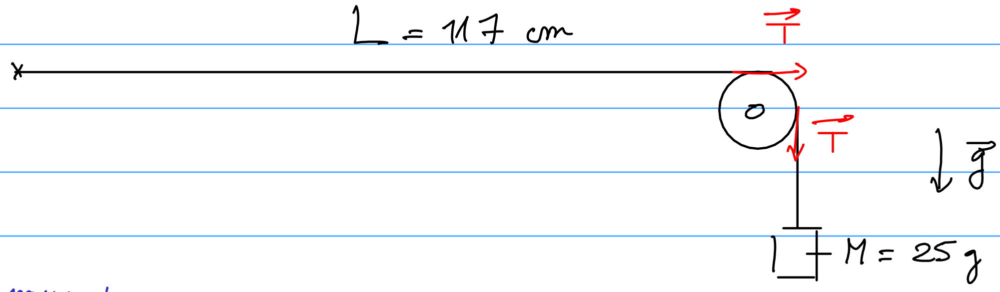
TD S4
Interférences

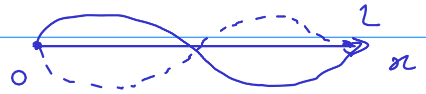
S1 - Modes propres de vibration d'une corde

1/

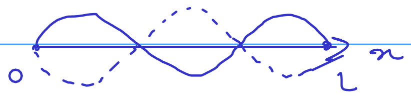


Résonance pour :

- $f = 19\ Hz$



- $f = 28\ Hz$



1.1/ $f = 19\ Hz$: deux ventres $\Rightarrow$ mode $n = 2$
alors $f_2 = 19\ Hz = 2 f_1$ avec f_1 la fréquence du mode fondamental $(n=1)$
$\Leftrightarrow$ $\underline{f_1 = 9{,}5\ Hz}$

$f = 28\ Hz$: trois ventres $\Rightarrow$ mode $n = 3$
alors $f_3 = 28\ Hz = 3 f_1$ avec f_1 la fréquence du mode fondamental $(n=1)$
$\Leftrightarrow$ $\underline{f_1 = 9{,}3\ Hz}$

Aux erreurs de mesure près, les deux valeurs de f_1 sont compatibles.
Dans la suite, on utilise $f_1 = 9{,}5\ Hz$.

1.2./ Mode $n = 4$: $f_4 = 4 f_1 = 38\ Hz$
Mode $n = 5$: $f_5 = 5 f_1 = 47{,}5\ Hz$
Mode $n = 6$: $f_6 = 6 f_1 = 57\ Hz$

2/ On sait qu'avec deux nœuds imposés en $x = 0$ et $x = L$, les fréquences propres de vibrations de la corde s'écrivent :

$$\boxed{f_n = n \times \frac{c}{2L}}$$

Pour $n = 1$: $\boxed{c = 2L f_1}$

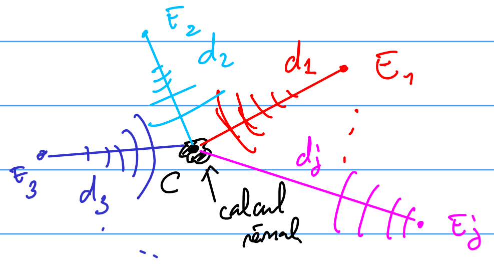
$\underline{\text{A.N.}}$ $\left.\begin{array}{l} f_1 = 9{,}5\ Hz \\ L = 1{,}17\ m \end{array}\right\}$ $\underline{c = 22{,}3\ m\,s^{-1}}$

3/ Masse linéique de la corde μ :

$$C = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Leftrightarrow \mu = \frac{T}{C^2} \quad . \quad \text{Avec } T = Mg \Rightarrow \boxed{\mu = \frac{Mg}{C^2}}$$

A.N. : $\left.\begin{array}{l} M = 25 \times 10^{-3}\ kg \\ g = 9{,}81\ m.s^{-1} \\ C = 22{,}3\ m.s^{-1} \end{array}\right\}$ $\underline{\mu = 0{,}49\, g}$ vraisemblable

S2 - Traitement des calculs rénaux



1/ Intérêt d'utiliser plusieurs ondes : obtenir une grande amplitude vibration ultra-sonore au niveau du calcul rénal M par interférences sans traumatiser les tissus traversés par les ondes différentes ondes.

