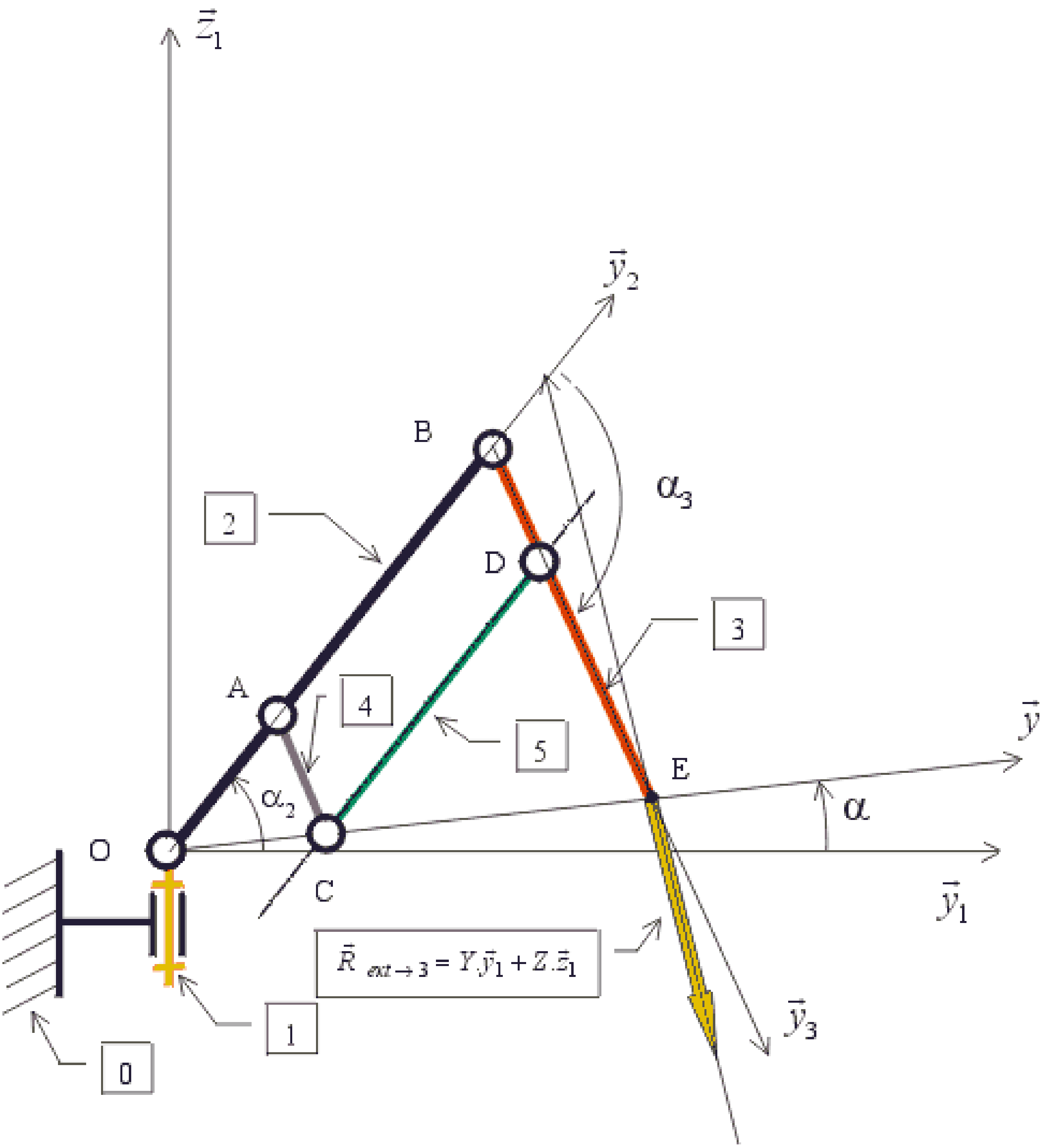
Enoncé

D'après un sujet de concours ENSAM 1992

Considérons un robot d'alimentation de machine spéciale d'usinage ayant pour fonctions :
*De prendre une pièce brute sur un convoyeur d'alimentation
*De déposer cette pièce sur la machine d'usinage
*D'évacuer la pièce usinée vers un tapis d'alimentation.
La représentation du poste d'usinage (vue du dessus) est la suivante :



