

Régime sinusoïdal

10

La réponse temporelle d'un système à une excitation constante a été étudiée précédemment. Toutefois, la majeure partie des signaux utiles ne sont pas constants mais variables dans le temps. Le but du présent chapitre est donc d'étudier comment un système réagit à un signal variable. Le choix d'une excitation sinusoïdale sera justifié dans le chapitre suivant.

1 Régimes transitoire et permanent sinusoïdal

On étudie un système du deuxième ordre, électrique ou mécanique, alimenté par une entrée sinusoïdale $e(t) = E_0 \cos(\omega t) = E_0 \cos(2\pi ft)$. On observe, avec un oscilloscope réglé en mode « monocoup », la sortie $s(t)$ sur la voie 2, après la fermeture du circuit, ainsi que l'entrée $e(t)$ sur la voie 1.

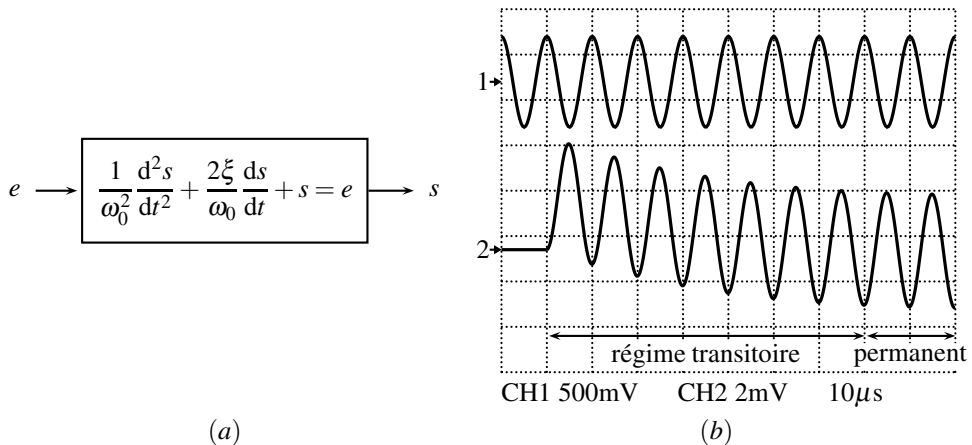


Figure 10.1 – Réponses d'un système du deuxième ordre : (a) Système étudié, (b) Système électrique $f_0 = 5,0$ kHz, $\xi = 0,8$, $f = 100$ kHz.

Les réponses sont très variées. On observe toutefois dans chaque cas deux régimes :

- le **régime établi**, ou **régime permanent**, pour lequel la sortie est de la même forme que

l'entrée, ici sinusoïdale de valeur moyenne nulle. Ce régime est aussi nommé **régime sinusoïdal forcé**.

- Le **régime transitoire**, entre l'instant initial et le régime permanent. Ce régime a des formes extrêmement variées suivant les systèmes et les fréquences des signaux d'entrée.

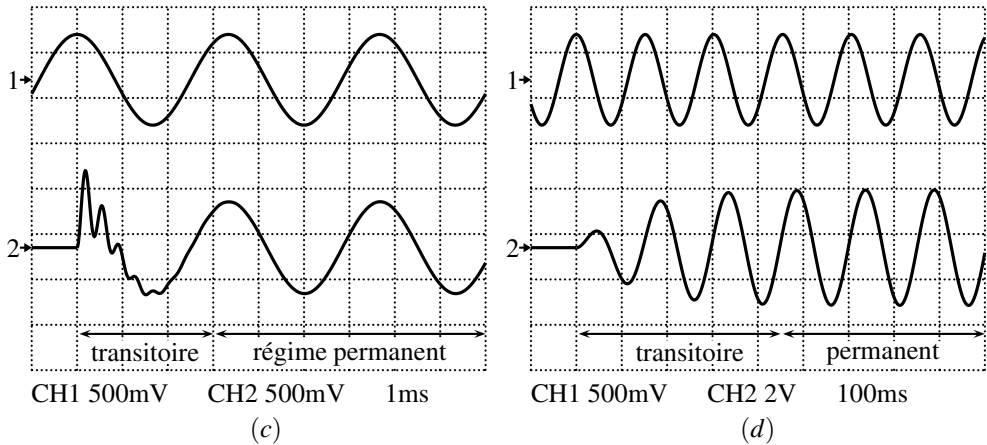


Figure 10.2 – Réponses d'un système du deuxième ordre : (c) Système électrique $f_0 = 2,7 \text{ kHz}$, $\xi = 0,1$, $f = 300 \text{ Hz}$, (d) Système mécanique $f_0 = 7 \text{ Hz}$, $\xi = 0,2$, $f = 6,6 \text{ Hz}$.

Le but de ce chapitre est de développer les outils pour analyser le régime permanent, ou sinusoïdal forcé, qui est le seul à être observé sur un oscilloscope en mode « normal » ou « auto ».

2 Régime permanent ou établi

2.1 Observation à l'oscilloscope

Lorsqu'on visualise un signal sinusoïdal sur un oscilloscope, l'origine des temps, c'est-à-dire la date $t = 0$, n'est pas précisée. On peut décaler cette origine et la placer arbitrairement où l'on veut. La **modélisation** du signal qui en résulte dépend alors de ce choix. Par exemple, sur l'oscillogramme de la figure 10.3, page suivante :

- avec $t = 0$ en 1, alors on modélise le signal $s(t)$ par : $s(t) = S_0 \sin(\omega t)$,
- avec $t = 0$ en 2, $s(t)$ devient : $s(t) = S_0 \cos(\omega t)$.

Les oscilloscopes numériques permettent tous de mesurer les caractéristiques des signaux : amplitude crête à crête (C-C), valeur moyenne, valeur efficace, période, fréquence, durée écoulée entre deux curseurs verticaux, tension entre deux curseurs horizontaux... Cette fonctionnalité est ici utilisée pour afficher directement la fréquence et l'amplitude crête à crête.

L'**amplitude crête à crête** est la différence entre les valeurs maximale et minimale du signal. Elle vaut deux fois l'amplitude S_0 .

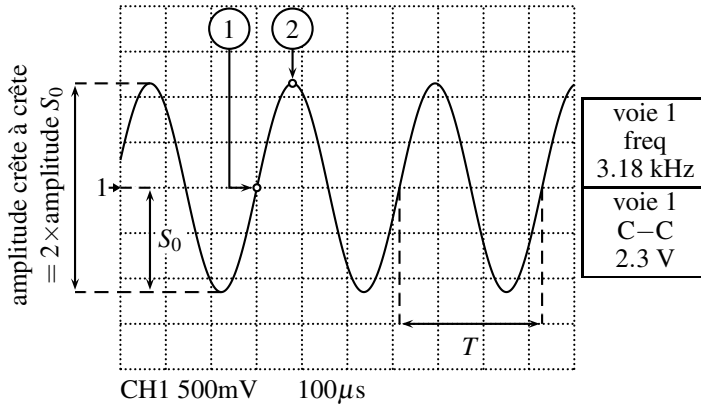


Figure 10.3 – Amplitude, période et modélisation d'un signal sinusoïdal.

