

Tout signal physique est décomposable en une somme de signaux sinusoïdaux : c'est le point de départ de l'analyse de Fourier qui justifie l'importance de l'étude des réponses en régime permanent sinusoïdal. En utilisant les méthodes introduites dans les précédents chapitres, en découlent la notion de filtrage d'un signal par un système, ainsi que celle de l'adaptation d'un système en vue de satisfaire à un cahier des charges.

1 Réponse d'un système linéaire en régime permanent

1.1 Légitimité de l'étude harmonique

L'étude de la réponse d'un système à un signal sinusoïdal est récurrente. Or tous les signaux ne sont pas sinusoïdaux. Est-ce alors une perte de généralité ? Non, car les signaux sinusoïdaux sont les briques élémentaires avec lesquelles on fabrique n'importe quel autre signal, périodique ou non (les signaux apériodiques peuvent être étudiés par des sommes continues de sinusoïdes, nommées intégrales de Fourier). On étudie donc la réponse d'un système à une de ces briques élémentaires pour ensuite sommer les réponses.

1.2 Cadre de l'étude

Un système est un dispositif qui traite un ou plusieurs signaux d'entrée afin de réaliser la fonction voulue par son concepteur ; le système produit ainsi à son tour un ou plusieurs signaux de sortie. Par exemple, un téléphone portable est une suite de systèmes qui accomplissent successivement la transformation d'un signal sonore, la voix, en un signal électrique ; la numérisation du signal électrique en un autre signal électrique ; le codage du signal numérisé en un signal, toujours électrique, constitué de niveaux logiques ; finalement son émission, c'est-à-dire la transformation du signal électrique codé en un signal électromagnétique.

Les systèmes étudiés sont des **systèmes linéaires** : la réponse à une combinaison linéaire d'entrées est la combinaison linéaire des sorties associées à chaque entrée. Par exemple, si une personne A parle dans un téléphone, le récepteur entend A . Il entend de même B si B parle dans le même téléphone. Et si A et B sont côte à côte et parlent tous les deux en même temps, alors le récepteur entend les voix de A et de B . Ceci se formalise de la manière suivante :

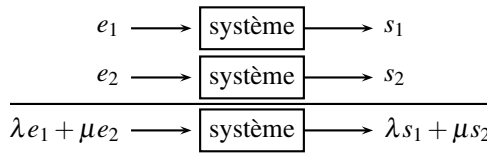


Figure 12.1 – Linéarité d'un système.

Les systèmes étudiés sont aussi **invariants dans le temps** : leurs propriétés ne changent pas au cours du temps. Ce n'est le cas qu'approximativement, car tous les systèmes vieillissent et doivent être remplacés lorsque leurs propriétés se sont dégradées. Ils restent toutefois invariants pendant une longue durée, leur durée de vie.

Les systèmes linéaires et invariants dans le temps sont souvent indiqués par leur acronyme anglais **LTI systems**, pour *linear time-invariant systems*.

1.3 Entrée sinusoïdale

On considère un système *RC* du premier ordre, alimenté par une entrée sinusoïdale $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$, dont le déphasage est pris nul par un choix convenable de l'origine des temps. Le signal complexe associé à $e(t)$ est $\underline{e}(t)$:

$$\underline{e}(t) = E_0 \exp(j\omega t) \quad \text{ainsi} \quad e(t) = \text{Re}(\underline{e}(t)).$$

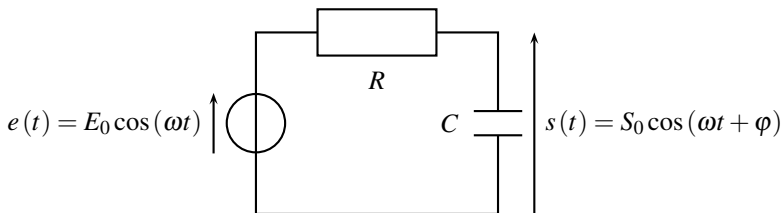


Figure 12.2 – Système du premier ordre étudié.

La fonction de transfert du système *RC*, en régime permanent sinusoïdal, a été vue dans les deux chapitres précédents :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j\tau\omega},$$

avec $\tau = RC$. Quelle est l'expression de la sortie $s(t)$ du système en régime permanent sinusoïdal ? On cherche d'abord le signal complexe $\underline{s}(t)$:

$$\underline{s}(t) = \underline{H}(j\omega) \times \underline{e}(t) = \frac{1}{1 + j\tau\omega} E_0 \exp(j\omega t).$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\omega \text{ identiques}}$



Le signal d'entrée oscille à la pulsation ω . Le système réagit linéaire donc à cette même pulsation ω . C'est donc la même pulsation ω qui apparaît dans $\exp(j\omega t)$, qui décrit $e(t)$ et dans $\underline{H}(j\omega)$, qui décrit le système.