Les liaisons principales du robot retenu pour les différentes manipulations sont les suivantes :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Liaison pivot } (0,\vec{z}_0) \text{ de la platine (1) par rapport au socle (0)} \Rightarrow \text{Paramètre} : \beta \\ \text{Liaison pivot } (0,\vec{x}_1) \text{ du bras (2) par rapport à la platine (1)} \Rightarrow \text{Paramètre} : \alpha_2 \\ \text{Liaison rotule en } B \text{ du bras (3) par rapport au bras (2)} \end{array} \right.$$

La liaison entre les bras (2) et (3) est complétée par deux bielles (4) et (5) de telle sorte que le quadrilatère ABCD forme un parallélogramme déformable. On pose :

$$\overrightarrow{BE} = e.\vec{y}_3 = 1,5.\vec{y}_3 \quad , \quad \overrightarrow{OB} = b.\vec{y}_2 = 2.\vec{y}_2 \quad , \quad \overrightarrow{BD} = \lambda.e.\vec{y}_3 = \frac{1}{3}.e.\vec{y}_3 \quad , \quad \overrightarrow{OA} = \lambda.b.\vec{y}_2$$

Les variables articulaires sont les suivantes :

$$\underbrace{\left(\widehat{\vec{y}_0,\vec{y}_1}\right) = \beta}_{\text{autour de } \vec{z}_0} \quad , \quad \left(\widehat{\vec{y}_1,\vec{y}}\right) = \alpha \quad , \quad \left(\widehat{\vec{y}_1,\vec{y}_2}\right) = \alpha_2 \quad , \quad \left(\widehat{\vec{y}_2,\vec{y}_3}\right) = \alpha_3$$

Les trois dernières rotations étant comptées positivement autour de $\vec{x}_1$. Le repère fixe lié au socle du robot est $R_0\left(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0\right)$. Les points O,C et E sont alignés. On note $\overrightarrow{OE} = \rho_E.\vec{y}$.

Le poids des éléments est négligé devant la charge externe appliquée en bout du préhenseur lié à l'extrémité E du bras (3). Cette action se réduit à un glisseur :

$$_E\left\{T_{ext\rightarrow 3}\right\} = {}_E\left\{\begin{array}{c} \vec{R}_{ext\rightarrow 3} = Y.\vec{y}_1 + Z.\vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{array}\right\} = {}_E\left\{\begin{array}{c} \vec{R}_{ext\rightarrow 3} = 100.\vec{y}_1 - 400\vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{array}\right\}$$

On se propose de réaliser une étude de statique plane de ce robot :

Les actionneurs utilisés sont deux vérins hydrauliques :

* Le vérin noté H, de translation horizontale $(\text{suivant } \vec{y}_1)$ du point C est fixé entre le point C et le point H, projection orthogonale sur l'axe $(O,\vec{z}_1)$ du point C

*Le vérin noté V, de translation verticale $(\text{suivant } \vec{z}_1)$ du point C est fixé entre le point C et le point V défini par $\overrightarrow{VO}.\vec{z}_1 = \mu$.

*Les actions des actionneurs se réduisent au point C à un glisseur :

$$_C\left\{T_{act.\rightarrow robot}\right\} = {}_C\left\{\begin{array}{c} H.\vec{y}_1 + V.\vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{array}\right\}$$

*On suppose que le problème est un problème de statique plane avec $\vec{M}_{O\ 1\rightarrow 2} = \vec{0}$

1.1 En utilisant une interprétation analytique de résultats de la statique graphique, démontrer que le torseur des efforts exercés en O par la platine (1) sur le bras (2) est de la forme :

$$_O\left\{T_{1\to 2}\right\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_{1\to 2} = F_y\,\vec{y}_1 + F_z\,\vec{z}_1 = k.\left(Y\,\vec{y}_1 + Z\,\vec{z}_1\right) \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_O$$

