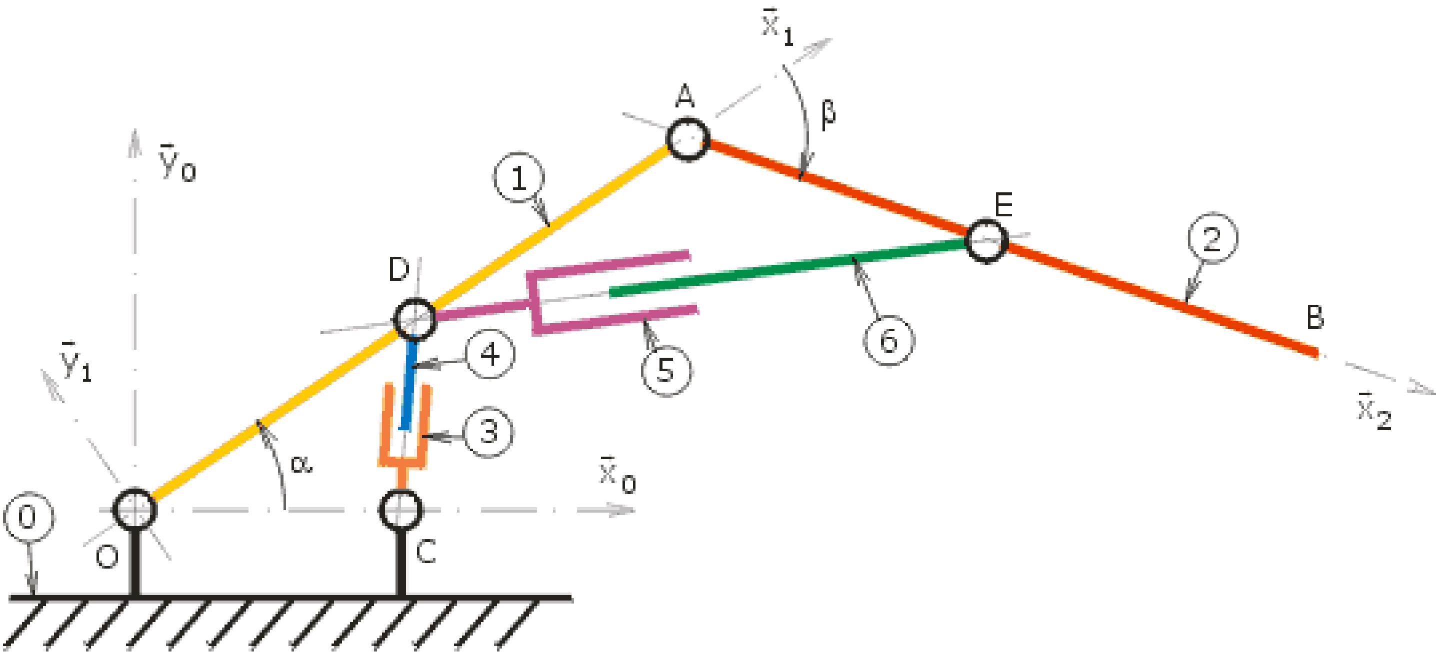
Enoncé ***Concours Ecole de l'air 99 MP***

Le schéma présenté ci-dessous représente un bras manipulateur d'atelier flexible , chargé de transporter des pièces d'un poste de travail à un autre.

Le bras (1) est lié au bâti par une liaison pivot d'axe $(O,\vec{z}_0)$. Le bras (2) est lié au bras (1) par une liaison pivot $(A,\vec{z}_0)$. Le vérin d'épaule (3)-(4) a une liaison pivot $(C,\vec{z}_0)$ avec le bâti (0) et une liaison pivot $(D,\vec{z}_0)$ avec la pièce (1). Le vérin d'épaule (5)-(6) a une liaison pivot $(D,\vec{z}_0)$ avec la pièce (1) et une liaison pivot $(E,\vec{z}_0)$ avec la pièce (2).