2.2 Mesure d'un déphasage

On visualise sur un oscilloscope, pour le circuit RC suivant ($R = 1 \text{ k}\Omega$, $C = 2,2 \text{ }\mu\text{F}$), la tension $e(t)$, sur la voie 1 en gris, et la tension $u_C(t)$, sur la voie 2 en noir. Deux curseurs verticaux marquent les dates successives pour lesquelles les deux tensions passent par 0, avec une pente de même signe, ici positive :

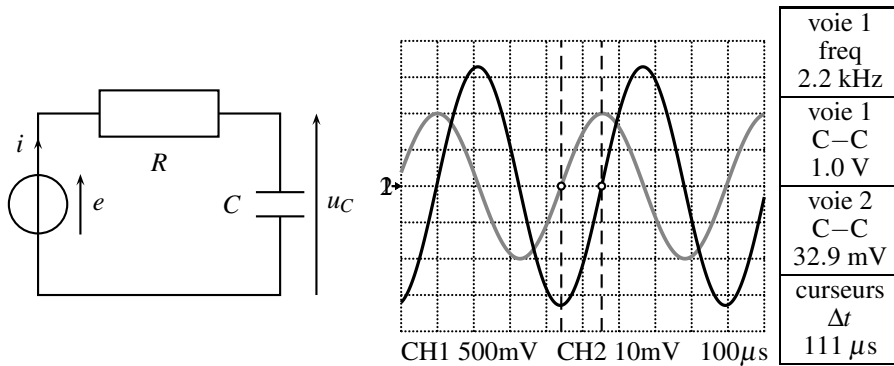


Figure 10.4 – Montage du premier ordre étudié et formes d'ondes des tensions. En gris, la voie 1, en noir, la voie 2.

On observe expérimentalement que :

- la fréquence de sortie est égale à celle d'entrée : c'est une caractéristique du régime permanent sinusoïdal d'un système linéaire,
- les maxima en sortie et en entrée ne se produisent pas pour les mêmes dates : les signaux sont **déphasés**,
- l'amplitude du signal de sortie est différente de celle de l'entrée,
- le déphasage et le rapport des amplitudes dépendent tous deux de la fréquence.

On observe sur l'oscilloscope que $e(t)$, en gris, passe par zéro avant $u_C(t)$, en noir. $e(t)$ est donc en avance sur $u_C(t)$, ou $u_C(t)$ est en retard sur $e(t)$ d'une durée Δt : $u_C(t)$ est **déphasé** par rapport à $e(t)$ d'un **déphasage** $\varphi < 0$.



Pour savoir quel signal est en avance sur quel autre, il faut regarder le passage des deux signaux par zéro, avec une pente de même signe.

Comment mesurer le déphasage φ entre les deux signaux ? Comme on l'a vu au chapitre 1, on le déduit du retard temporel Δt de $u_C(t)$ sur $e(t)$, mesuré par la distance entre les deux curseurs verticaux de l'oscilloscope, par la formule :

$$\varphi = -\omega\Delta t = -2\pi f\Delta t.$$

Exemple

Sur la figure 10.4, on mesure $\Delta t = 111 \mu\text{s}$ ce qui permet de calculer :

$$\varphi = -2\pi \times 2,2 \cdot 10^3 \times 111 \cdot 10^{-6} = -1,53 \text{ rad} = -88^\circ;$$

On modélisera donc les deux signaux par :

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad u_C(t) = U_{C0} \cos(\omega t + \varphi).$$

3 Systèmes du premier ordre

Pour le circuit RC du paragraphe 2.2 précédent, comment prévoir *a priori* le déphasage entre les deux signaux et leur rapport d'amplitude en régime permanent sinusoïdal ? Il existe deux méthodes équivalentes dont la première est vectorielle, celle des **vecteurs de Fresnel**, introduite dans le chapitre 1, et la seconde algébrique.

3.1 Méthode des vecteurs de Fresnel (MPSI)

On a montré au chapitre 8 que, dans ce circuit, la tension $u_C(t)$ est liée à $e(t)$ par l'équation différentielle du premier ordre :

$$u_C(t) + RC \frac{du_C}{dt} = e(t).$$

Pour $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ on cherche ici une solution $u_C(t)$ sinusoïdale qui correspond au régime permanent ou établi.

Pour cela on associe à chaque terme de l'équation un vecteur de Fresnel. Le vecteur de Fresnel \vec{E} , associé à $e(t)$, de norme E_0 , est donc la somme du vecteur de Fresnel \vec{U}_C , associé à $u_C(t)$, de norme U_{C0} et de celui $RC \vec{DU}_C$, associé à $RC \frac{du_C}{dt}$, de norme $RC\omega U_{C0}$ et tourné de $\frac{\pi}{2}$:

$$\vec{U}_C + RC \times \vec{DU}_C = \vec{E}.$$

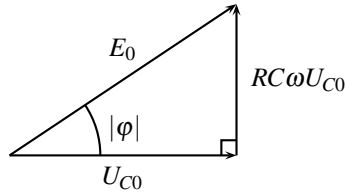


Figure 10.5 – Vecteurs de Fresnel du circuit RC.

On en déduit immédiatement les réponses aux questions posées en introduction :

- la valeur absolue du **déphasage** φ entre les signaux $e(t)$ et $u_C(t)$ se trouve par sa tangente :

$$\tan |\varphi| = \frac{RC\omega U_{C0}}{U_{C0}} = RC\omega.$$

Avec les données numériques du problème, le signal $u_C(t)$ est en retard sur $e(t)$, c'est-à-dire déphasé d'un angle : $\varphi = -\arctan(RC\omega) = -1,54$ rad, ce qui est conforme aux observations expérimentales (le calcul et l'observation expérimentale diffèrent de 0,01 rad, ce qui n'est pas significatif attendu la précision de la mesure).

- le **rapport des amplitudes** des deux tensions résulte du théorème de Pythagore :

$$E_0^2 = U_{C0}^2 + (RC\omega U_{C0})^2 = U_{C0}^2 (1 + (RC\omega)^2),$$

soit :

$$\frac{U_{C0}}{E_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}.$$

Avec les données numériques du problème : $U_{C0} = 32,9$ mV, en accord avec les observations expérimentales.

3.2 Méthode complexe

a) Fondement de la méthode

Au signal harmonique $s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi)$, on associe le **signal complexe** $\underline{s}(t)$:

$$\underline{s}(t) = S_0 \exp(j(\omega t + \varphi)).$$

Dans cette formule, le signal complexe est souligné pour affirmer son appartenance à \mathbb{C} et j est le nombre complexe tel que $j^2 = -1$, noté i en mathématiques, mais qu'on évitera en physique afin de ne pas confondre avec l'intensité du courant. Le lien entre $s(t)$ et $\underline{s}(t)$ est la partie réelle :

$$s(t) = \operatorname{Re}(\underline{s}(t)).$$

Le signal complexe se note aussi :

$$\underline{s}(t) = S_0 \exp(j\varphi) \exp(j\omega t) = \underline{S}_0 \exp(j\omega t),$$

où $\underline{S}_0 = S_0 \exp(j\varphi)$ est l'**amplitude complexe**.

b) Opérations mathématiques

Les combinaisons linéaires de signaux sinusoidaux sont immédiates. Le signal complexe associé à :

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t),$$

est :

$$\underline{s}(t) = \underline{s}_1(t) + \underline{s}_2(t),$$

Le signal complexe associé à la **dérivée** de $s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi)$ est :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} (S_0 \exp(j\omega t)) = j\omega \times S_0 \exp(j\omega t).$$

Dériver un signal complexe revient à le multiplier par $j\omega$.

