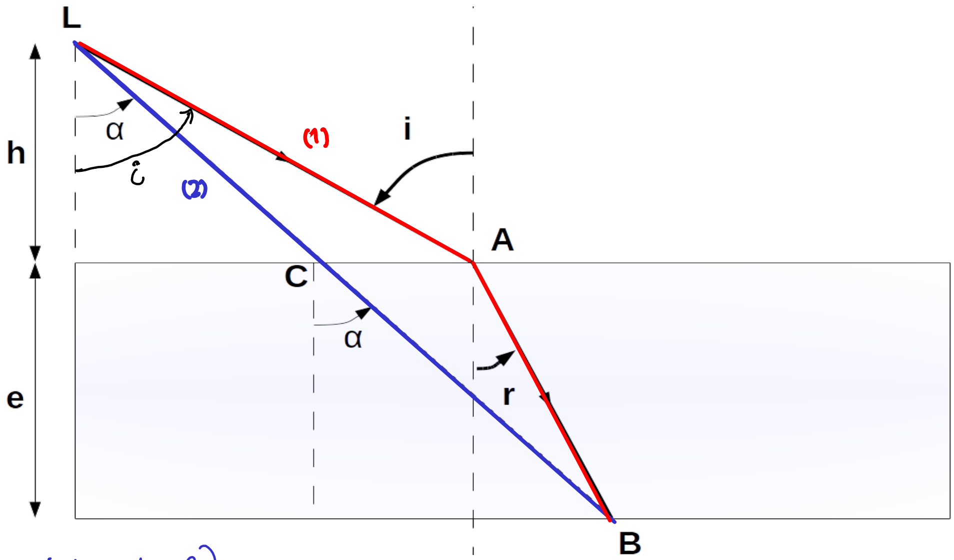
TD S5 - Corrigé

S1- Illustration du principe de Fermat



1. Durée du trajet (LCB)

$\Delta t_1 = \Delta t_{1,LC} + \Delta t_{1,CB}$ avec $\Delta t_{1,LC} = \dfrac{LC}{c_0}$ et $\Delta t_{1,CB} = \dfrac{CB}{c_0/n} = \dfrac{n\,CB}{c_0}$

où $CB = \dfrac{e}{\cos\alpha}$

et $\cos\alpha = \dfrac{h}{LC}$

ce qui donne $\Delta t_{1,CB} = \dfrac{n\,LC}{c_0\,h}\,e$

$$\boxed{\Delta t_1 = \frac{LC}{c_0}\left(1 + n\frac{e}{h}\right)}$$

A.N. : $c_0 = 3{,}0 \times 10^8$ m.s-1
$LC = 8 \times 10^{-2}$ m
$e = 6 \times 10^{-2}$ m
$h = 5 \times 10^{-2}$ m
$n = 1{,}5$

$\Delta t_1 = 74{,}7$ ms

2. Durée du trajet (LAB)

$\Delta t_2 = \Delta t_{2,LA} + \Delta t_{2,AB}$

avec $\Delta t_{2,LA} = \dfrac{LA}{c_0}$ où $LA = \dfrac{h}{\cos i}$ ce qui donne $\Delta t_{2,LA} = \dfrac{h}{c_0 \cos i}$