1.2 En utilisant le résultat précédent, déterminer la valeur du coefficient k en fonction de λ .

1.3 En déduire les valeurs des efforts développés par les actionneurs H et V en fonction de λ .

Solution

masquer les solutions

1.1 On isole le sous ensemble $E = \{2,3,4,5\}$. Il est soumis à l'action de trois glisseurs dans le plan $(O, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$:

$$_E\left\{T_{ext\to 3}\right\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_{ext\to 3} = Y.\vec{y}_1 + Z.\vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_E \Rightarrow \text{entièrement connu}$$

$$_C\left\{T_{act.\to robot}\right\} = \left\{ \begin{matrix} H.\vec{y}_1 + V.\vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_C \Rightarrow \left| \begin{matrix} Norme\,? \\ Direction\,? \\ sens\,? \end{matrix} \right.$$

$$_O\left\{T_{1\to 2}\right\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_{1\to 2} = F_y.\vec{y}_1 + F_z.\vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_O \Rightarrow \left| \begin{matrix} Norme\,? \\ Direction\,? \\ sens\,? \end{matrix} \right.$$

Nous ne pouvons déterminer ces différents glisseurs directement. Il nous faut donc étudier plus en détail l'équilibre de pièces ou de sous ensembles du robot.

*Isolons la barre (5). Elle est soumise à trois glisseurs dans le plan.

$$_C\{T_{4\to 5}\} = {}_C\begin{Bmatrix} \vec{R}_{4\to 5} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$_D\{T_{3\to 5}\} = {}_D\begin{Bmatrix} \vec{R}_{3\to 5} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$_C\{T_{act.\to robot}\} = {}_C\begin{Bmatrix} H.\vec{y}_1 + V.\vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

En appliquant le théorème d'un solide soumis à trois glisseurs ; la condition nécessaire d'équilibre de la pièce (5) est que :

LES GLISSEURS SONT : | * Coplanaires | * Concourants | * La somme vectorielle des résultantes est nulle

Nous déduisons que ces trois glisseurs sont concourants en C. Le glisseur d'action de la pièce (3) sur la pièce (5) peut s'écrire :

$$_D\{T_{3\to 5}\} = {}_D\begin{Bmatrix} \vec{R}_{3\to 5} = R_{3\to 5}.\vec{y}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$ car d'après la géométrie particulière du robot

$$\vec{y}_2 = \frac{\overrightarrow{CD}}{\left\|\overrightarrow{CD}\right\|}$$

On peut réaliser le même raisonnement pour la barre (4), et l'on déduit que :

$$_A\{T_{2\to 4}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}_{2\to 4} = R_{2\to 4}.\vec{y}_3 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$ car d'après la géométrie particulière du robot

