Enoncé

Il s'agit d'étudier dans cet exercice un dispositif de rechargement de cylindre métallique qui consiste à projeter des grains de métal sous gaz ionisé au contact d'une pièce à traiter. On obtient ainsi un dépôt métallique soudé à l'enveloppe externe du cylindre . Ce dépôt a pour rôle :

*Soit de recharger la partie de pièce usée

* Soit d'apporter une caractéristique particulière à l'enveloppe externe du cylindre : lutte contre la corrosion, l'usure,…..

Le cylindre (4) est entraîné en rotation à la vitesse de rotation constante : $\omega = \dfrac{d\theta}{dt} = 50\ tr/mn$ par rapport au bâti (0) . Le robot série permettant le traitement de surface , possède à l'extrémité de son bras (3), une torche possédant une buse (d'extrémité A) dont la position par rapport à l'enveloppe cylindrique doit être définie très précisément .

*L'extrémité A de la buse doit être positionnée à une distance constante d de la surface cylindrique.

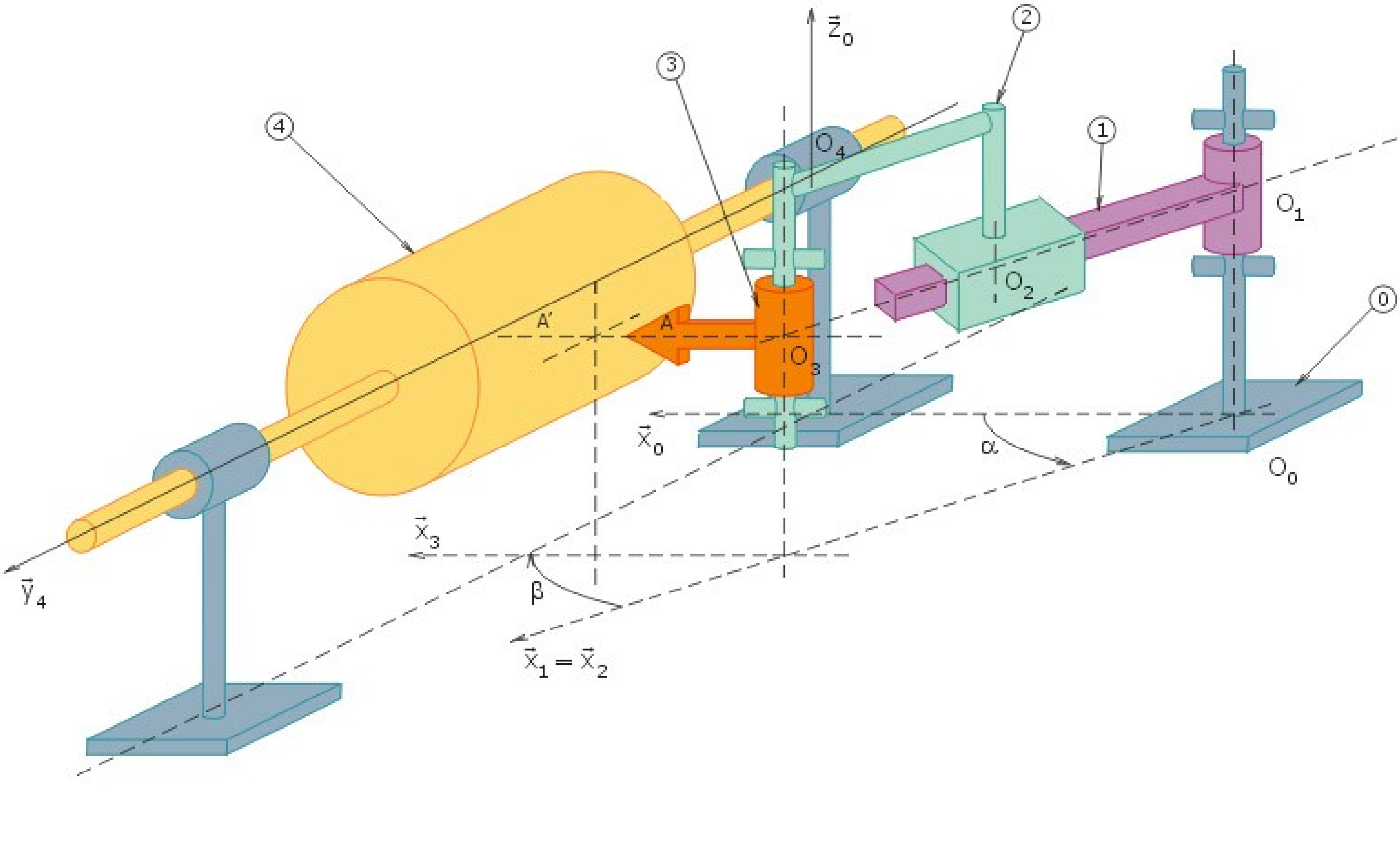
*La torche (3), orientée par le vecteur $\vec{x}_3$, doit rester constamment perpendiculaire à la surface du cylindre