avec $\Delta t_{2,AB} = \dfrac{AB}{c_0/n} = \dfrac{n\,AB}{c_0}$

où $AB = \dfrac{e}{\cos r}$

et $\cos r = \sqrt{1 - \sin^2 r}$

avec $n \sin r = \sin i \Rightarrow \sin^2 r = \dfrac{\sin^2 i}{n^2}$

$\Longrightarrow \cos r = \sqrt{1 - \dfrac{\sin^2 i}{n^2}}$

d'où $AB = \dfrac{e}{\sqrt{1 - \dfrac{\sin^2 i}{n^2}}}$

$$\Delta t_{2,AB} = \frac{n\,e}{c_0\sqrt{1 - \dfrac{\sin^2 i}{n^2}}}$$

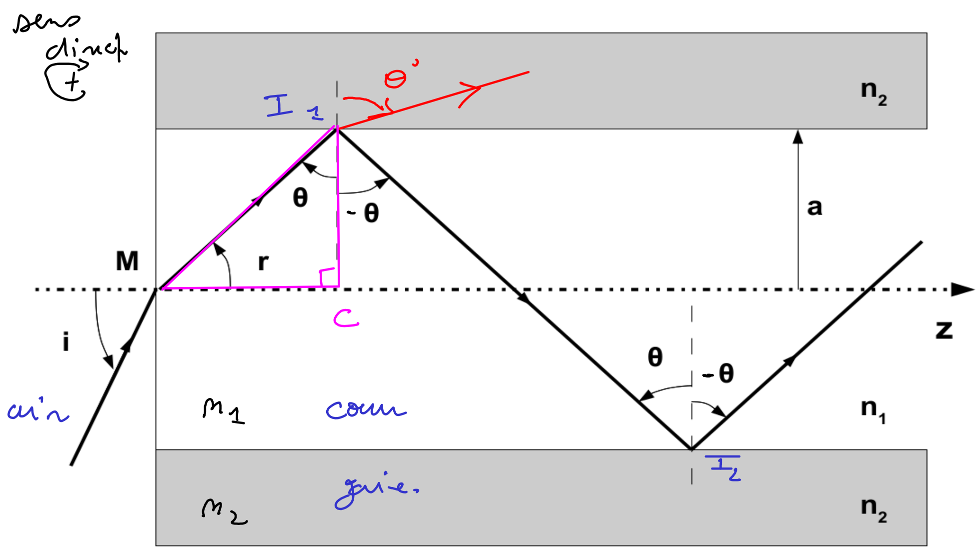
$$\boxed{\Delta t_2 = \frac{1}{c_0}\left(\frac{h}{\cos i} + \frac{n e}{\sqrt{1 - \dfrac{\sin^2 i}{n^2}}}\right)}$$

A.N. : $c_0 = 3{,}0 \times 10^8$ m.s-1
$LC = 8 \times 10^{-2}$ m
$e = 6 \times 10^{-2}$ m
$h = 5 \times 10^{-2}$ m
$n = 1{,}5$
$i = 60°$

$\Delta t_2 = 7{,}0$ ms.

3. $\Delta t_2 < \Delta t_1$ conformément au principe de Fermat.

S2 - Fibre optique



1/ Guidage de la lumière si il y a réflexion totale au point I_i $\Leftrightarrow$ réflexion totale en I_1.

Condition de réflexion totale en I_1 ?

Condition d'existence d'un rayon réfracté ?

$\exists$ rayon réfracté $\Leftrightarrow \theta' \leq \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow \sin\theta' \leq 1 \quad (*)$

avec $n_1 \sin\theta = n_2 \sin\theta' \Leftrightarrow \sin\theta' = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta$

d'où :

$$(*) \Leftrightarrow \frac{n_1}{n_2}\sin\theta \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\theta \leq \frac{n_2}{n_1}$$

Réflexion totale $\Leftrightarrow$ $\boxed{\sin\theta > \frac{n_2}{n_1}.}$

soit en posant $\sin\theta_L = \frac{n_2}{n_1}$ soit $\theta_L = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$

$\boxed{\theta \geq \theta_L}$ A.N. $\theta_L = 75{,}6°$

2/ Condition de réflexion sur i ?

$\theta \geq \theta_L$, ou $\sin\theta > \frac{n_2}{n_1}$ (*)

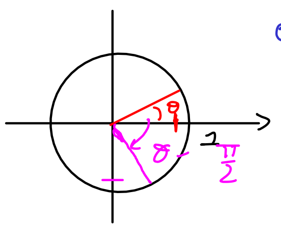
Exprimons θ en fct° de i.