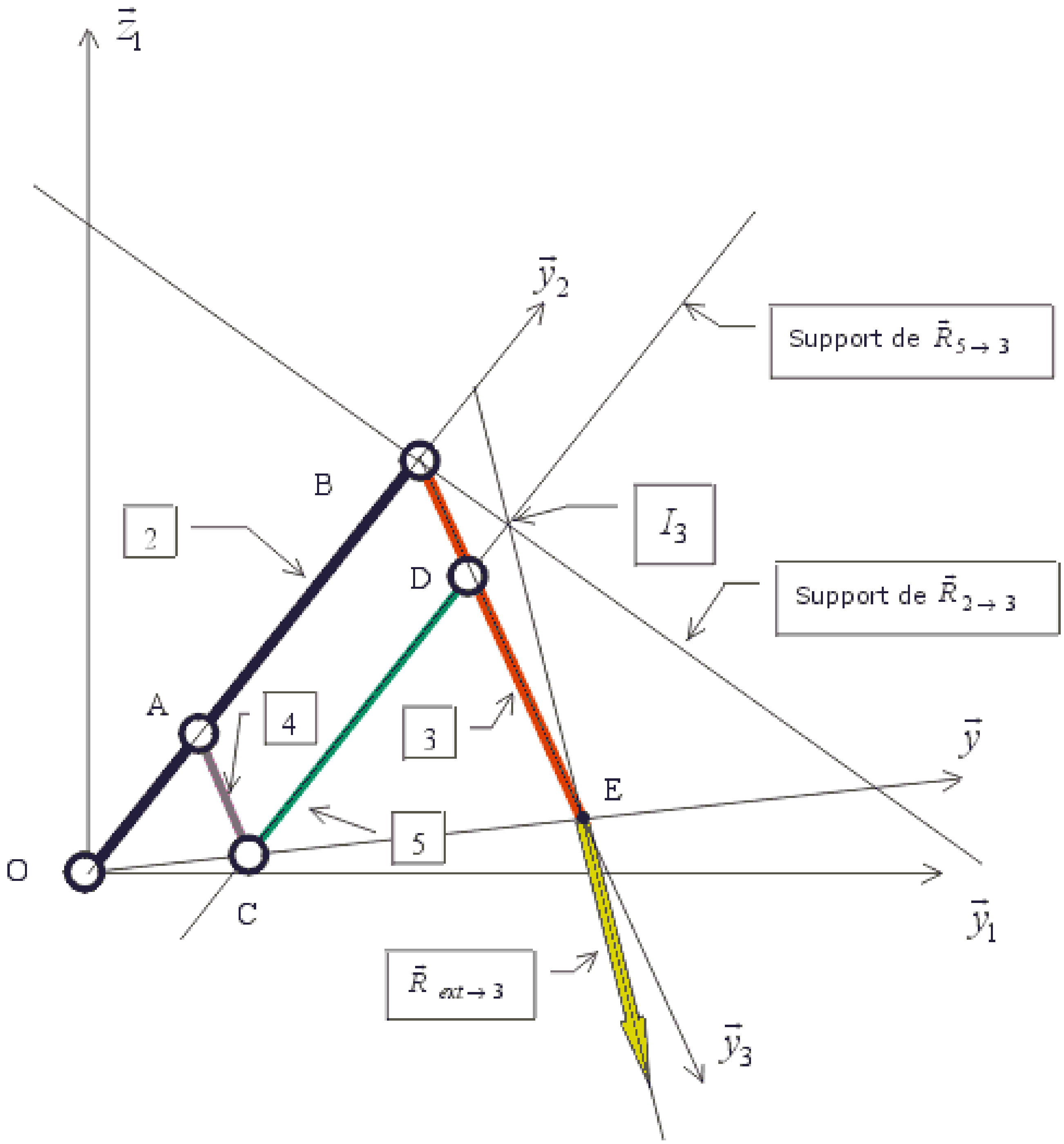
$$\vec{y}_3 = \frac{\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}$$

*Isolons à présent le bras (3). Il est soumis à l'action de trois glisseurs :

$$_E\{T_{ext\to 3}\} = {}_E\begin{Bmatrix} \vec{R}_{ext\to 3} = 100.\vec{y}_1 - 400\vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$ entièrement connu

$$_D\{T_{5\rightarrow 3}\} = -_D\{T_{3\rightarrow 5}\} = {}_D\begin{Bmatrix} -\vec{R}_{3\rightarrow 5} = -R_{3\rightarrow 5}.\vec{y}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} Norme\,? \\ Direction \rightarrow \vec{y}_2 \\ sens\,? \end{array} \right.$$

$$_B\{T_{2\rightarrow 3}\} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{R}_{2\rightarrow 3} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} Norme\,? \\ Direction \rightarrow \vec{y}_2 \\ sens\,? \end{array} \right.$$