Afin d'établir l'amplitude de $s(t)$ et son déphasage par rapport à $e(t)$, il faut écrire $\underline{s}(t)$ sous forme module $\times \exp(j \arg)$. De même pour la transmittance :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+j\tau\omega} &= \left| \frac{1}{1+j\tau\omega} \right| \exp(j(\arg(1) - \arg(1+j\tau\omega))) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}} \exp(-j \arctan(\tau\omega)). \end{aligned}$$

Dès lors :

$$\underline{s}(t) = \frac{E_0}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}} \exp(j(\omega t - \arctan(\tau\omega))).$$

En prenant la partie réelle de $\underline{s}(t)$:

$$s(t) = \frac{E_0}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}} \cos(\omega t - \arctan(\tau\omega)).$$

Pour un signal d'entrée sinusoïdal, le signal de sortie est sinusoïdal de même pulsation ω ; on utilise $\underline{H}(j\omega)$ pour le calculer.

1.4 Entrée combinaison linéaire de fonctions sinusoïdales

Si l'entrée du système RC se compose maintenant de deux fonctions sinusoïdales de pulsations différentes, ω_1 et ω_2 :

$$e(t) = E_1 \cos(\omega_1 t) + E_2 \cos(\omega_2 t),$$

que vaut la sortie $s(t)$ en régime sinusoïdal permanent ?

La méthode est simple : l'entrée est la superposition de deux entrées, $e_1(t) = E_1 \cos(\omega_1 t)$ et $e_2(t) = E_2 \cos(\omega_2 t)$. $e_1(t)$ seul impose une sortie $s_1(t)$, $e_2(t)$ seul impose une sortie $s_2(t)$. Par linéarité, la sortie est alors la superposition des deux sorties :

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t).$$

Que vaut $s_1(t)$? L'entrée $e_1(t)$ oscille à la pulsation ω_1 , le système réagit donc à cette même pulsation ω_1 et la sortie $s_1(t)$ oscille en régime sinusoïdal permanent à ω_1 . Le calcul est identique à celui du paragraphe précédent :

$$s_1(t) = \frac{E_1}{\sqrt{1+(\tau\omega_1)^2}} \cos(\omega_1 t - \arctan(\tau\omega_1)).$$

De même pour $s_2(t)$, qui oscille à la pulsation ω_2 imposée par $e_2(t)$:

$$s_2(t) = \frac{E_2}{\sqrt{1 + (\tau\omega_2)^2}} \cos(\omega_2 t - \arctan(\tau\omega_2)).$$

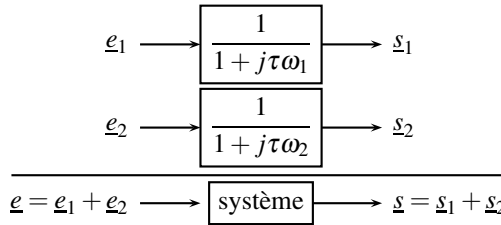


Figure 12.3 – Sortie associée à une entrée composée de deux sinusoïdes.

Finalement :

$$s(t) = \frac{E_1}{\sqrt{1 + (\tau\omega_1)^2}} \cos(\omega_1 t - \arctan(\tau\omega_1)) + \frac{E_2}{\sqrt{1 + (\tau\omega_2)^2}} \cos(\omega_2 t - \arctan(\tau\omega_2)).$$

La sortie associée à la somme de deux signaux sinusoïdaux de pulsations ω_1 et ω_2 , est la somme des deux signaux de mêmes pulsations ω_1 et ω_2 et se calcule à l'aide de $\underline{H}(j\omega_1)$ et $\underline{H}(j\omega_2)$.

Remarque

$|\underline{H}(j\omega_1)|$ et $\arg(\underline{H}(j\omega_1))$ se lisent sur les deux courbes du diagramme de Bode.

2 Contenu spectral d'un signal

2.1 Décomposition de Fourier

La notion de spectre d'un signal périodique et de **série de Fourier**¹ est introduite dans le chapitre sur les ondes.

On examine ici le cas, très fréquent en électronique, d'un signal créneau $e(t)$, de 2 V d'amplitude, de période $T = 2$ s, de valeur moyenne $\langle e \rangle = 1$ V (aussi connu sous le terme anglais d'*offset*, directement réglable sur un GBF) :

1. Joseph Fourier, 1768 – 1830, élève à l'École Normale Supérieure, professeur à l'École Polytechnique, participa à la campagne d'Égypte de Napoléon Bonaparte puis fut préfet de l'Isère, où, en parallèle de son travail administratif, il étudia la diffusion thermique pour laquelle il introduisit ces séries trigonométriques.