Le signal complexe associé à une primitive du signal $s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi)$ est :

$$\int \underline{s}(t) dt = \int S_0 \exp(j\omega t) dt = \frac{S_0}{j\omega} \exp(j\omega t).$$

Intégrer un signal complexe revient à le diviser par $j\omega$.

c) Application au circuit RC

L'équation différentielle qui régit l'évolution du circuit étudié est :

$$e(t) = RC \frac{du_C}{dt} + u_C(t).$$

Le signal complexe \underline{e} associé à $e(t)$ est :

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t) \quad \text{donc} \quad \underline{e} = E_0 \exp(j\omega t),$$

(on a arbitrairement choisit un déphasage nul pour $e(t)$, ce qui est toujours possible en décalant l'origine des temps) et \underline{u}_C celui associé à $u_C(t)$:

$$u_C(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{donc} \quad \underline{u}_C = E_0 \exp(j(\omega t + \varphi)).$$

L'équation différentielle devient :

$$\underline{e} = jRC\omega \underline{u}_C + \underline{u}_C = (1 + jRC\omega) \underline{u}_C.$$

On en déduit immédiatement les réponses aux questions posées en introduction.

Le **déphasage** φ entre $e(t)$ et $u_C(t)$ se définit par l'argument de $\underline{e} = (1 + jRC\omega) \underline{u}_C$, qui est :

$$\arg(\underline{e}) = \arg(1 + jRC\omega) + \arg(\underline{u}_C),$$

où :

$$\arg(\underline{e}) = \arg(E_0 \exp(j\omega t)) = \omega t,$$

et :

$$\arg(\underline{u_C}) = \arg(U_{C0} \exp(j(\omega t + \varphi))) = \omega t + \varphi.$$

Quant au complexe $\underline{z} = 1 + jRC\omega$, son argument passe par sa tangente :

$$\tan(\arg(1 + jRC\omega)) = \frac{RC\omega}{1} = RC\omega.$$

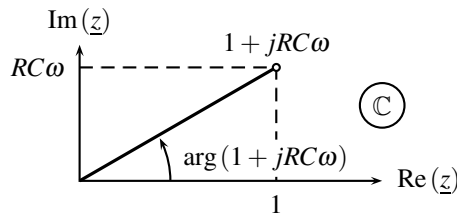


Figure 10.6 – Argument et module du nombre complexe $1 + jRC\omega$.

Finalement :

$$\omega t = \arctan(RC\omega) + \omega t + \varphi \quad \text{et} \quad \varphi = -\arctan(RC\omega).$$

L'angle φ est ici obtenu directement avec son signe, négatif, $u_C(t)$ est donc bien en retard par rapport à $e(t)$.

Le **rapport des amplitudes** des deux tensions passe par un calcul de module :

$$\left| \frac{\underline{u_C}}{\underline{e}} \right| = \left| \frac{U_{C0} \exp(j(\omega t + \varphi))}{E_0 \exp(j\omega t)} \right| = \frac{U_{C0}}{E_0},$$

car le module d'une exponentielle complexe vaut un. Ainsi :

$$\frac{U_{C0}}{E_0} = \left| \frac{\underline{u_C}}{\underline{e}} \right| = \left| \frac{1}{1 + jRC\omega} \right| = \frac{1}{|1 + jRC\omega|}.$$

Et le module du complexe $1 + jRC\omega$ est : $|1 + jRC\omega| = \sqrt{1^2 + (RC\omega)^2}$. Finalement :

$$\frac{U_{C0}}{E_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}.$$

4 Impédance

4.1 Impédance d'un dipôle

En régime permanent sinusoïdal, la relation entre la tension aux bornes d'un dipôle et l'intensité du courant qui le traverse s'exprime, en complexe, d'une manière aussi simple que $u_R = Ri$ pour une résistance.

En régime sinusoïdal permanent à la pulsation ω , imposée par la tension d'alimentation du montage, on définit les tensions et intensités complexes par :

$$\underline{u}(t) = \underline{U}_0 \exp(j\omega t) \quad \text{et} \quad \underline{i}(t) = \underline{I}_0 \exp(j\omega t),$$

où \underline{U}_0 et \underline{I}_0 sont les amplitudes complexes des tension et courant complexes, définies au paragraphe 3.2.

On définit alors l'**impédance** \underline{Z} d'un dipôle par le rapport des signaux complexes $\frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)}$. L'unité de l'impédance est l'ohm (Ω).

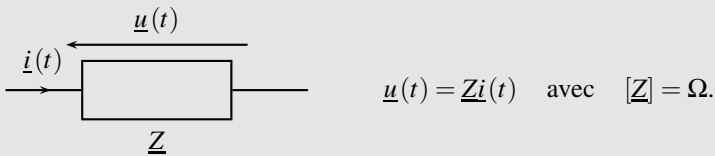


Figure 10.7 – Schéma, définition et unité d'une impédance en convention récepteur.

a) Cas d'une résistance

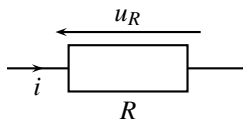


Figure 10.8 – Schéma d'une résistance en convention récepteur.

La loi d'Ohm s'écrit $\underline{u}_R(t) = R\underline{i}(t)$. Immédiatement :

L'impédance, en Ω , d'une résistance est $\underline{Z}_R = R$.

b) Cas d'une bobine

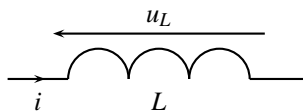


Figure 10.9 – Schéma d'une bobine d'inductance L en convention récepteur.

La relation entre $u_L(t)$ et $i(t)$ est $u_L = L \frac{di}{dt}$. Elle devient pour les signaux complexes :

$$\underline{u}_L = jL\omega \underline{i}.$$

L'impédance, en Ω , d'une bobine d'inductance L est $\underline{Z}_L = jL\omega$.

c) Cas d'un condensateur

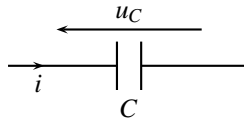


Figure 10.10 – Schéma d'un condensateur de capacité C en convention récepteur.

La relation entre $u_C(t)$ et $i(t)$ est $i = C \frac{du_C}{dt}$. Elle devient pour les signaux complexes :

$$\underline{u}_C = \frac{\underline{i}}{jC\omega}.$$

L'impédance, en Ω , d'un condensateur de capacité C est $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$.

d) Comportements limites d'un condensateur et d'une bobine

Condensateur On considère un condensateur, inséré dans un montage électrique en régime permanent constant. Toutes les tensions y sont constantes, en particulier u_C .

On a alors :

$$i = C \frac{du_C}{dt} = 0.$$

Ou bien, en régime sinusoïdal permanent, avec $\omega = 0$ (une tension de pulsation nulle est bien une tension constante car $\cos(0 \times t) = \text{constante}$) :

$$\underline{u}_C = \frac{\underline{i}}{jC\omega} \quad \text{donc} \quad \underline{i} = j\omega \underline{u}_C = 0.$$

Qu'en est-il en haute fréquence ? $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$ tend vers 0 quand ω tend vers l'infini. On retrouve l'impédance nulle d'un fil parfait, sans résistance.

En « basse fréquence », un condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert.

En « haute fréquence », un condensateur est équivalent à un fil.

Bobine En régime sinusoïdal permanent, $\underline{Z}_L = jL\omega$. Cette impédance tend vers 0 quand ω tend vers 0, comme pour un fil parfait.

$\underline{Z}_L = jL\omega$ diverge quand ω tend vers 0, donc le courant $\underline{i} = \frac{\underline{u}_L}{\underline{Z}_L}$ qui la traverse est nul.

En « basse fréquence », une bobine est équivalente à un fil.

En « haute fréquence », une bobine est équivalente à un interrupteur ouvert.