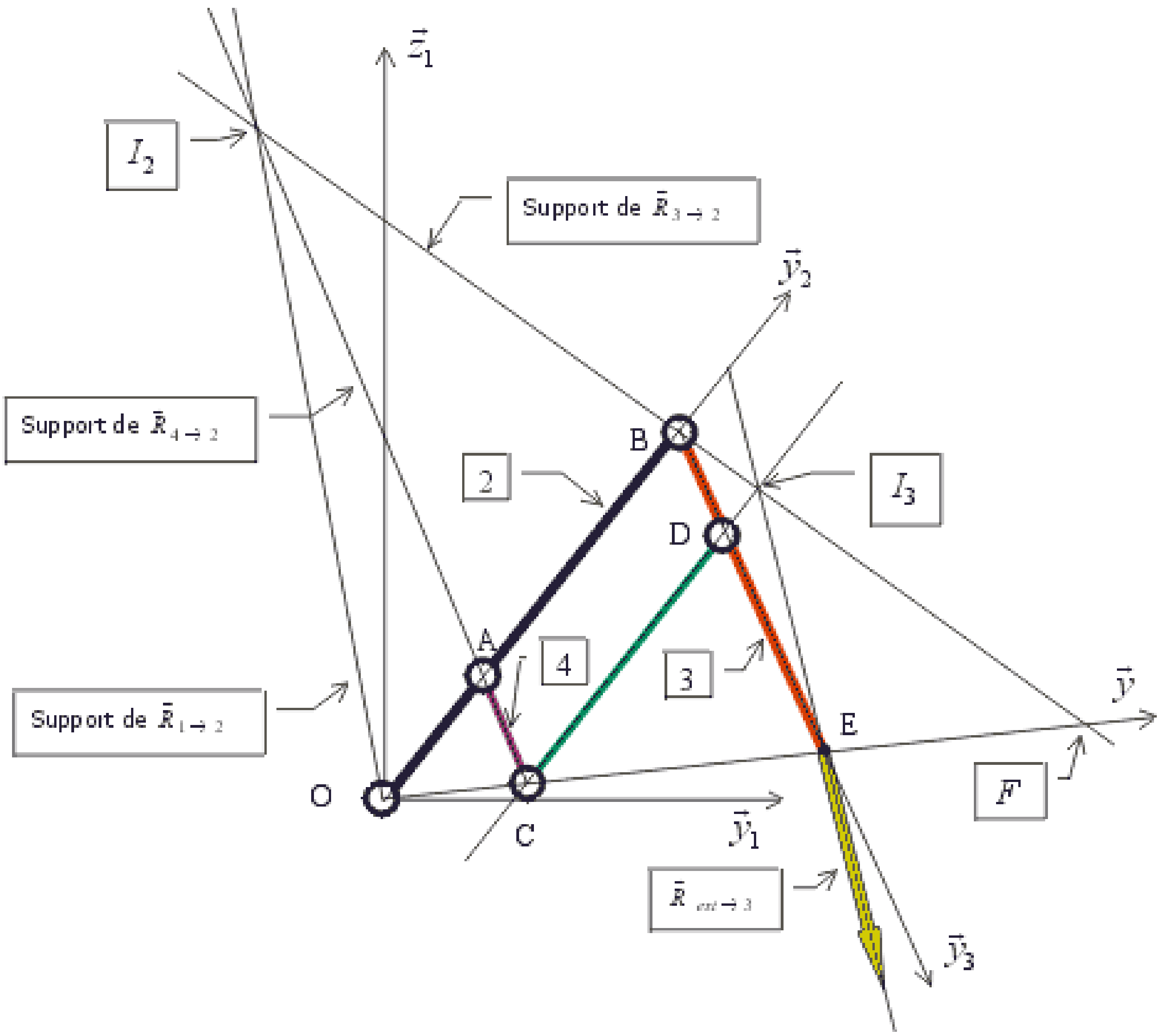
A l'équilibre, en appliquant le théorème d'un solide soumis à trois glisseurs , nous déduisons que ces

trois glisseurs sont concourants en I_3 et que l'action $\vec{R}_{2\to 3}$ est orientée par le vecteur $\overrightarrow{BI_3}$ .Nous pouvons déduire, si nous le souhaitons , les résultantes des trois glisseurs par fermeture vectorielle.
*Isolons ensuite le bras (2) . Il est soumis à l'action de trois glisseurs :