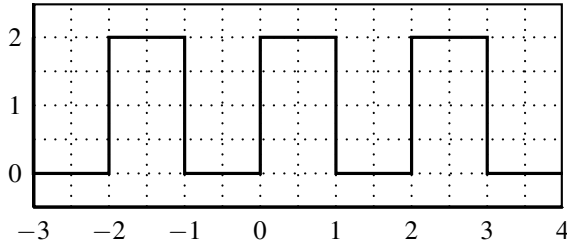


Figure 12.4 – Forme d'onde du signal créneau étudié.

Ce signal admet un développement en série de Fourier :

$$e(t) = 1 + \frac{4}{\pi} \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) + \frac{4}{3\pi} \sin\left(3 \times 2\pi \frac{t}{T}\right) + \frac{4}{5\pi} \sin\left(5 \times 2\pi \frac{t}{T}\right) + \dots$$

dans lequel on reconnaît :

- la valeur moyenne $\langle e \rangle = 1 \text{ V}$,
- le fondamental, de même période T que le signal $e(t)$: $\frac{4}{\pi} \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right)$,
- l'harmonique de rang 3, de période $\frac{T}{3}$: $\frac{4}{3\pi} \sin\left(3 \times 2\pi \frac{t}{T}\right)$,
- l'harmonique de rang n impair, de période $\frac{T}{n}$: $\frac{4}{n\pi} \sin\left(n \times 2\pi \frac{t}{T}\right)$.

Le signal $e(t)$ ne contient aucune harmonique de rang pair, on peut écrire son développement en série de Fourier :

$$e(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{1 + (-1)^{n+1}}{n\pi} \sin\left(n \times 2\pi \frac{t}{T}\right).$$

Le spectre de $e(t)$ a l'allure suivante :

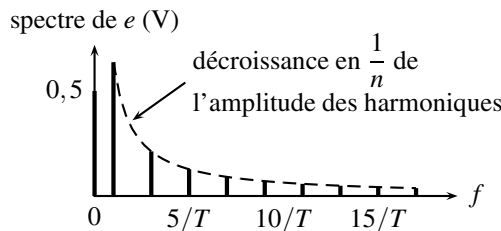


Figure 12.5 – Spectre d'un signal créneau de valeur moyenne non nulle.

Examinons l'influence de l'ajout successif des harmoniques sur le signal en dents de scie, en traçant, sur une demi-période, la somme partielle de Fourier :

$$\langle e \rangle + \sum_{n=1}^k E_n \cos\left(2\pi n \frac{t}{T} + \varphi_n\right) = 1 + \sum_{n=1}^k 2 \frac{1 + (-1)^{n+1}}{n\pi} \sin\left(n \times 2\pi \frac{t}{T}\right).$$

On place tout d’abord le terme de pulsation nulle, la valeur moyenne, constante ; puis on lui ajoute le fondamental et l’harmonique de rang trois (on rappelle que l’harmonique de rang deux est nulle). Le signal original créneau est tracé en gris :

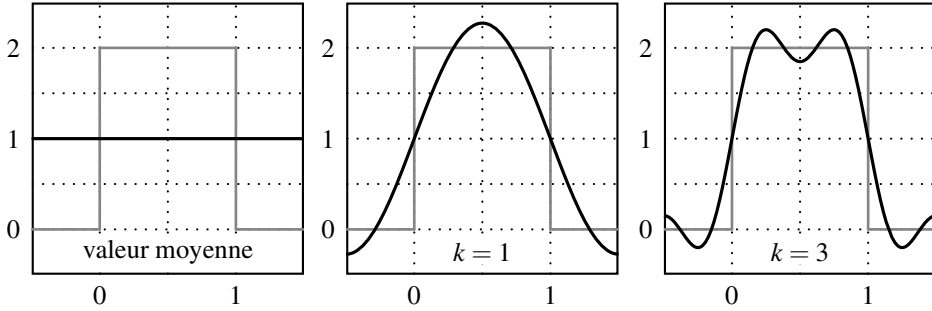


Figure 12.6 – Sommes partielles de Fourier.

On continue de sommer en ajoutant successivement les harmoniques de rang 5, 7 et 9.