*La vitesse d'avance , v ,de la buse parallèlement à l'axe $(O_4, \vec{y}_4)$ du cylindre (4), doit être aussi constante que possible. On paramètre le robot par :

$\overrightarrow{O_1O_4} = \delta.\vec{x}_0$; $\overrightarrow{O_1O_2} = x.\vec{x}_1$; $\overrightarrow{O_2O_3} = a.\vec{x}_1$

$\overrightarrow{O_3A} = b.\vec{x}_3$; $(\widehat{\vec{x}_0, \vec{x}_1}) = \alpha$; $(\widehat{\vec{x}_1, \vec{x}_3}) = \beta$

$(\widehat{\vec{x}_0, \vec{x}_4}) = \theta$; *Le rayon du cylindre est R* ; *a, b et δ sont constants*



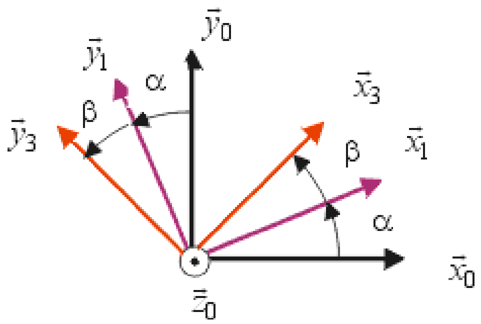
1 A partir du paramétrage proposé, déterminer les relations entre α et β ainsi qu'entre α et x .

2 Déterminer les deux équations différentielles faisant intervenir les paramètres : x, $\dot{x}$, α , $\dot{\alpha}$ et les données v et a .

3 En considérant qu'à $t = 0$, on a $x = 0$ et $\alpha = 0$, déterminer en fonction de α les vitesses $\dot{x}$ et $\dot{\alpha}$, ainsi que les accélérations $\ddot{x}$ et $\ddot{\alpha}$

Solution

1 Pour obtenir la relation liant α et β , utilisons la particularité d'orientation de la buse : $\vec{x}_3 \cdot \vec{y}_0 = \vec{0}$ car la buse doit rester constamment perpendiculaire au cylindre. En projetant les deux vecteurs dans la même base, et à partir de la figure plane ci-jointe



nous obtenons :

$$\vec{x}_3 \cdot \vec{y}_0 = \left(\cos\left(\beta+\alpha\right).\vec{x}_0 + \sin\left(\beta+\alpha\right).\vec{y}_0\right).\vec{y}_0 = \sin\left(\beta+\alpha\right) = 0$$

En décomposant $\sin\left(\beta+\alpha\right)$ on obtient alors :

$$\sin\beta.\cos\alpha + \cos\beta.\sin\alpha = 0$$

Ce qui donne donc : $\tan\beta = -\tan\alpha$ et donc $\boxed{\beta = -\alpha}$ pour notre cas de figure.

Pour obtenir à présent la seconde relation, utilisons la fermeture géométrique :

$$\overrightarrow{O_4O_4} = \vec{0} = \overrightarrow{O_4O_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2O_3} + \overrightarrow{O_3A} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'O_4}$$

En projection sur la direction $\vec{x}_0$, nous obtenons :

$$0 = \underbrace{\overrightarrow{O_4O_1}.\vec{x}_0}_{-\delta} + \underbrace{\overrightarrow{O_1O_2}.\vec{x}_0}_{x.\cos\alpha} + \underbrace{\overrightarrow{O_2O_3}.\vec{x}_0}_{a.\cos\alpha} + \underbrace{\overrightarrow{O_3A}.\vec{x}_0}_{b} + \underbrace{\overrightarrow{AA'}.\vec{x}_0}_{R+d} + \underbrace{\overrightarrow{A'O_4}.\vec{x}_0}_{0}$$