$${}_O\left\{T_{1\to 2}\right\} = {}_O\left\{\begin{matrix}\vec{R}_{1\to 2} = F_y.\vec{y}_1 + F_z.\vec{z}_1 \\ \vec{0}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left|\begin{matrix}Norme\,? \\ Direction\,? \\ sens\,?\end{matrix}\right.$$

$${}_A\left\{T_{4\to 2}\right\} = {}_A\left\{\begin{matrix}\vec{R}_{4\to 2} = -R_{2\to 4}.\vec{y}_3 \\ \vec{0}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left|\begin{matrix}Norme\,? \\ Direction\,? \\ sens\,?\end{matrix}\right.$$

${}_B\left\{T_{3\to 2}\right\} = {}_B\left\{\begin{matrix}\vec{R}_{2\to 3} = -\vec{R}_{3\to 2} \\ \vec{0}\end{matrix}\right\} \Rightarrow$ entièrement connu à partir de l'équilibre de (3) .



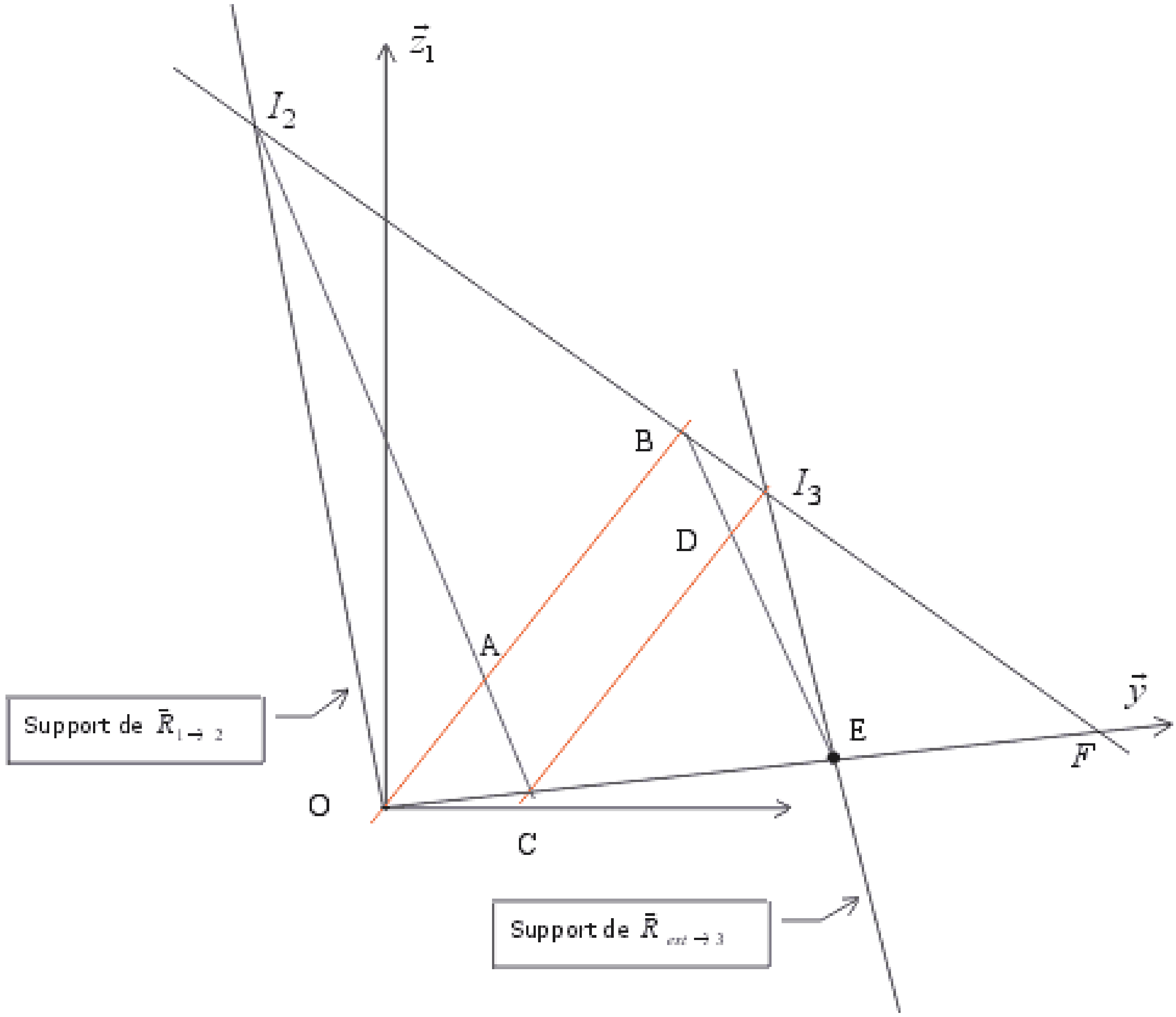
A l'équilibre, en appliquant le théorème d'un solide soumis à trois glisseurs , nous déduisons que ces trois glisseurs sont concourants en I_2 et que l'action $\vec{R}_{1\to 2}$ est orientée par le vecteur $\overrightarrow{0I_2}$ .Nous pouvons déduire alors par fermeture vectorielle les résultantes des trois glisseurs.