Une fréquence n'est jamais « haute » ou « basse » en elle-même ; elle est « haute » ou « basse » devant une autre fréquence de référence.

e) Association de deux impédances

La relation qui relie les tensions complexes et les intensités complexes aux bornes d'un dipôle, $\underline{u} = \underline{Z}\underline{i}$, est analogue à la loi d'Ohm pour une résistance $u_R = Ri$. Les lois d'association des impédances sont donc analogues à celle des résistances.

Association en série On envisage le cas d'une association de deux dipôles en série.

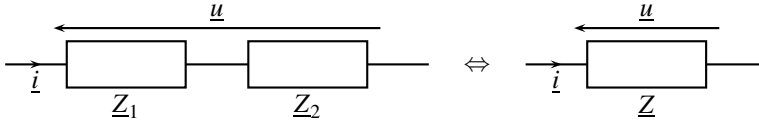


Figure 10.11 – Association d'impédances en série.

Les impédances \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 représentent des résistances, des bobines ou des condensateurs :

$$\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2 = \underline{Z}_1\underline{i} + \underline{Z}_2\underline{i} = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)\underline{i} = \underline{Z}\underline{i},$$

où \underline{Z} est l'impédance équivalente du dipôle série.

Les impédances en série se somment : $\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$.

Association en parallèle (voir figure 10.12)

La tension \underline{u} est la même aux bornes des deux impédances \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 :

$$\underline{u} = \underline{Z}_1\underline{i}_1 = \underline{Z}_2\underline{i}_2.$$

Ainsi : $\underline{i}_1 = \frac{\underline{u}}{\underline{Z}_1}$ et $\underline{i}_2 = \frac{\underline{u}}{\underline{Z}_2}$. La loi des nœuds devient alors :

$$\underline{i} = \underline{i}_1 + \underline{i}_2 = \left(\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} \right) \underline{u} = \frac{1}{\underline{Z}} \underline{u},$$

où \underline{Z} est l'impédance équivalente des deux dipôles en parallèle.

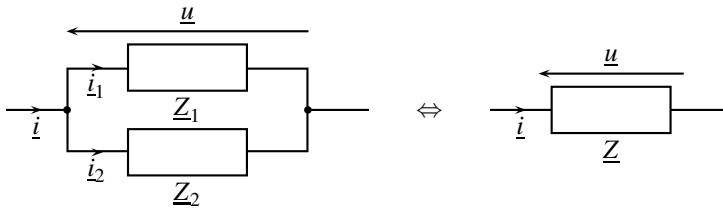


Figure 10.12 – Association d'impédances en parallèle.

L'inverse de l'impédance équivalente à deux impédances \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 en parallèle est la somme des inverses de \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 : $\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}$.

4.2 Diviseur de tension

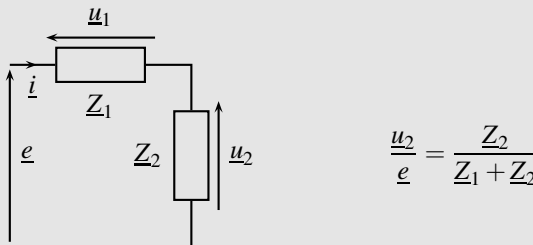


Figure 10.13 – Schéma et formule du diviseur de tension en régime permanent sinusoïdal.

La formule du diviseur de tension est encore valable avec les impédances, avec la même hypothèse d'un courant identique dans les deux dipôles.

Attendu que le courant d'intensité \underline{i} est le même dans les deux impédances \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 :

$$\underline{u}_1 = \underline{Z}_1 \underline{i} \quad \text{et} \quad \underline{u}_2 = \underline{Z}_2 \underline{i}.$$

La loi des mailles s'écrit :

$$\underline{e} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2 = \underline{Z}_1 \underline{i} + \underline{Z}_2 \underline{i} = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \underline{i}.$$

Par élimination de \underline{i} dans les expressions de \underline{e} et \underline{u}_2 :

$$\underline{i} = \frac{\underline{u}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{e}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \quad \text{d'où} \quad \frac{\underline{u}_2}{\underline{e}} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}.$$

5 Résonance dans un système du deuxième ordre

Le circuit étudié dans ce paragraphe est un circuit *RLC* série, avec les valeurs des composants :

$$R = 1,0 \text{ k}\Omega$$

$$L = 20 \text{ mH}$$

$$C = 51 \text{ nF}$$

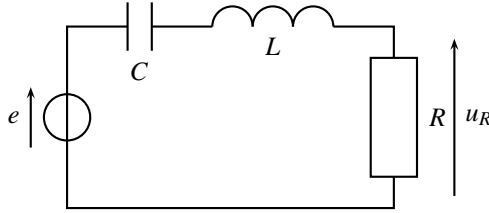


Figure 10.14 – Circuit *RLC* étudié.

5.1 Étude expérimentale de u_R

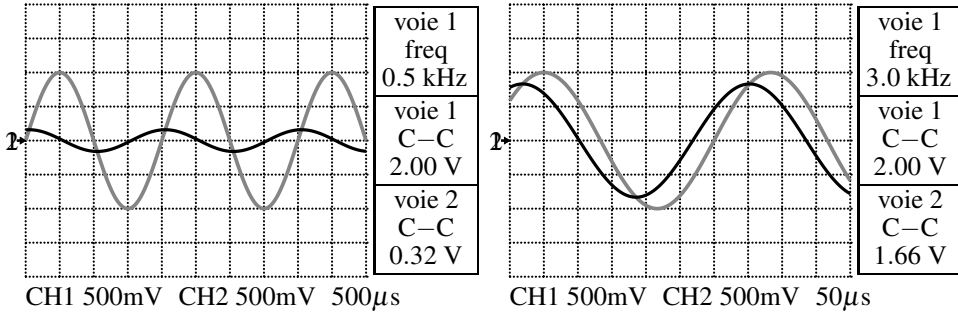


Figure 10.15 – Formes d’onde des tensions e , en gris sur la voie 1, et u_R , en noir sur la voie 2 ($f = 0,5 \text{ kHz}$ et $f = 3,0 \text{ kHz}$).

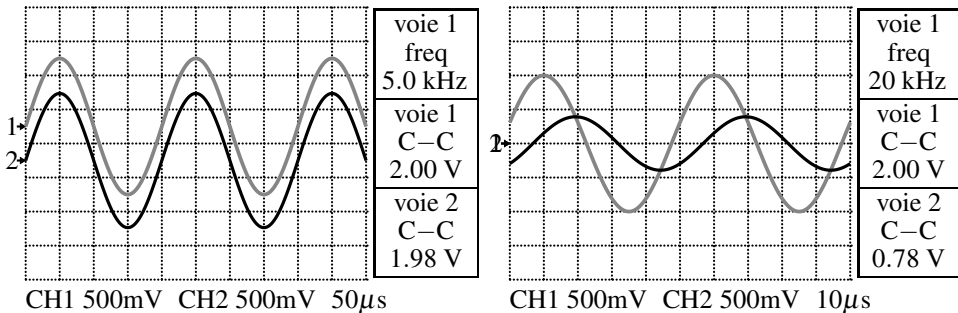


Figure 10.16 – Formes d’onde des tensions e , en gris sur la voie 1, et u_R , en noir sur la voie 2 ($f = 5,0 \text{ kHz}$ et $f = 20 \text{ kHz}$).

La forme d’onde de la tension u_R , aux bornes de la résistance, dépend de la fréquence f du signal d’entrée. On observe que pour $f < 5 \text{ kHz}$, la tension u_R est en avance sur e alors que pour $f > 5 \text{ kHz}$, u_R est en retard ; elles sont en phase en $f = 5 \text{ kHz}$.