On considère les vitesses de sortie des tiges de vérin constantes et égales à $V = 1mm/s$.

L'application numérique sera réalisée pour la configuration : $\alpha = 45°$ et $\beta = -90°$.

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{DA} = a.\vec{x}_1 \quad , \quad \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EB} = a.\vec{x}_2 \quad , \quad \overrightarrow{OC} = a.\frac{\sqrt{2}}{2}.\vec{x}_0$$

1 Déterminer dans la base $B_0(\vec{x}_0,\vec{y}_0)$, la vitesse $\vec{V}(B \in 2/0)$ en fonction des paramètres α, β *et* V du robot .

(2) Application numérique pour $\alpha = 45°$, $\beta = -90°$ et $V = 1\ mm/s$.

Solution

(1) A partir de la composition des vitesses, nous pouvons écrire :

$$\vec{V}(B \in 2/0) = \vec{V}(B \in 2/1) + \vec{V}(B \in 1/0)$$

Cherchons à présent chacune de ces vitesses :

$$* \ \vec{V}(B \in 2/1) = \underbrace{\vec{V}(A \in 2/1)}_{\vec{0}} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}_{2/1}$$

$$\vec{V}(B \in 2/1) = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}_{2/1} = -2.a.\vec{x}_2 \wedge \dot{\beta}.\vec{z}_0$$

$$\vec{V}(B \in 2/1) = 2.a.\dot{\beta}.\vec{y}_2$$

Dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ nous obtenons :

$$\boxed{\vec{V}(B \in 2/1) = 2.a.\dot{\beta}.\left(-\sin(\alpha+\beta).\vec{x}_0 + \cos(\alpha+\beta)\vec{y}_0\right)}$$

$$* \ \vec{V}(B \in 1/0) = \underbrace{\vec{V}(O \in 1/0)}_{\vec{0}} + \overrightarrow{BO} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}$$

$$\vec{V}(B \in 1/0) = \overrightarrow{BO} \wedge \vec{\Omega}_{1/0} = \left(-2.a.\vec{x}_2 - 2.a.\vec{x}_1\right) \wedge \dot{\alpha}.\vec{z}_0$$

$$\vec{V}(B \in 1/0) = 2.a.\dot{\alpha}.\left(\vec{y}_1 + \vec{y}_2\right)$$

Dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ nous obtenons :

$$\vec{V}(B\in 1/0) = 2.a.\dot{\alpha}.\left(\cos\alpha.\vec{x}_0 + \sin\alpha.\vec{y}_0 - \sin(\alpha+\beta).\vec{x}_0 + \cos(\alpha+\beta)\vec{y}_0\right)$$

$$\boxed{\vec{V}(B\in 1/0) = 2a.\dot{\alpha}.\left(\left(\cos\alpha - \sin(\alpha+\beta)\right).\vec{x}_0 + \left(\sin\alpha + \cos(\alpha+\beta)\right).\vec{y}_0\right)}$$

En reprenant l'expression $\vec{V}(B\in 2/0) = \vec{V}(B\in 2/1) + \vec{V}(B\in 1/0)$, nous obtenons :

$$\vec{V}(B\in 2/0) = 2.a.\dot{\beta}.\vec{y}_2 + 2a.\dot{\alpha}.(\vec{y}_1 + \vec{y}_2)$$

$$\boxed{\vec{V}(B\in 2/0) = 2.a.\left(\dot{\alpha}.\vec{y}_1 + \left(\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right).\vec{y}_2\right)}$$

En projetant dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$, il vient :

$$\vec{V}(B\in 2/0) = 2.a.\left(\dot{\alpha}.(\cos\alpha.\vec{x}_0 + \sin\alpha.\vec{y}_0) + \left(\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right).\left(-\sin(\alpha+\beta).\vec{x}_0 + \cos(\alpha+\beta)\vec{y}_0\right)\right)$$

.