Dans le triangle MI_1C :

$$\theta + \frac{\pi}{2} - r = \pi \qquad (⚠ \; r < 0 \,!)$$

$$\Leftrightarrow r = \theta - \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

Relions r à i → loi de Descartes en M (interface air/gaine)



$$1 \times \sin i = n_1 \sin r$$

avec (1) $\Rightarrow \sin r = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\theta$

D'où : $\cos\theta = -\frac{1}{n_1} \times \sin i$ (2)

(2) $\Rightarrow \cos^2\theta = \dfrac{\sin^2 i}{n_1^2}$ avec $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

$\Leftrightarrow 1 - \sin^2\theta = \dfrac{\sin^2 i}{n_1^2}$

$\Leftrightarrow \sin\theta = \sqrt{1 - \dfrac{\sin^2 i}{n_1^2}}$

Dans (*) :

$$\sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n_1^2}} \geq \frac{n_2}{n_1}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{\sin^2 i}{n_1^2} \geq \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2$$

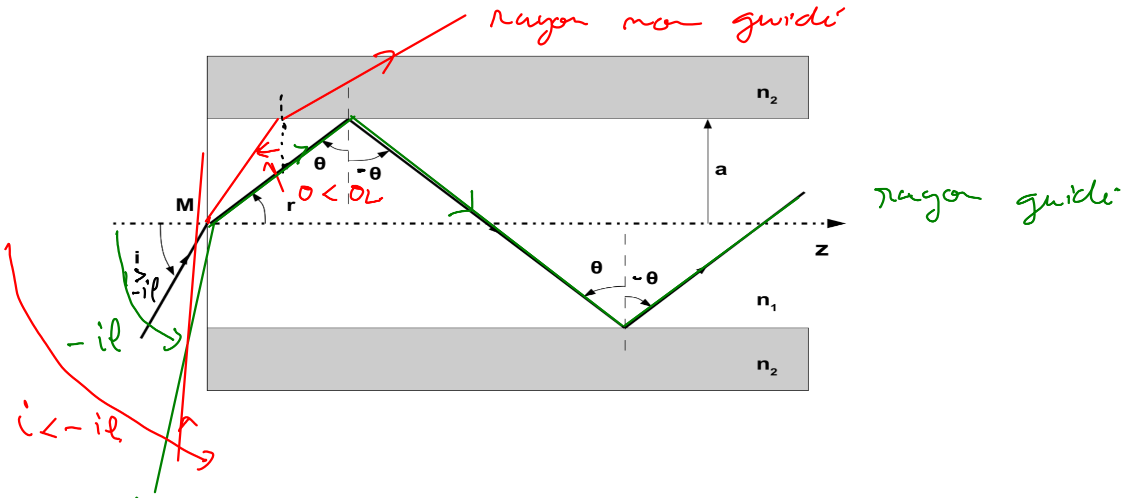
$$\Leftrightarrow n_1^2 - \sin^2 i \geq n_2^2$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 i \leq n_1^2 - n_2^2.$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{n_1^2 - n_2^2} \leq \sin i \leq \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