2/ Pour que la thérapie soit efficace, il faut que les ondes interfèrent constructivement en M.
En M, la pression s'écrit :

$$p(M,t) = p_1(M,t) + p_2(M,t) + \dots p_j(M,t) + \dots p_n(M,t)$$

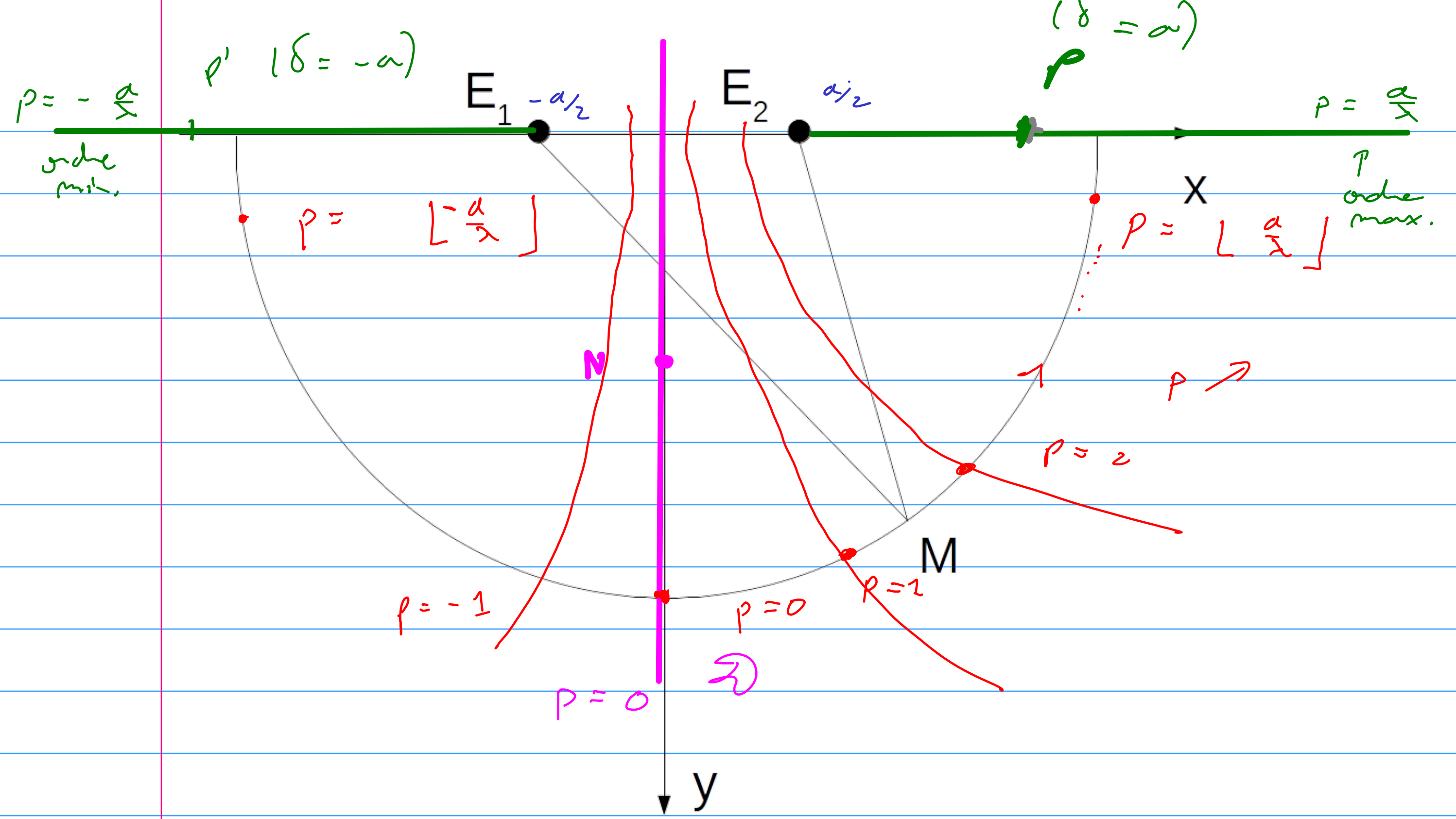
En supposant les ondes planes progressives monochromatiques :

