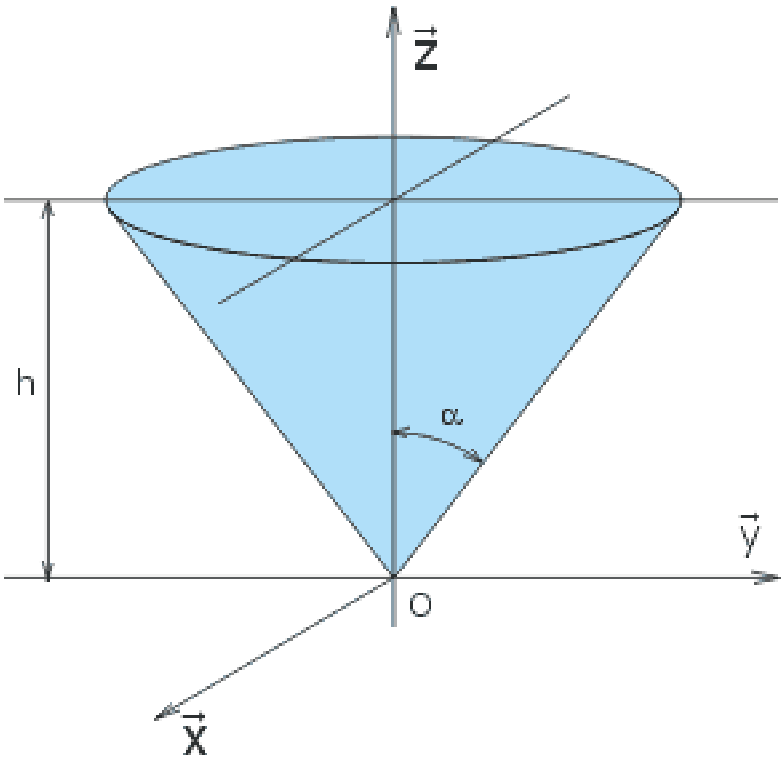
Enoncé

Considérons un cône de révolution de hauteur h et de demi-angle au sommet α.

