varphi) + z\omega_0 \cos(\varphi)$$

$$0 = \omega_0\sqrt{1-z^2} \sin(\varphi) + z\omega_0 \cos(\varphi)$$

$$\omega_0\sqrt{1-z^2} \sin(\varphi) = -z\omega_0 \cos(\varphi)$$

$$\sqrt{\frac{1-z^2}{z^2}} \sin(\varphi) = -\cos(\varphi)$$

$$\boldsymbol{\tan(\varphi) = -\sqrt{\frac{z^2}{1-z^2}}}$$

A.V.4.d Identification

A.V.4.d.i Identification de z

On utilise le décrément logarithmique afin de déterminer la valeur de z.

Rappelons que l'on a :

$$s(t) = e^{-z\omega_0 t} C \cos(\omega_n t + \varphi)$$

Soient T_1 et T_2 deux temps écartés de N périodes (plus on prend de périodes, plus le calcul sera précis).

$$s(T_1) = e^{-z\omega_0 T_1} C \cos(\omega_n T_1 + \varphi)$$

$$s(T_2) = e^{-z\omega_0 T_2} C \cos(\omega_n T_2 + \varphi)$$

Or :

$$\cos(\omega_n T_2 + \varphi) = \cos(\omega_n T_1 + \varphi)$$

$$\frac{s(T_1)}{s(T_2)} = \frac{e^{-z\omega_0 T_1}}{e^{-z\omega_0 T_2}} = e^{-z\omega_0 (T_1 - T_2)}$$

A partir de la courbe, on obtient $\frac{s(T_1)}{s(T_2)}$.

$$-z\omega_0 (T_1 - T_2) = \ln \frac{s(T_1)}{s(T_2)}$$

$$z = \frac{1}{\omega_0 (T_2 - T_1)} \ln \frac{s(T_1)}{s(T_2)}$$

Remarque : ce coefficient dépend de ω_0

A.V.4.d.ii Identification de ω_0

Le système présente une pulsation ω_n qui est reliée à ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-z^2}}$$

Remarque : ce coefficient dépend de z

A.V.4.d.iii Solution retenue

On remarque que l'on ne peut déterminer ω_0 sans z ni z sans ω_0.

Si on suppose $z \ll 1$, ce qui est le cas si on voit assez d'oscillations, on a

$$\omega_0 \approx \omega_n$$

On vérifie alors que la valeur de z recalculée est petite pour conclure que la démarche réalisée est bonne.

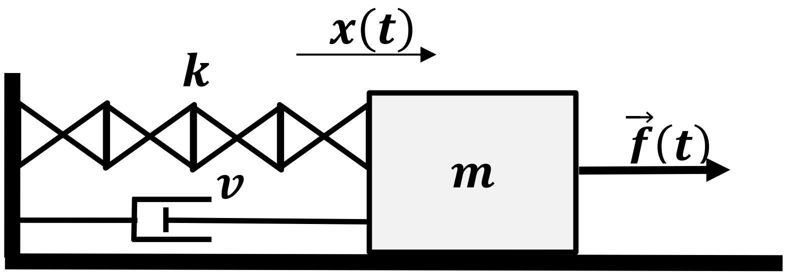
$$z = \frac{1}{\omega_0(T_2 - T_1)} \ln \frac{s(T_1)}{s(T_2)}$$

$$T_2 - T_1 = NT = N\frac{2\pi}{\omega_n} \approx N\frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$z = \frac{1}{2\pi N} \ln \frac{s(T_1)}{s(T_2)}$$

A.V.4.e Application à un système masse/ressort-amortisseur

Soit le système masse ressort amortisseur suivant :



On s'intéresse au mouvement $x(t)$ de la masse au cours du temps. On souhaite déterminer k, m et v à partir de la réponse du système sachant que l'on peut faire varier la masse m.

A.V.4.e.i Equation différentielle et conditions initiales

$$m\ddot{x} + v\dot{x} + kx = 0 \quad ; \quad x(0) = X_0 \quad ; \quad x'(0) = 0$$

Remarque : si la gravité intervient : $m\ddot{x} + v\dot{x} + kx = mg$, on peut :

- Résoudre le problème avec la solution particulière qui va définir la position non nulle autour de laquelle la masse va osciller : $x_p = \frac{mg}{k}$
- Faire un changement d'abscisse initiale autour de la position d'équilibre sous l'action de la pesanteur telle que : $kx = mg$ soit $x = \frac{mg}{k}$, d'où $x = \frac{mg}{k} + U$: $m\ddot{u} + v\dot{u} + ku = 0$

A.V.4.e.ii Modèle et coefficients caractéristiques

Pour mettre en place le modèle, supposons un effort appliqué au système $\mathrm{f}(t)$:

$$m\ddot{x} + v\dot{x} + kx = \mathrm{f}(t)$$

$$\ddot{x} + \frac{v}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{\mathrm{f}(t)}{m}$$

$$\frac{m}{k}\ddot{x} + \frac{mv}{k}\dot{x} + x = \frac{\mathrm{f}(t)}{k}$$

$$\frac{X(p)}{F(p)} = \frac{\frac{1}{k}}{1 + \frac{mv}{k}\mathrm{p} + \frac{m}{k}\mathrm{p}^2} = \frac{\frac{1}{k}}{1 + \frac{2z}{\omega_0}\mathrm{p} + \frac{1}{{\omega_0}^2}\mathrm{p}^2}$$

$$K = \frac{1}{k} \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad ; \quad \frac{2z}{\omega_0} = \frac{v}{k} \Leftrightarrow z = \frac{v}{2\sqrt{km}}$$

A.V.4.e.iii Détermination des coefficients par identification

Le principe consiste à déterminer expérimentalement les valeurs de $\omega_0 \approx \omega_n$ pour différentes masses m_i ajoutées à la masse mobile du système : $m + m_i$ et de tracer la droite :

$$\frac{1}{{\omega_0}^2} = \frac{m}{k} + \frac{1}{k} m_i = a m_i + b$$

Alors :

$$\begin{cases} k = \dfrac{1}{a} \\ m = kb \end{cases}$$

Pour la valeur de ω_0 associée à la masse m, on calcule le décrément logarithmique afin d'obtenir z

$$z = \frac{1}{2\pi N} \ln \frac{s(T_1)}{s(T_2)}$$

On en déduit :

$$v = 2z\sqrt{km}$$

Par ailleurs, on a alors :

$$K = \frac{1}{k}$$

Remarque : en théorie, il faudrait vérifier que z reste faible pour chaque masse ajoutée, afin de pouvoir affirmer que chaque pulsation mesurée est bien proche de la pulsation propre non amortie du système