$$\forall j, \quad p_j(M,t) = P_{m_j} \cos(\omega t - kd_j + \varphi_{0,j})$$

Il faut donc que $\varphi_{0j} - kd_j = 2\pi \times z_j, \quad z_j \in \mathbb{Z}$

Cela nécessite de synchroniser les phases φ_{0j} à l'origine de tous les emetteurs.

S3 - Ordres d'interférences



1/ Soit $N \in \mathcal{D}$, $\delta(N) = E_1N - E_2N = 0 \Rightarrow p = 0$

$\forall N \in \mathcal{D}$, les interférences sont constructives.

2/ $\forall P \in (E_1E_2) \setminus [E_1, E_2]$, $\delta = E_1P - E_2P$

$\delta = \pm a.$ $\Longleftrightarrow$ $p = \frac{\delta}{\lambda} = \pm \frac{a}{\lambda}$

E_1 et E_2 émettent en phase

$\Rightarrow$ les lieux d'interférences constructives vérifient $\delta = m\lambda$, $m \in \mathbb{Z}$

Soit pour $P \in (E_1E_2) \setminus [E_1, E_2]$:

$\pm a = m\lambda \Longleftrightarrow a = n\lambda$, $n \in \mathbb{Z}$

3/ $p_{max} = \lfloor \frac{a}{\lambda} \rfloor \Rightarrow N = 2p_{max} + 1$

A.N. : $a = 4$ cm, $\lambda = 8$ mm.

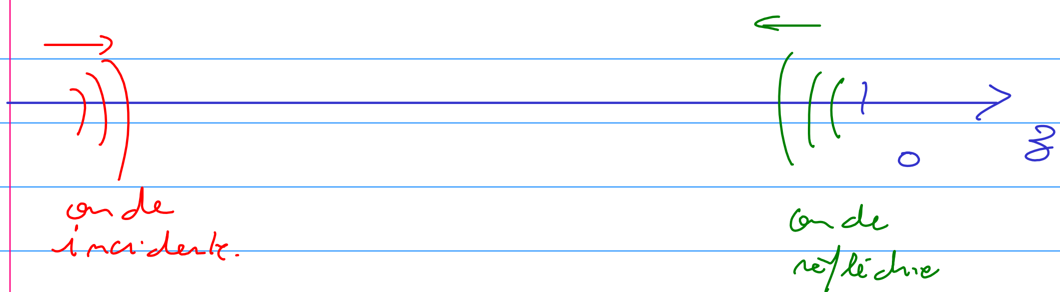
$p_{max} = \frac{a}{\lambda} = \frac{40}{8} = 5$

$\Rightarrow N = 11$ franges d'interférences constructives

34 -

1/ Onde incidente : onde progressive harmonique vers les $z \nearrow$: $\psi_i(z,t) = \psi_0 \cos(\omega t - kz)$

2/



Onde réfléchie :

$$\psi_r(z,t) = \psi_0' \cos(\omega t + kz + \varphi)$$

3/ En $z=0$, ventre de vibration. donc l'onde incidente et l'onde réfléchie interfèrent constructivement en $z=0$, soit $\Delta\varphi(z=0) = \varphi_r(z=0) - \varphi_i(z=0) = 0\,[2\pi]$.

Avec $\varphi_i = \omega t - kz$ phase de l'onde incidente

$\varphi_r = \omega t + kz + \varphi$ phase de l'onde réfléchie.