De plus, en mode XY de l'oscilloscope, on observe une ellipse pour une fréquence d'alimentation différente de 5 kHz, réduite à une droite lorsque $f = f_0 = 5$ kHz (voir page 38).

L'amplitude de u_R croît lorsqu'on se rapproche de $f = f_0 = 5$ kHz, où elle vaut presque celle de l'entrée ; elle est d'autant plus faible que f est éloigné de f_0 . On visualise ce phénomène en traçant le rapport de l'amplitude U_{R0} de la tension u_R et de son amplitude maximale U_{R0max} en $f = f_0$, en fonction du rapport de la pulsation $\omega = 2\pi f$ à la pulsation $\omega_0 = 2\pi f_0$ (voir figure 10.17). On observe que l'allure de la courbe dépend fortement de la valeur de R , c'est-à-dire

de la valeur du **facteur de qualité** $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$, introduit au chapitre précédent.

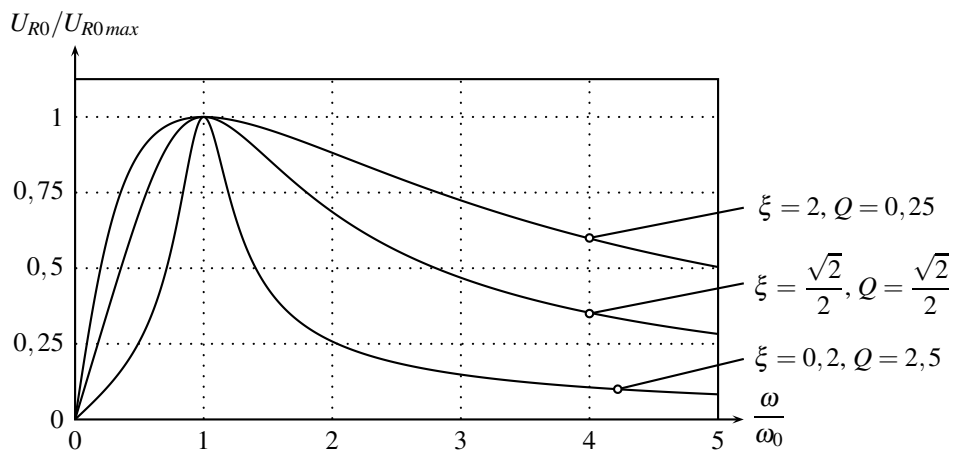


Figure 10.17 – Rapports de l'amplitude de u_R à sa valeur maximale (R variable).

Le passage de l'amplitude de u_R par un maximum est appelé **résonance**. Sur le graphe de la figure 10.17, plus le pic est mince autour de ω_0 , plus la résonance est dite aigüe. L'acuité de la résonance dépend donc de Q ou de ξ .

D'après la loi d'Ohm, l'intensité i du courant qui traverse la résistance est reliée à u_R par $u_R = Ri$. Ainsi, lorsque u_R est maximum, i l'est aussi. La résonance est donc aussi nommée résonance en courant.

Il y a **résonance** quand l'amplitude du signal passe par un maximum pour une certaine pulsation, nommée **pulsation de résonance**.

Remarque

Lors de l'étude de u_R , la pulsation de résonance est $f_0 = 5$ kHz, avec les valeurs numériques des composants précisées en introduction.

5.2 Interprétation

On se propose de calculer l'expression complexe \underline{u}_R avec la formule du diviseur de tension, appliquée au schéma de la figure 10.14 :

$$\frac{\underline{u}_R}{\underline{e}} = \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C} = \frac{R}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + j\left(\frac{L}{R}\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}.$$

Les signaux complexes associés à $u_R(t) = u_{R0} \cos(\omega t + \varphi)$ et $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ sont $\underline{u}_R(t) = U_{R0} \exp(j(\omega t + \varphi))$ et $\underline{e}(t) = E_0 \exp(j\omega t)$. Le module de leur rapport est donc : $\left| \frac{\underline{u}_R}{\underline{e}} \right| = \frac{U_{R0}}{E_0}$. Ainsi, U_{R0} sera-t-il d'autant plus important que ce module sera grand. Le module passe par un maximum quand la partie imaginaire du dénominateur est minimale, c'est-à-dire quand : $\frac{L}{R}\omega - \frac{1}{RC\omega} = 0$, soit en :

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0.$$

Il y a donc résonance en ω_0 . On retrouve la valeur de la pulsation caractéristique d'un système du deuxième ordre, introduite dans le chapitre précédent. On en déduit une méthode expérimentale de mesure de la pulsation caractéristique :

La résonance en courant se produit à la pulsation caractéristique ω_0 du circuit.

De plus, le rapport $\left| \frac{\underline{u}_R}{\underline{e}} \right|$ dépend de la valeur du facteur de qualité Q . Sur le graphe de la figure 10.17, on observe que plus R est faible, à L et C constants, c'est-à-dire plus Q est important, plus la résonance est aigue.

Moins le système est amorti (ξ faible ou $Q = \frac{1}{2\xi}$ important), plus l'acuité de la résonance est forte.

5.3 Complément : interprétation graphique du facteur de qualité

L'affirmation que plus le facteur de qualité Q est important, plus l'acuité de la résonance est importante, c'est-à-dire plus le pic est étroit autour de ω_0 , peut être expérimentalement observée. En effet, les mesures expérimentales, pour plusieurs valeurs de R , donc de Q , mènent systématiquement à :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega},$$

où $\Delta\omega$ est la bande de fréquence indiquée sur la figure 10.18.

On comprend donc que plus Q est grand, plus la bande de fréquence $\Delta\omega$ est faible, c'est-à-dire plus la résonance est aigue.

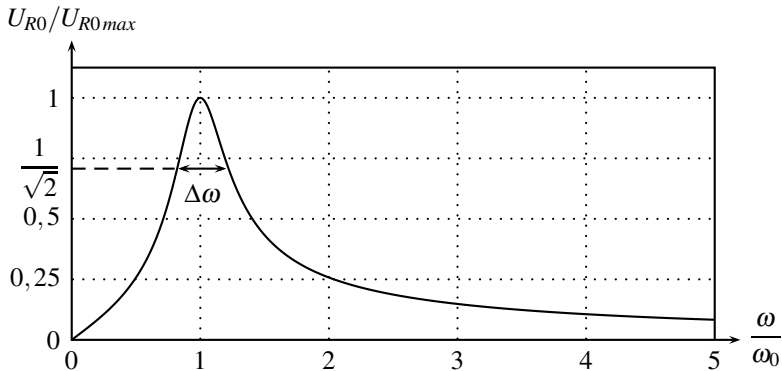


Figure 10.18 – Rapports de l'amplitude de u_R à sa valeur maximale ($Q = 2,5$).

5.4 Remarque expérimentale

À la fréquence de résonance, l'amplitude de la tension u_R ne vaut pas exactement celle du générateur (voir figure 10.16 pour $f = 5$ kHz), mais lui est inférieure. Pour modéliser précisément la réalité expérimentale, il convient de prendre en compte la résistance r de la bobine, qui est alors modélisée par un inductance L en série avec la résistance r .