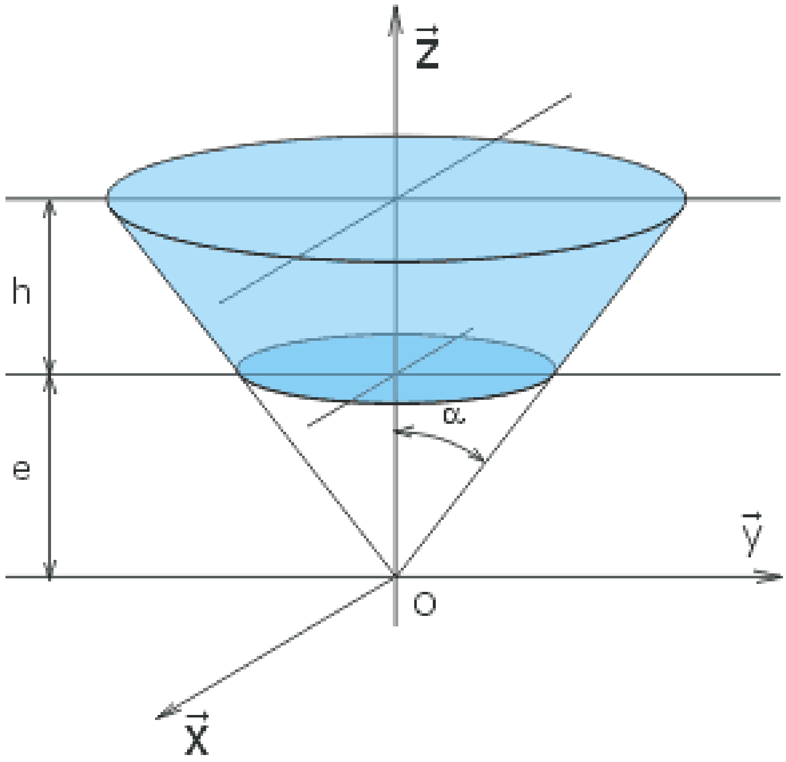


1 Déterminer par intégration la masse m sachant que la masse volumique du solide considéré est notée μ.

2 Retrouver le résultat précédent en appliquant le théorème de Guldin dans le cas d'une détermination de volume.

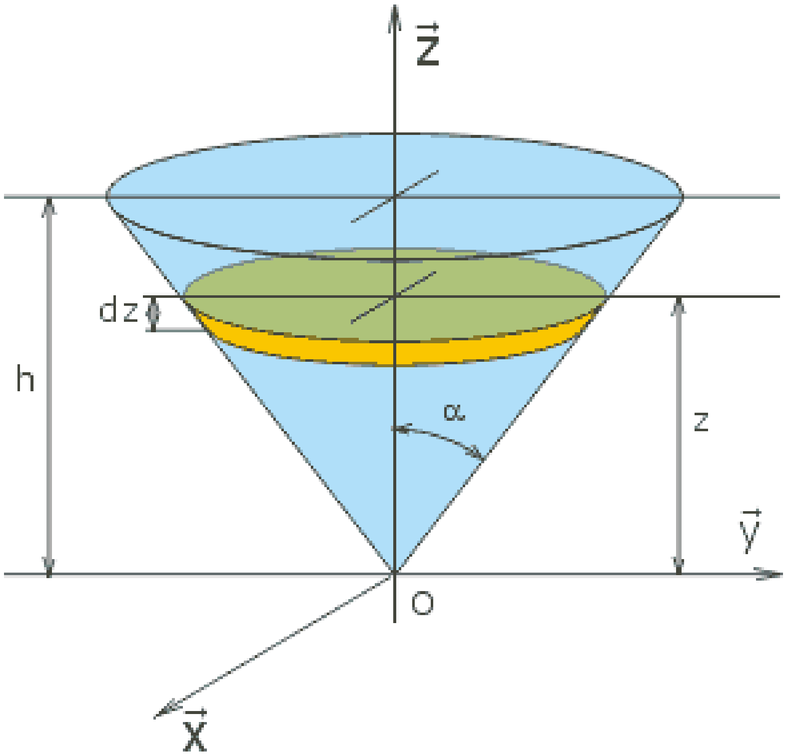
3 Déterminer la position du centre de gravité G par rapport au repère $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

4 Déduire des résultats précédents , le centre de gravité d'un cône tronqué de hauteur h



Solution

1 L'expression de la masse est : $m = \iiint \mu . dv = \mu . \iiint dv$. En prenant un élément de volume d'épaisseur dz



On obtient alors l'expression de l'élément de volume :

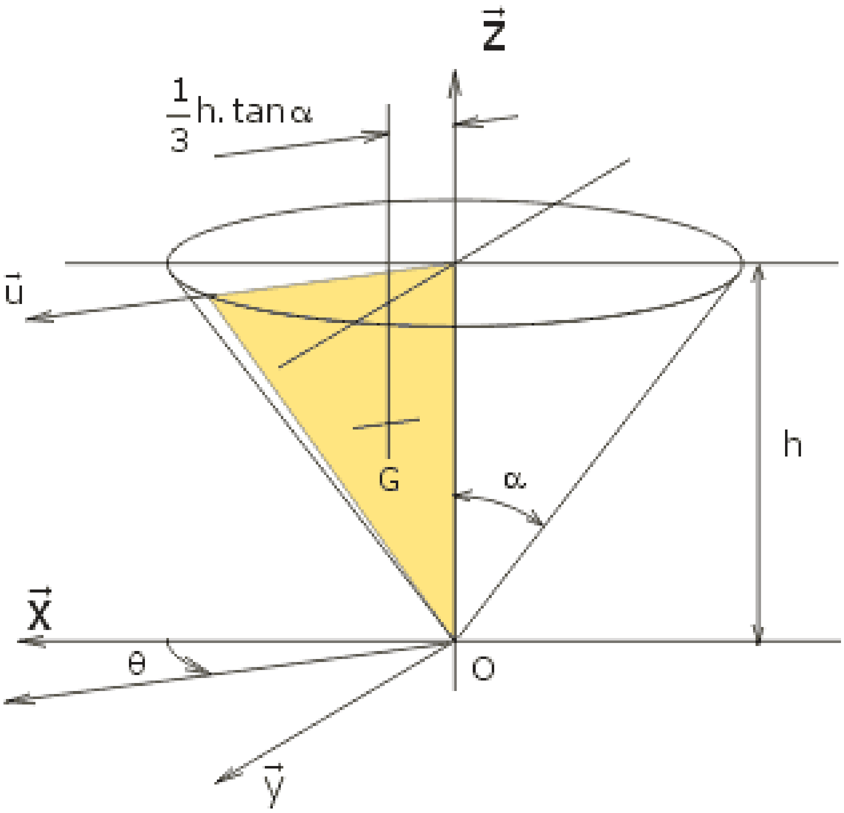
$$dv = \pi . r^2(z).dz = \pi.(z.\tan\alpha)^2.dz$$