Pour démontrer que $\vec{R}_{1\to2} = F_y.\vec{y}_1 + F_z\vec{z}_1 = k.\left(Y.\vec{y}_1 + Z.\vec{z}_1\right)$, il faut démontrer que $\overrightarrow{EI_3}$ est colinéaire à $\overrightarrow{0I_2}$ car ces deux vecteurs orientent les axes centraux des glisseurs ${}_E\left\{T_{ext\to3}\right\}$ et ${}_O\left\{T_{1\to2}\right\}$. Si tel est le cas, leurs résultantes seront colinéaires et nous pourrons alors écrire :

$\vec{R}_{1\to2} = F_y.\vec{y}_1 + F_z\vec{z}_1 = k.\left(Y.\vec{y}_1 + Z.\vec{z}_1\right)$.

Considérons le point F , intersection de l'axe central de ${}_B\left\{T_{3\to2}\right\}$ et de l'axe $\left(O,\vec{y}\right)$.

A partir de Thalès, nous pouvons écrire :



*dans le triangle (C, F, I_2) : $\dfrac{FC}{FE} = \dfrac{FI_2}{FI_3}$

*dans le triangle (O, F, B) : $\dfrac{FO}{FC} = \dfrac{FB}{FI_3}$

Par combinaison de ces deux relations (multiplication terme à terme) nous déduisons que $\dfrac{FO}{FC} = \dfrac{FB}{FI_3}$. Les vecteurs $\overrightarrow{EI_3}$ et $\overrightarrow{0I_2}$ sont donc colinéaires. On déduit donc que

$$\boxed{\vec{R}_{1\to 2} = F_y.\vec{y}_1 + F_z.\vec{z}_1 = k.(Y.\vec{y}_1 + Z.\vec{z}_1)}$$

1.2 Pour déterminer k , étudions maintenant l'équilibre d'une partie du robot constituée de l'ensemble des pièces $E = \{2,3,4,5\}$.

*Isolons l'ensemble $E = \{2,3,4,5\}$.

*Caractérisons les actions externes sur $E=\{2,3,4,5\}$

$$_E\{T_{ext\to 3}\}=\begin{Bmatrix}\vec{R}_{ext\to 3}=Y.\vec{y}_1+Z.\vec{z}_1\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_E \Rightarrow$$ entièrement connu

$$_C\{T_{act.\to robot}\}=\begin{Bmatrix}H.\vec{y}_1+V.\vec{z}_1\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_C \Rightarrow \left|\begin{array}{l}Norme\,?\\ Direction\,?\\ sens\,?\end{array}\right.$$

$$_O\{T_{1\to 2}\}=\begin{Bmatrix}\vec{R}_{1\to 2}=F_y.\vec{y}_1+F_z.\vec{z}_1\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_O \Rightarrow \left|\begin{array}{l}Norme\,?\\ Direction \to \overrightarrow{EI}_3\\ sens\,?\end{array}\right.$$