L'association série du condensateur de capacité C et de l'inductance L est équivalente en

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ à un fil ; en effet : } \underline{Z}_C + \underline{Z}_L = \frac{1}{jC\omega_0} + jL\omega_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}(-j + j) = 0.$$

Le circuit est donc équivalent, à la pulsation de résonance, à un diviseur de tension constitué uniquement des résistances R et r :

$$\frac{u_R}{e} = \frac{R}{R+r} < 1.$$

Avec les valeurs expérimentales de la figure 10.16, on évalue la résistance r de la bobine à :

$$r = R \left(\frac{E_0}{U_{R0}} - 1 \right) = 10 \Omega.$$

5.5 Étude de u_C

On observe expérimentalement que l'amplitude U_{C0} de la tension aux bornes du condensateur dépend de la pulsation ω et donc de la fréquence ($\omega = 2\pi f$) du signal d'entrée, de même pour son déphasage φ . Pour certaines valeurs de f et de ξ , le signal de sortie présente un maximum. C'est le phénomène de **résonance**.

Toutefois, lorsqu'on trace le rapport de l'amplitude U_{C0} de u_C sur l'amplitude E_0 de l'entrée e , en échelles linéaires ou logarithmiques, on observe que le phénomène de résonance n'existe pas toujours.

L'allure des courbes de la figure 10.19 dépend encore de la valeur de ξ , ou de Q . Encore une fois, plus ξ est faible, ou Q grand, plus le phénomène de résonance est marqué.

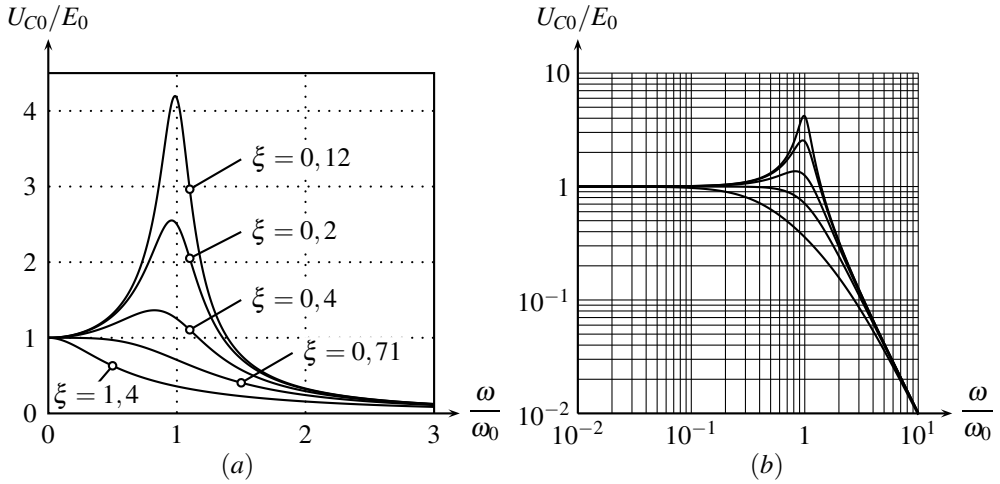


Figure 10.19 – Étude de la résonance aux bornes du condensateur : (a) échelles linéaires, (b) échelles logarithmiques.

La résonance aux bornes du condensateur ne se produit que pour des systèmes faiblement amortis : $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0,71$ ou $Q = \frac{1}{2\xi} > \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0,71$.

Moins le système est amorti (ξ faible ou $Q = \frac{1}{2\xi}$ important), plus l'acuité de la résonance est forte.

L'allure du déphasage φ dépend aussi de ξ , ou de Q , comme le montre la figure 10.20 en échelles semi-logarithmiques où on trace φ en fonction de $\log(\omega/\omega_0)$.

Le déphasage part de 0 pour $\omega \ll \omega_0$, passe par $-\pi/2$ en $\omega = \omega_0$, ce qui est une propriété importante qui permet de mesurer ω_0 , puis converge vers $-\pi$ pour $\omega \gg \omega_0$.

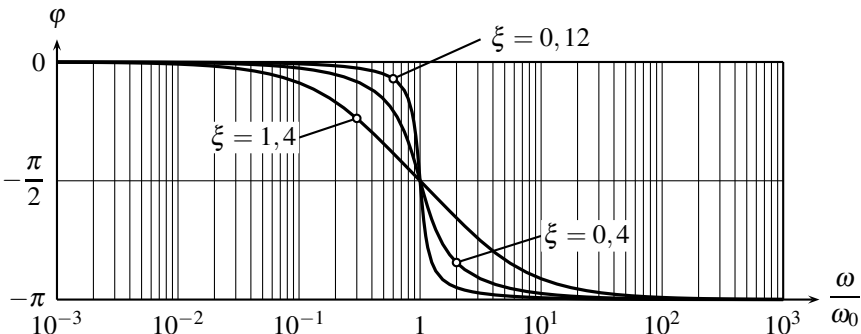


Figure 10.20 – Étude de la phase aux bornes du condensateur.

5.6 Interprétation

Le circuit est modifié afin d'étudier u_C . En effet, il ne peut exister qu'une seule masse dans le circuit. Il convient donc que la masse, imposée par l'alimentation et les moyens d'observation, soit identique pour la mesure de e et celle de u_C .

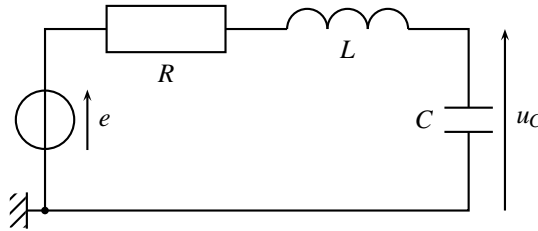


Figure 10.21 – Circuit d'étude de la tension u_C .

La formule du diviseur de tension mène, en notation complexe, à :

$$\frac{u_C}{e} = \frac{Z_C}{Z_C + Z_L + Z_R} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R + jL\omega} = \frac{1}{1 + jRC\omega + LC(j\omega)^2},$$

qui se met sous la forme, avec les notations du chapitre précédent, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$:

$$\frac{u_C}{e} = \frac{1}{1 + 2j\xi \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}.$$

En notant U_{C0} et E_0 les amplitudes des tensions, le module de cette expression est :

$$\left| \frac{u_C}{e} \right| = \frac{U_{C0}}{E_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}.$$

À quelle condition U_{C0} passe-t-elle par un maximum ? Attendu que le numérateur est une constante, l'amplitude est maximale quand le dénominateur est minimum. Il est minimum quand son carré l'est aussi. Avec la variable $X = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$, le carré du dénominateur est :

$$D(X) = (1 - X)^2 + 4\xi^2 X.$$

Un extremum est obtenu quand la dérivée est nulle :

$$\frac{dD}{dX} = -2(1 - X) + 4\xi^2 = 0 \quad \text{implique} \quad X = 1 - 2\xi^2.$$

L'extremum de l'amplitude est alors obtenu pour la pulsation de résonance ω_r :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2} < \omega_0.$$

ω_r n'existe que si $1 - 2\xi^2 > 0$, c'est-à-dire $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$. On retrouve le point fondamental : il ne peut y avoir résonance aux bornes du condensateur que si le système est peu amorti.

5.7 Mesures expérimentales

Comment mesurer ξ (ou Q) et ω_0 à partir de graphes expérimentaux sur la tension u_C ?

a) Coefficient d'amortissement ou facteur de qualité

Si l'on observe une résonance, les coordonnées du maximum renseignent sur la valeur de ξ ou de Q . En effet, la résonance se produit pour la pulsation $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$. L'amplitude S_0 du signal de sortie y vaut :

$$S_0(\omega_r) = \frac{E_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_r^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega_r}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$S_0(\omega_r) = \frac{E_0}{\sqrt{4\xi^4 + 4\xi^2(1 - 2\xi^2)}} = \frac{E_0}{\sqrt{4\xi^2 - 4\xi^4}} = \frac{E_0}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}.$$

La mesure de $S_0(\omega_r)$, alliée à la connaissance de E_0 , mène ainsi à la valeur de ξ donc de $Q = \frac{1}{2\xi}$.