$$\vec{V}(B\in 2/0)\left|\begin{array}{l} 2.a.\left(\dot{\alpha}.\cos\alpha - \left(\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right).\sin(\alpha+\beta)\right) \\ 2.a.\left(\dot{\alpha}.\sin\alpha + \left(\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right).\cos(\alpha+\beta)\right) \end{array}\right._{(\vec{x}_0,\vec{y}_0)}$$

Il reste à présent à déterminer $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$ en fonction de V :

* Cherchons $\dot{\alpha}$ en fonction de V :

Dans le triangle (O,C,D) nous avons : $CD^2 = a^2 + \left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 - a^2.\sqrt{2}.\cos\alpha$. En dérivant cette expression par rapport au temps et en remarquant que $V = \dfrac{d(CD)}{dt}$, il vient :

$$CD.\frac{d(CD)}{dt} = a^2.\sqrt{2}.\dot{\alpha}.\sin\alpha$$

Nous pouvons alors déterminer $\dot{\alpha}$ en fonction de V :

$$\boxed{\dot{\alpha} = \frac{V.\sqrt{3 - 2.\sqrt{2}.\cos\alpha}}{a.\sin\alpha}}$$

* Cherchons $\dot{\beta}$ en fonction de V :

Dans le triangle (D,A,E) nous avons : $DE^2 = a^2 + a^2 - 2.a^2.\cos(\pi-\beta)$; En dérivant également cette expression par rapport au temps, et en remarquant que $V = \dfrac{d\left(DE\right)}{dt}$, il vient :

$$2.DE.\frac{d\left(DE\right)}{dt} = -2.a^2.\dot{\beta}.\sin\beta$$

L'expression de $\dot{\beta}$ en fonction de V est alors :

$$\boxed{\dot{\beta} = -\frac{V.\sqrt{2.\left(1+\cos\beta\right)}}{a.\sin\beta}}$$

Nous pouvons alors définir entièrement $\vec{V}\left(B \in 2/0\right)$ dans la base $B_0\left(\vec{x}_0, \vec{y}_0\right)$:

$$\vec{V}\left(B \in 2/0\right) \left|\begin{array}{l} 2.a.\left(\dot{\alpha}.\cos\alpha - \left(\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right).\sin\left(\alpha+\beta\right)\right) \\ 2.a.\left(\dot{\alpha}.\sin\alpha + \left(\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right).\cos\left(\alpha+\beta\right)\right) \end{array}\right._{\left(\vec{x}_0,\vec{y}_0\right)} \quad \text{avec} \quad \left|\begin{array}{l} \dot{\alpha} = \dfrac{V.\sqrt{3-2.\sqrt{2}.\cos\alpha}}{a.\sin\alpha} \\ \dot{\beta} = -\dfrac{V.\sqrt{2.\left(1+\cos\beta\right)}}{a.\sin\beta} \end{array}\right.$$

2 Pour l'application numérique nous avons :

$$\vec{V}\left(B \in 2/0\right) \left|\begin{array}{l} a.\sqrt{2}.\left(2.\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right) \\ a.\sqrt{2}.\left(2.\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right) \end{array}\right._{\left(\vec{x}_0,\vec{y}_0\right)} \quad \text{avec} \quad \left|\begin{array}{l} \dot{\alpha} = \dfrac{V.\sqrt{2}}{a} \\ \dot{\beta} = \dfrac{V.\sqrt{2}}{a} \end{array}\right.$$

Nous trouvons une vitesse :

$$\boxed{\vec{V}\left(B \in 2/0\right) \left|\begin{array}{l} 6.V \\ 6.V \end{array}\right._{\left(\vec{x}_0,\vec{y}_0\right)}}$$

ce qui correspond numériquement à :

$$\boxed{\vec{V}\left(B \in 2/0\right) \left|\begin{array}{l} 6\ mm/s \\ 6\ mm/s \end{array}\right._{\left(\vec{x}_0,\vec{y}_0\right)}}$$