La masse est donc :

$$m = \mu . \int_0^h \pi.(z.\tan\alpha)^2.dz = \mu.\pi.\tan^2\alpha\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^h$$

On obtient donc après intégration : $\boxed{m = \frac{\mu.\pi.h^3.\tan^2\alpha}{3}}$

2 Par Guldin nous avons directement l'expression du volume engendré par la rotation d'une plaque triangulaire rectangle de côtés de longueurs h et $h.\tan\alpha$. Le volume dans ce cas sera : $v = 2.\pi.r_G.S$



Nous obtenons directement $r_G = \overrightarrow{OG}\,.\vec{u} = \frac{1}{3}.\,h\,.\tan\alpha$ et $S = \frac{1}{2}.\,h^2.\tan\alpha$. La masse sera :

$m = \mu.v = 2.\pi.\left(\frac{1}{3}\,h.\tan\alpha\right).\left(\frac{1}{2}.h^2.\tan\alpha\right)$ et l'on retrouve alors l'expression précédente :

$$\boxed{m = \frac{\mu\,.\,\pi\,.\,h^3.\tan^2\alpha}{3}}$$

3 La position du centre de gravité est donnée par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}.\iiint \overrightarrow{OM}.dm = \frac{1}{m}.\iiint \overrightarrow{OM}\,.\,\mu\,.dv$$

En utilisant les coordonnées cylindriques, nous avons :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\mu}{m}.\int_0^h \int_0^{z.\tan\alpha} \int_0^{2.\pi} \left(z.\vec{z} + \rho.\vec{u}\right).\,\rho.d\theta.\,d\,\rho.dz$$

L'ordre d'intégration n'est pas choisi au hasard, en effet , la sommation par rapport à θ permet de simplifier l'intégrale car dans ce cas,

$\int_0^{2.\pi} \vec{u}.d\theta = \int_0^{2.\pi} \left(\cos\theta.\vec{x}+\sin\theta.\vec{y}\right).d\theta = \left[\sin\theta.\vec{x}-\cos\theta.\vec{y}\right]_0^{2.\pi} = \vec{0}$. L'intégrale devient :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\mu}{m}.\int_0^h \int_0^{z.\tan\alpha} 2.\pi.z.\vec{z}.\rho.d\rho.dz = \frac{\mu}{m}.\int_0^h 2\pi.z.\vec{z}.\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{z.\tan\alpha}.dz$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\mu}{m}.\int_0^h 2.\pi.z.\frac{z^2.\tan^2\alpha}{2}.\vec{z}.dz = \frac{\mu.\pi.\tan^2\alpha}{m}.\left[\frac{z^4}{4}\right]_0^h.\vec{z}$$