Sans résonance, on ne peut qu'affirmer $Q < \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\xi > \frac{\sqrt{2}}{2}$. Il faut alors déterminer ω_0 avec la méthode du paragraphe suivant, puis extraire la valeur de ξ ou de Q , en partant de la valeur de l'amplitude pour une ou plusieurs pulsations.

b) Pulsation caractéristique

La mesure expérimentale de ω_0 s'effectue très simplement. Pour des systèmes du deuxième ordre, la phase passe par l'angle moitié en ω_0 . On entend par angle moitié la moyenne entre $\varphi(0)$ et $\varphi(\infty)$. La lecture directe de la courbe de phase renseigne immédiatement sur ω_0 .

Il est possible d'utiliser le diagramme d'amplitude pour des résonances très aigües. Dans ce cas, le système est très peu amorti, $\xi \ll 1$ ou $Q \gg 1$ et la résonance a lieu en $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2} \simeq \omega_0$.

Les diagrammes d'amplitude et de phase sont donc complémentaires. L'amplitude permet d'immédiatement voir l'existence d'une résonance et les valeurs de ξ et Q ; la phase la valeur de ω_0 .

6 Fonction de transfert

6.1 Fonction de transfert harmonique

La **fonction de transfert**, ou **transmittance**, d'un système, est le lien entre le signal de sortie $\underline{s}(t)$ et celui d'entrée $\underline{e}(t)$, en régime permanent sinusoïdal à la pulsation ω , imposée par l'entrée :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)}.$$

Si le système étudié est le circuit RC, présenté au paragraphe 2.2 :

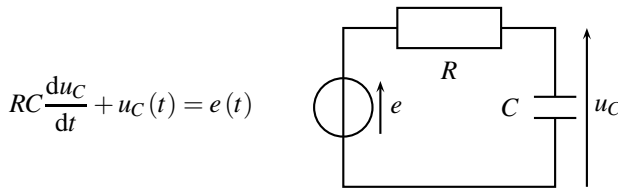


Figure 10.22 – Système du premier ordre étudié et équation différentielle.

l'équation différentielle devient, en régime sinusoïdal permanent :

$$\underline{u}_C(jRC\omega + 1) = \underline{e}.$$

On définit alors la fonction de transfert harmonique $\underline{H}(j\omega)$ par :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_C}{\underline{e}} = \frac{1}{jRC\omega + 1}.$$

L'expression de la transmittance pour le circuit RC peut être facilement établie avec le formalisme des impédances. Avec la formule du diviseur de tension :

$$\frac{\underline{u}_C}{\underline{e}} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{jRC\omega + 1}.$$

On retrouve ainsi très rapidement le lien entre \underline{u}_C et \underline{e} en régime permanent sinusoïdal, sans avoir besoin d'établir préalablement l'équation différentielle.

6.2 Lien entre équation différentielle et transmittance

Le passage de l'équation différentielle à la transmittance a été établi dans un exemple au paragraphe 3.2. L'opération inverse, qui consiste à passer de la transmittance à l'équation différentielle est tout aussi aisée. Par exemple, on cherche à déterminer l'équation différentielle qui relie la tension de sortie $s(t)$ à celle d'entrée $e(t)$ dans le montage suivant :

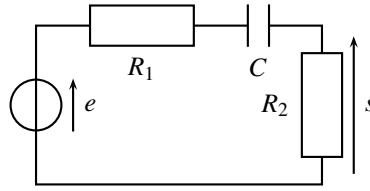


Figure 10.23 – Système du premier ordre étudié.

On se place formellement en régime permanent sinusoïdal pour établir la transmittance. La formule du diviseur de tension mène à :

$$\frac{s}{e} = \frac{Z_{R2}}{Z_{R1} + Z_C + Z_{R2}} = \frac{R_2}{R_1 + \frac{1}{jC\omega} + R_2} = \frac{jR_2C\omega}{jR_1C\omega + 1 + jR_2C\omega} = \frac{jR_2C\omega}{1 + j(R_1 + R_2)C\omega}$$

Le résultat est présenté sous la forme d'un polynôme en $j\omega$ au numérateur, sur un polynôme en $j\omega$ au dénominateur afin d'écrire simplement le lien entre e et s :

$$j(R_1 + R_2)C\omega s + s = jR_2C\omega e$$

Puis on utilise la correspondance entre $j\omega$ et la dérivée d'un signal en régime permanent sinusoïdal :

$$j\omega s \leftrightarrow \frac{ds}{dt} \quad \text{et} \quad (j\omega)^2 s \leftrightarrow \frac{d^2s}{dt^2}$$

Ainsi :

$$(R_1 + R_2)C \frac{ds}{dt} + s = R_2C \frac{de}{dt}$$

6.3 Lien avec la transmittance de Laplace

On définit dans le cours de SII une fonction de transfert, issu d'une transformation intégrale nommée transformée de Laplace. Cette opération ne relève pas du présent cours, mais l'identité des résultats doit être soulignée. Sur l'exemple du paragraphe précédent :

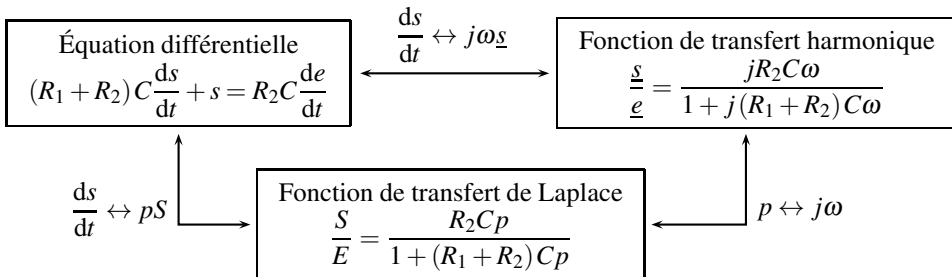


Figure 10.24 – Liens entre équation différentielle, transmittance harmonique et transmittance de Laplace.

Remarque

L'équivalence entre la dérivée et la transformée de Laplace est $\frac{ds}{dt} \leftrightarrow pS(p) - s(0^+)$.
L'usage est toutefois de considérer les conditions initiales nulles pour écrire la transmittance.

7 Complément : déphasage et rapport des amplitudes dans un système du deuxième ordre

7.1 Position du problème

On étudie le circuit RLC (voir figure 10.25) décrit par les valeurs de ses composants :

$$R = 1,0 \text{ k}\Omega, \quad L = 20 \text{ mH} \quad \text{et} \quad C = 51 \text{ nF},$$

ou ses paramètres canoniques :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi \times 5,0 \cdot 10^3 \text{ rad.s}^{-1} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = 0,80.$$

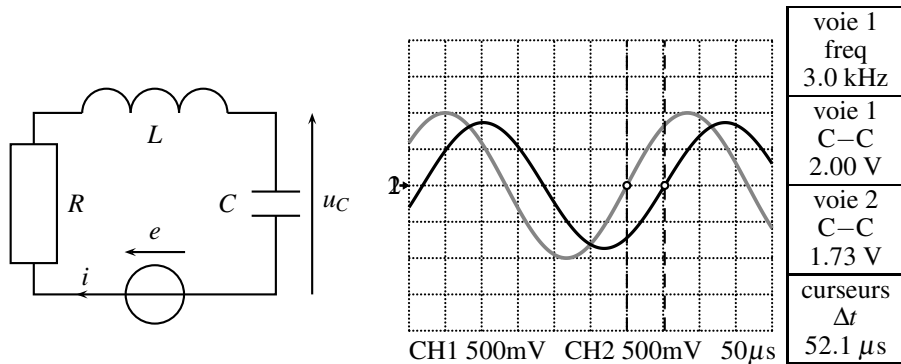


Figure 10.25 – Montage du deuxième ordre étudié et formes d'ondes des tensions.
En gris, la voie 1, en noir, la voie 2.