On pose $\boxed{i_\ell = \arcsin\left(\sqrt{n_1^2 - n_2^2}\right)}$

$$\Leftrightarrow \boxed{-i_\ell \leq i \leq i_\ell}$$



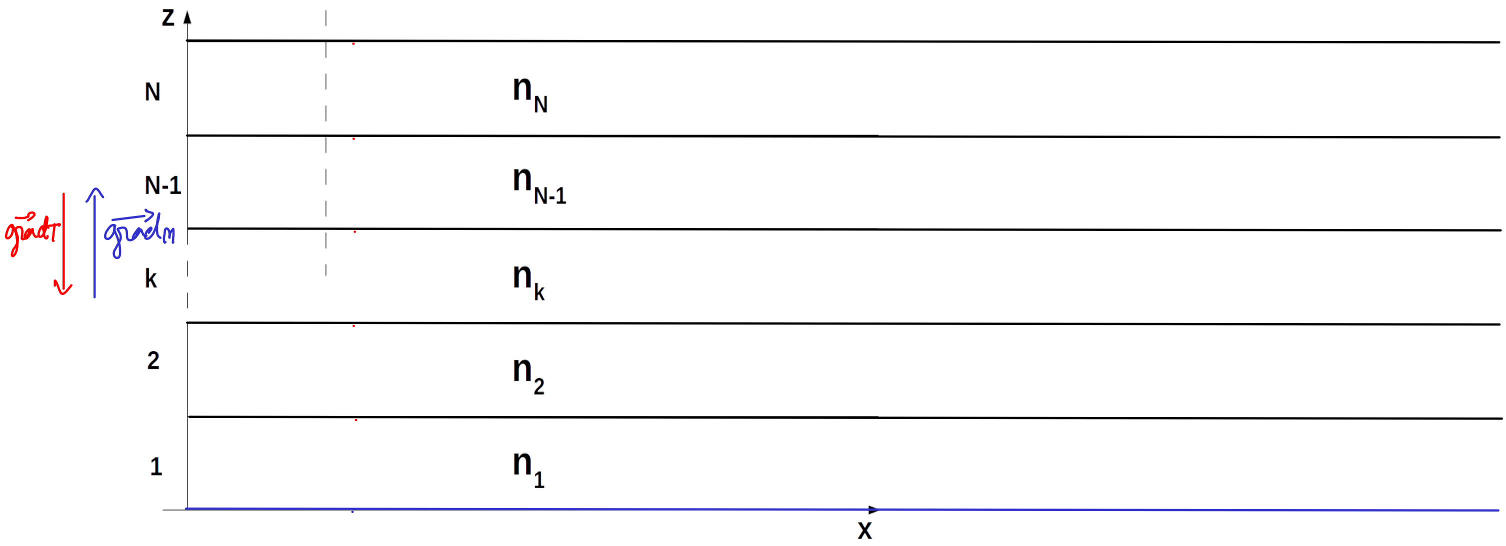
⚠ $i < 0$

A.N. $i_\ell = 22°$

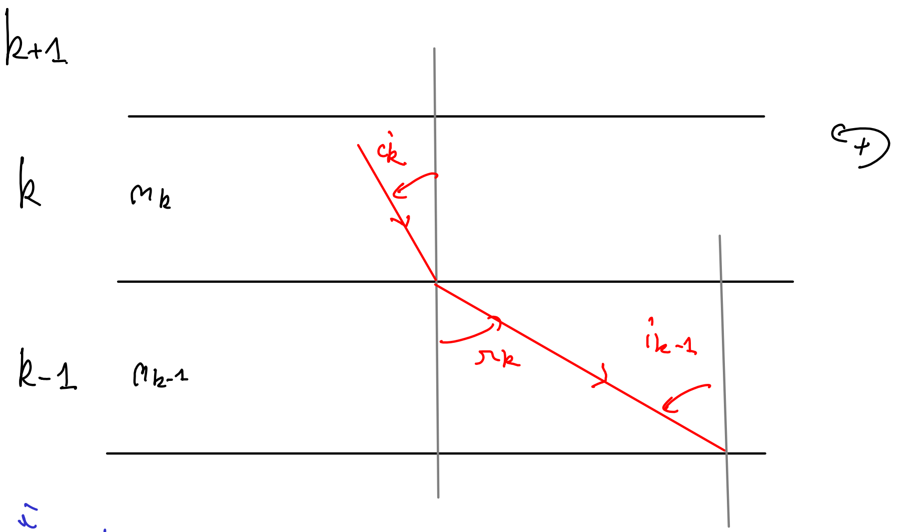
3./ Ouverture numérique de la fibre :

$$N = \sin i_\ell = 0{,}38$$

S3 - Mirage



1/



4ᵉ loi de Descartes à l'interface entre les couche k, k-1 :