D'où $\Delta\varphi = -2kz + \varphi \Rightarrow \Delta\varphi(z=0) = \varphi$

Donc $\boxed{\varphi = 0}$

De plus réflexion totale en $z=0$ donc $\psi_0' = \psi_0$

Finalement, l'onde réfléchie s'écrit :

$$\psi_r(z,t) = \psi_0 \cos(\omega t + kz)$$

4/ Onde résultante :

$$p(z,t) = p_i(z,t) + p_r(z,t)$$
$$= p_0 \cos(\omega t - kz) + p_0 \cos(\omega t + kz)$$

or $\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

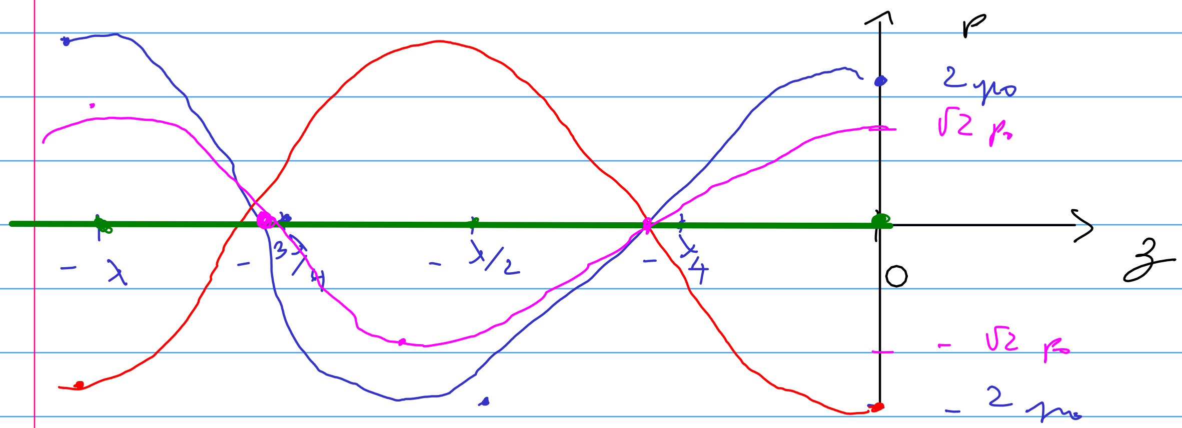
avec $p = \omega t + kz$

$q = \omega t - kz$

$$\boxed{p(z,t) = 2 p_0 \cos(kz) \cos(\omega t)}$$

Découplage du temps et de l'espace $\Longrightarrow$ onde stationnaire.

- $t = 0$ - $t = \frac{T}{2}$ - $t = \frac{T}{4}$ - $t = \frac{T}{8}$

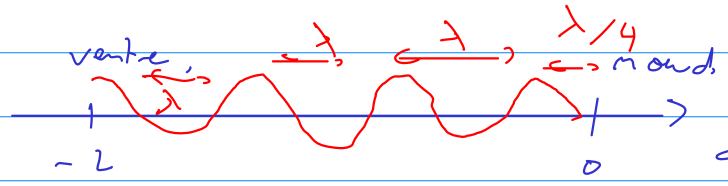


$$\cos(\omega t) = \cos\left(\frac{\omega T}{4}\right) \quad \text{avec} \quad \omega T = 2\pi$$
$$= \cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

5/ Mesure de λ

A l'aide d'un micro, on repère deux points consécutifs de vibration nulle (nœud). La distance entre ces deux nœuds vaut $\frac{\lambda}{2}$.

6. 1.



Onde stationnaire ssi :

$$\boxed{L = \frac{\lambda_n}{4} + n\lambda_n} \quad (*) \Leftrightarrow \lambda_n = \frac{L}{\left(\frac{1}{4} + n\right)}$$

6. 2. Harmoniques sélectionnées vérifient.

or $\lambda = \frac{c}{f}$ d'où $(*)$ devient : $\frac{c}{f_n} = \frac{L}{\frac{1}{4}+n}$

$$\Leftrightarrow \boxed{f_n = \left(n + \frac{1}{4}\right)\frac{c}{L}}$$