La tension $e(t)$, sur la voie 1 en gris, et la tension $u_C(t)$, sur la voie 2 en noir. Deux curseurs verticaux marquent les dates successives pour lesquelles les deux tensions passent par 0 avec des pentes de même signe, afin de mesurer le déphasage entre les signaux.

La tension $u_C(t)$ est en retard sur $e(t)$. Les curseurs nous permettent de définir le déphasage entre les deux tensions :

$$\varphi = 2\pi \frac{\Delta t}{T} = 2\pi f \Delta t = 0,98 \text{ rad} = 56,3^\circ.$$

7.2 Méthode des vecteurs de Fresnel (MPSI)

On cherche à prévoir *a priori* le déphasage entre les deux signaux $e(t)$ et $u_C(t)$ ainsi que le rapport de leurs amplitudes en régime permanent sinusoïdal. L'équation différentielle, liant $e(t)$ à $u_C(t)$, qui régit l'évolution du circuit est :

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C(t) = e(t),$$

ou, sous forme canonique :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{du_C}{dt} + u_C(t) = e(t).$$

On associe au signal $u_C(t)$ le vecteur de Fresnel \vec{U}_C , de norme U_{C0} , à sa dérivée $\frac{du_C}{dt}$, le vecteur \overrightarrow{DU}_C de norme ωU_{C0} , tourné de $\frac{\pi}{2}$ et à sa dérivée seconde $\frac{d^2 u_C}{dt^2}$, le vecteur $\overrightarrow{D_2U}_C$, de norme $\omega \times \omega U_{C0}$, tourné de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à \overrightarrow{DU}_C , c'est-à-dire de π par rapport à \vec{U}_C . L'équation différentielle du système se résume alors à :

$$LC \times \overrightarrow{D_2U}_C + RC \times \overrightarrow{DU}_C + \vec{U}_C = \vec{E}.$$

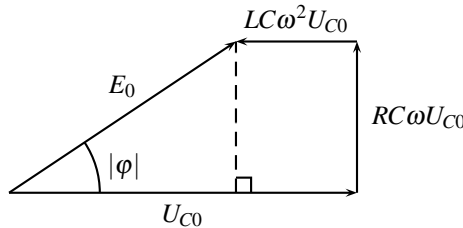


Figure 10.26 – Vecteurs de Fresnel du circuit RLC.

Remarque : avec les valeurs numériques, $LC\omega^2 = 0,36 < 1$, donc le vecteur de Fresnel $\overrightarrow{D_2U}_C$, associé à $\frac{d^2 u_C}{dt^2}$, est de norme inférieure à celle de \vec{U}_C , comme sur le schéma.

On en déduit, dans le triangle rectangle :

- la valeur absolue du **déphasage** entre les tensions $e(t)$ et $u_C(t)$:

$$\tan |\varphi| = \frac{RC\omega U_{C0}}{U_{C0} - LC\omega^2 U_{C0}} = \frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2}.$$

$u_C(t)$ est en retard sur $e(t)$ de $|\varphi| = 0,985 \text{ rad} = 56,4^\circ$. L'écart de $0,1^\circ$ avec l'expérience n'est pas significatif attendu la précision des mesures.

- le **rapport des amplitudes** avec le théorème de Pythagore :

$$E_0^2 = (U_{C0} - LC\omega^2 U_{C0})^2 + (RC\omega U_{C0})^2,$$

soit :

$$\frac{U_{C0}}{E_0} = \frac{1}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}}.$$

$\frac{U_{C0}}{E_0} = 0,87$, ce que confirme les relevés expérimentaux.

7.3 Méthode complexe

Le signal complexe \underline{u}_C associé à $u_C(t) = U_{C0} \cos(\omega t + \varphi)$ est :

$$\underline{u}_C = U_{C0} \exp(j\varphi) \exp(j\omega t) = \underline{U}_{C0} \exp(j\omega t).$$

Le signal complexe associé à la dérivée seconde est alors $(j\omega)^2 \underline{u}_C$:

$$\frac{d^2 \underline{u}_C}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} (\underline{U}_{C0} \exp(j\omega t)) = (j\omega)^2 \underline{U}_{C0} \exp(j\omega t) = (j\omega)^2 \underline{u}_C.$$

Ainsi, l'équation différentielle $LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C(t) = e(t)$ devient :

$$LC(j\omega)^2 \underline{u}_C + RC(j\omega) \underline{u}_C + \underline{u}_C = \underline{e},$$

soit :

$$\underline{u}_C = \frac{\underline{e}}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}.$$

Cette dernière relation aurait pu être obtenue avec la formule du diviseur de tension. Elle permet de calculer le déphasage et le rapport des amplitudes entre $u_C(t)$ et $e(t)$. Encore une fois, on choisit arbitrairement un déphasage nul pour $e(t)$, possible en décalant l'origine des temps. Les signaux complexes sont alors :

$$\begin{cases} e(t) = E_0 \cos(\omega t) & \text{donc } \underline{e} = E_0 \exp(j\omega t), \\ u_C(t) = U_{C0} \cos(\omega t + \varphi) & \text{donc } \underline{u}_C = U_{C0} \exp(j(\omega t + \varphi)). \end{cases}$$

On en déduit :

- le **déphasage** entre les tension $e(t)$ et $u_C(t)$ via l'argument :

$$\arg(\underline{u}_C) = \arg(\underline{e}) - \arg(1 - LC\omega^2 + jRC\omega).$$

Ainsi :

$$\omega t + \varphi = \omega t - \arctan\left(\frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2}\right),$$

et :

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2}\right).$$

- le **rapport des amplitudes** *via* le module :

$$|\underline{u}_C| = \left| \frac{\underline{e}}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} \right| = \frac{|\underline{e}|}{|1 - LC\omega^2 + jRC\omega|}.$$

Ainsi :

$$U_{C0} = \frac{E_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}}.$$

Ces résultats sont identiques à ceux de la méthode des vecteurs de Fresnel.

SYNTHÈSE

SAVOIRS

- notion de résonance
- impédance d'une résistance, d'une bobine et d'un condensateur
- influence de Q ou de ξ sur la résonance

SAVOIR-FAIRE

- mesurer un déphasage et un rapport d'amplitude entre deux signaux
- utiliser la construction de Fresnel pour étudier le régime permanent sinusoïdal (MPSI)
- utiliser les complexes pour étudier le régime permanent sinusoïdal
- relier l'existence et l'acuité de la résonance d'un deuxième ordre à ξ ou Q
- déterminer ω_0 , ξ et Q à partir de graphes d'amplitude et de phase
- établir l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine, en régime harmonique
- calculer une impédance équivalente pour une association série ou parallèle

MOTS-CLÉS

- | | | |
|-------------------------------|--------------------------|-----------------------------|
| • régime permanent sinusoïdal | • facteur de qualité Q | • méthode de Fresnel (MPSI) |
| • résonance | • impédance | |
| | • fonction de transfert | |