Nous obtenons alors la relation liant α et x :

$$\boxed{\delta = \left(x+a\right).\cos\alpha + b + R + d}$$

② La vitesse v est donnée par la relation : $v = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1A}}{dt}\right)_{R_0} .\vec{y}_0$. En explicitant le vecteur $\overrightarrow{O_1A}$, nous obtenons en projetant tout d'abord sur la direction $\vec{y}_0$:

$$v = \left.\frac{d\left(\left(x+a\right).\vec{x}_1 + b.\vec{x}_3\right)}{dt}\right)_{R_0} .\vec{y}_0 = \left.\frac{d\left(\left(x+a\right).\vec{x}_1.\vec{y}_0 + b.\vec{x}_3.\vec{y}_0\right)}{dt}\right)_{R_0}$$

$$v = \left.\frac{d\left(\left(x+a\right).\sin\alpha\right)}{dt}\right)_{R_0} = \dot{x}.\sin\alpha + \left(a+x\right).\cos\alpha.\dot{\alpha}$$

On obtient alors : $\boxed{v = \dot{x}.\sin\alpha + \left(a+x\right).\cos\alpha.\dot{\alpha}}$ 1)

Par une seconde projection sur la direction $\vec{x}_0$ il vient :

$$\left.\frac{d\overrightarrow{O_1A}}{dt}\right)_{R_0} .\vec{x}_0 = 0 = \left.\frac{d\left(\left(x+a\right).\vec{x}_1 + b.\vec{x}_3\right)}{dt}\right)_{R_0} .\vec{x}_0 = \left.\frac{d\left(\left(x+a\right).\vec{x}_1.\vec{x}_0 + b.\vec{x}_3.\vec{x}_0\right)}{dt}\right)_{R_0}$$

$$0 = \left.\frac{d\left(\left(x+a\right).\cos\alpha + b\right)}{dt}\right)_{R_0} = \dot{x}.\cos\alpha - \left(a+x\right).\sin\alpha.\dot{\alpha}$$

La seconde relation est donc $\boxed{0 = \dot{x}.\cos\alpha - \left(a+x\right).\sin\alpha.\dot{\alpha}}$ 2)

③ En combinant les relations 1) et 2):

*Dans un premier temps $1\times\sin\alpha + 2\times\cos\alpha$ nous donne :

$\boxed{\dot{x} = v.\sin\alpha}$ 3)

*Dans un second temps $1\times\cos\alpha + 2\times\left(-\sin\alpha\right)$ nous donne :

$$\left(a+x\right).\dot{\alpha} = v.\cos\alpha$$

En combinant cette dernière relation avec la relation déterminée précédemment à la question 1 :

$\delta = \left(x+a\right).\cos\alpha + b + R + d$ et donc $\delta - \left(b+R+d\right) = \left(x+a\right).\cos\alpha$

on a :

$$\dot{\alpha} = \frac{v.\cos\alpha}{\left(a+x\right)} = \frac{v.\cos^2\alpha}{\delta - \left(b+R+d\right)}$$

De plus , à partir des conditions initiales à $t = 0$ on a $x = 0$ et $\alpha = 0$. En reprenant la relation déterminée à la question 1, il vient : $\delta - \left(b+R+d\right) = \left(x+a\right).\cos\alpha$ et donc à partir des conditions initiales on déduit que : $\delta - \left(b+R+d\right) = a$. L'expression de $\dot{\alpha}$ devient :

$\boxed{\dot{\alpha} = \frac{v.\cos^2\alpha}{a}}$ 4)

*En dérivant à présent la relation 3) par rapport au temps nous obtenons :

$$\ddot{x} = v.\dot{\alpha}.\cos\alpha$$

En utilisant alors la relation 4) , il vient :

$\ddot{x} = v.\dfrac{v.\cos^2\alpha}{a}.\cos\alpha$ et donc $\boxed{\ddot{x} = \dfrac{v^2.\cos^3\alpha}{a}}$

* La dernière accélération sera obtenue en dérivant la relation 4) par rapport au temps :

$\ddot{\alpha} = \dfrac{v}{a}.\left(-2\cos\alpha.\sin\alpha.\dot{\alpha}\right)$. En utilisant la relation 4) on obtient finalement :

$$\boxed{\ddot{\alpha} = \left(\frac{v}{a}\right)^2.\left(-2\cos^3\alpha.\sin\alpha\right)}$$