Comme nous nous intéressons à la relation liant $\vec{R}_{ext\to 3}$ et $\vec{R}_{1\to 2}$, il faut éviter de faire intervenir les composantes du torseur $_C\{T_{act.\to robot}\}$ dans les équations d'équilibre. En appliquant le ***PFS*** à $E=\{2,3,4,5\}$, théorème du moment statique en C, en projection suivant la direction $\vec{x}_1$, nous obtenons :

$$\sum \vec{M}_{C\,\bar{E}\to E}\cdot\vec{x}_1=\left(\overrightarrow{CE}\wedge\vec{R}_{ext\to 3}+\overrightarrow{CO}\wedge\vec{R}_{1\to 2}\right).\vec{x}_1=0$$

Comme $\vec{R}_{ext\to 3}$ et $\vec{R}_{1\to 2}$ sont colinéaires, nous obtenons :

$$\left\|\overrightarrow{CE}\right\|.\left\|\vec{R}_{ext\to 3}\right\|.\sin\left(\overline{\vec{y},\vec{R}_{ext\to 3}}\right)+\left\|\overrightarrow{CO}\right\|.\left\|\vec{R}_{1\to 2}\right\|.\sin\left(\overline{-\vec{y},\vec{R}_{1\to 2}}\right)=0$$

Nous déduisons : $-\left\|\overrightarrow{CE}\right\|.\left\|\vec{R}_{ext\to 3}\right\|+\left\|\overrightarrow{CO}\right\|.\left\|\vec{R}_{1\to 2}\right\|=0$ et donc $\boxed{\dfrac{\left\|\vec{R}_{1\to 2}\right\|}{\left\|\vec{R}_{ext\to 3}\right\|}=\dfrac{\left\|\overrightarrow{CE}\right\|}{\left\|\overrightarrow{CO}\right\|}=k}$

Par Thalès sur le triangle (B,O,E) nous déduisons que

$\dfrac{\left\|\overrightarrow{OE}\right\|}{\left\|\overrightarrow{OC}\right\|}=\dfrac{\left\|\overrightarrow{OB}\right\|}{\left\|\overrightarrow{OA}\right\|}=\dfrac{e}{\lambda.e}$ $\quad avec \quad$ $\left\|\overrightarrow{OE}\right\|=\left\|\overrightarrow{OE}\right\|+\left\|\overrightarrow{CE}\right\|$; ce qui nous donne $\left\|\overrightarrow{CE}\right\|=\left(\dfrac{1}{\lambda}-1\right).\left\|\overrightarrow{OC}\right\|$.

On a donc $\boxed{k=\left(\dfrac{1}{\lambda}-1\right)}$ A.N $k=2$

1.3 Pour déterminer H et V en fonction de λ , il faut déterminer entièrement $\vec{R}_{act.\to robot}$ car $\vec{R}_{act.\to robot} = H.\vec{y}_1 + V.\vec{z}_1$. En appliquant le PFS à l'ensemble $E = \{2,3,4,5\}$, théorème de la résultante statique, nous avons :

$\vec{R}_{act.\to robot} + \underbrace{\vec{R}_{1\to 2}}_{k.\vec{R}_{ext\to 3}} + \vec{R}_{ext\to 3} = \vec{0}$ ce qui entraîne : $\vec{R}_{act.\to robot} + \underbrace{(1+k)}_{\frac{1}{\lambda}}.\vec{R}_{ext\to 3} = \vec{0}$ et

donc : $\vec{R}_{act.\to robot} = -\dfrac{1}{\lambda}.\vec{R}_{ext\to 3} = -3.(Y.\vec{y}_1 + Z.\vec{z}_1) = H.\vec{y}_1 + V.\vec{z}_1$. Nous déduisons les

actions des vérins : $\boxed{\left| \begin{array}{l} H = -3.Y \\ V = -3.Z \end{array} \right. \Rightarrow \quad A.N \quad \left| \begin{array}{l} H = -300\ N \\ V = 1200\ N \end{array} \right.}$