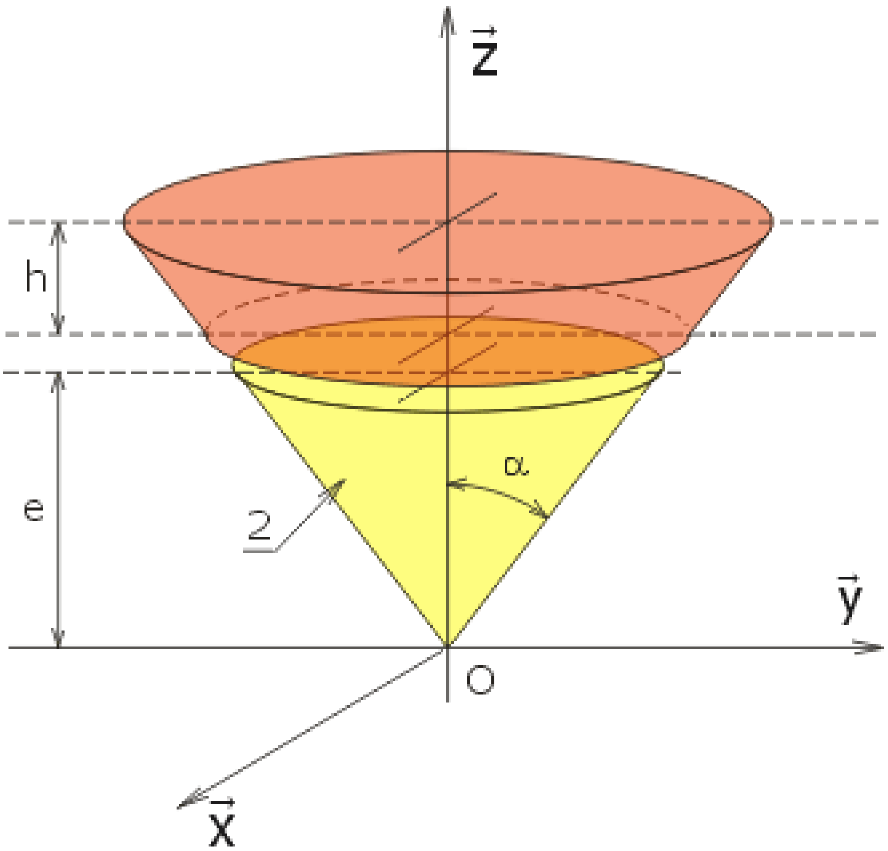
$$\overrightarrow{OG} = \frac{3.\mu.\pi.\tan^2\alpha}{\mu.\pi.h^3.\tan^2\alpha}.\frac{h^4}{4}.\vec{z} = \frac{3.h}{4}.\vec{z}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{3.h}{4}.\vec{z}}$$

4 En appliquant les résultats précédents, nous pouvons utiliser la formule du barycentre qui permet d'écrire en pondérant le centre de gravité G_2 d'une masse négative $-m_2$:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{2} m_i.\overrightarrow{OG_i}}{\sum_{i=1}^{2} m_i} = \frac{1}{m_1-m_2}.\left(m_1.\overrightarrow{OG_1}-m_2.\overrightarrow{OG_2}\right)$$

Le cône tronqué est supposé être formé par un cône (1) de hauteur $h+\varepsilon$ et de demi-angle au sommet α, auquel on a enlevé un cône (2) de hauteur ε et de demi-angle au sommet α.



En reprenant l'expression du barycentre, nous avons :

$$\overrightarrow{OG_1} = \frac{3.(h+e)}{4}.\vec{z} \text{ et } m_1 = \frac{\mu.\pi.(h+e)^3.\tan^2\alpha}{3}$$

$$\overrightarrow{OG_2} = \frac{3.e}{4}.\vec{z} \text{ et } m_2 = \frac{\mu.\pi.e^3.\tan^2\alpha}{3}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m_1 - m_2}.\left(m_1.\overrightarrow{OG_1} - m_2.\overrightarrow{OG_2}\right) = \frac{3}{4}.\left(\frac{(h+e)^4 - e^4}{(h+e)^3 - e^3}\right).\vec{z}$$

La position du centre de gravité de ce cône tronqué est donc :

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{3}{4}.\left(\frac{(h+e)^4 - e^4}{(h+e)^3 - e^3}\right).\vec{z}}$$