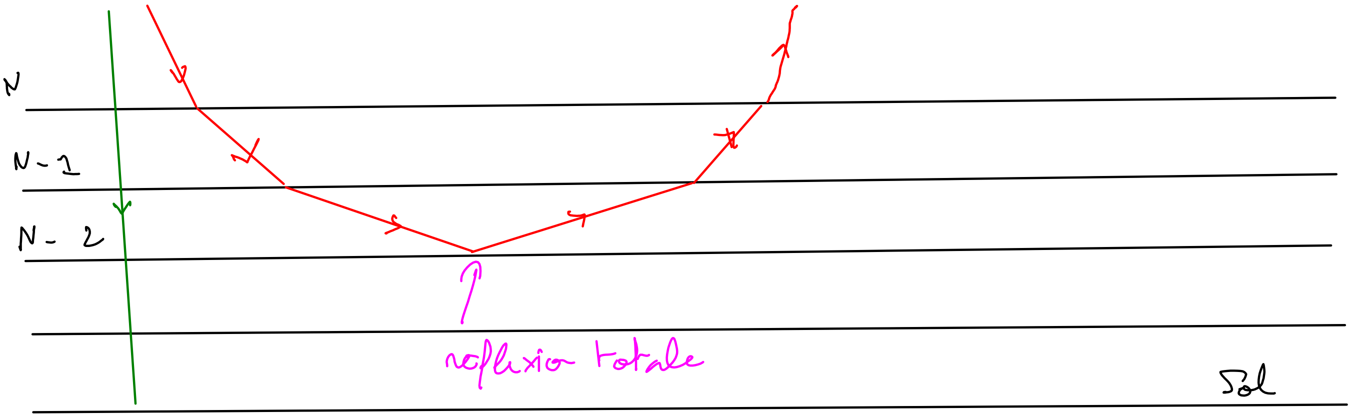
$$\forall k,\ n_k \sin i_k = n_{k-1} \sin r_k.$$

or $\forall k,\ r_k = i_{k-1}$

d'où $\forall k,\ n_k \sin i_k = n_{k-1} \sin i_{k-1}$

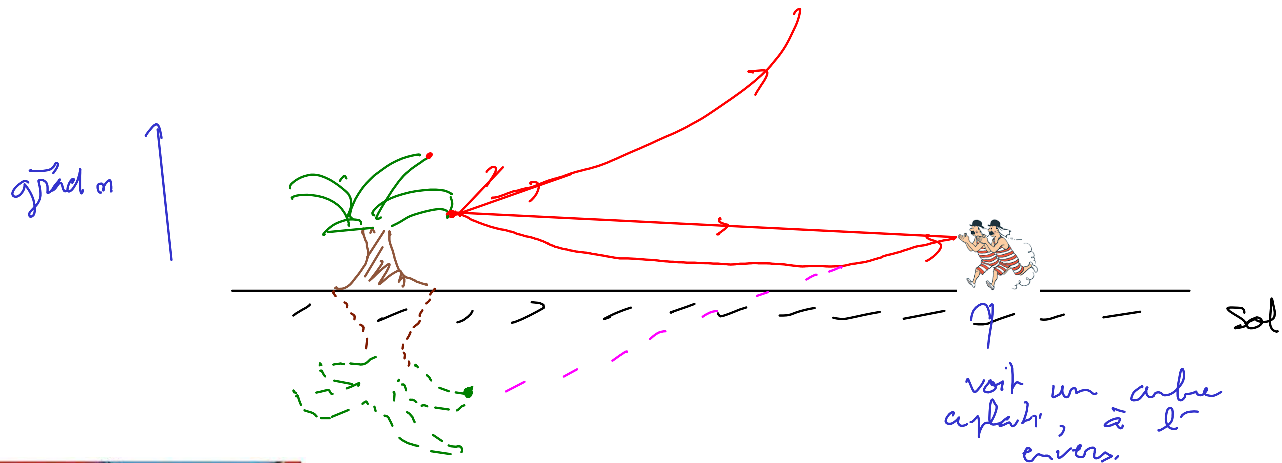
$$\Leftrightarrow \boxed{n_k \sin i_k = cste. > 0}$$

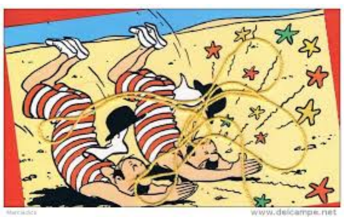
2. Qd $k \searrow$, $n_k \searrow$ donc $\sin i_k = \dfrac{cste}{n_k} \nearrow$ (cste > 0)
et comme $i_k \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $\sin i_k$ fct° $\nearrow$ de i_k donc $i_k \nearrow$



3./

4./





Scientifiquement, ça peut se produire :) !

Cerveau : interprétation comme le reflet d'un arbre par une étendue d'eau.

4. Mirage froid