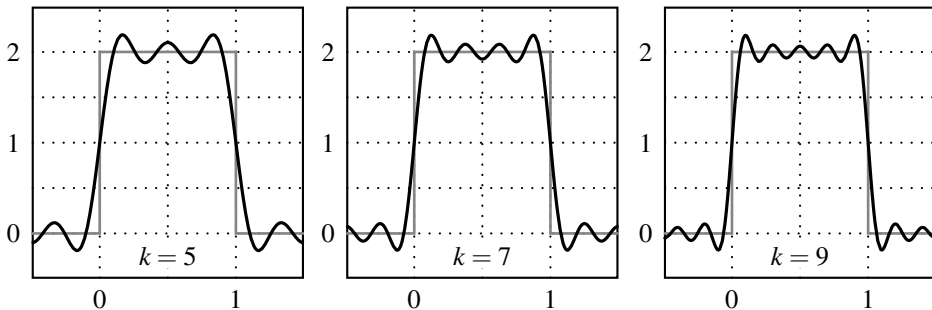


Figure 12.7 – Sommes partielles de Fourier.

En allant plus loin dans la somme de Fourier, avec l’ajout des harmoniques 11, 13 et 15, on se rapproche du signal en créneau.

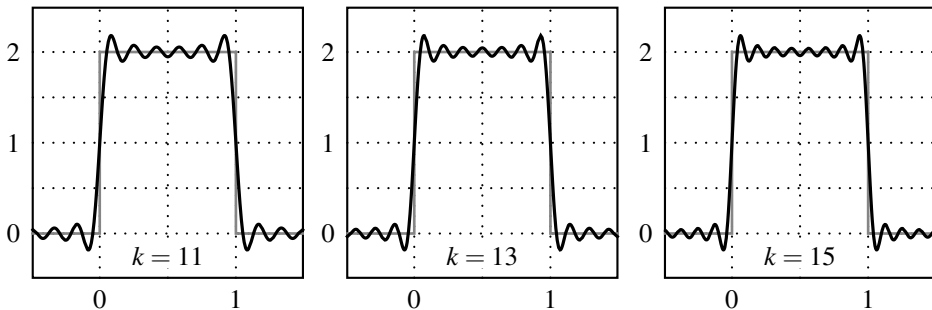


Figure 12.8 – Sommes partielles de Fourier.

En sommant pour aller jusqu'aux harmoniques 21 et 41, on voit que la somme de Fourier est très proche du signal en créneau. La somme des 400 premières harmoniques permet de reconstituer pratiquement le signal :

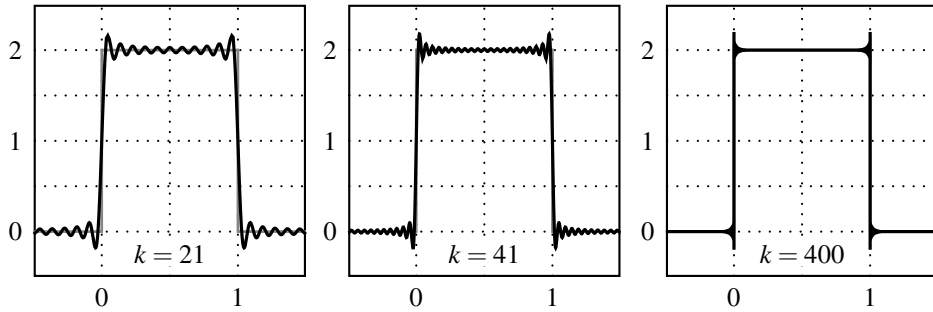


Figure 12.9 – Sommes partielles de Fourier.

On observe que si l'on se restreint aux premiers termes de la série de Fourier, on retrouve l'allure générale du signal : proche de zéro pour $t < 0$ et $t > 1$ s, proche de deux sur $[0, 1$ s], avec une variation rapide autour de 0 s et 1 s. Ces premiers termes sont suffisants pour décrire la forme générale du signal.

Les basses fréquences (valeur moyenne, fondamental et premières harmoniques) contiennent la forme générale du signal.

Est-ce à dire que les hautes fréquences ne représentent rien ? Absolument pas ! Pour converger finement vers le signal créneau, il a fallu ajouter des harmoniques de rang toujours plus élevé. Les hautes fréquences sont indispensables pour synthétiser les brusques variations du signal, comme en $t = 0$ s ou $t = 1$ s, ainsi que pour parfaire les petits détails.

Que les détails du signal soient contenus dans les hautes fréquences, cela se comprend aisément. Les hautes fréquences varient vite, avec une très faible période; elles construisent la partie du signal la plus fine. Quelle que soit la précision demandée, elle sera atteinte en montant assez haut en fréquence, c'est-à-dire avec une période aussi petite que l'on souhaite. La nécessité de la présence des hautes fréquences dans un signal qui varie brusquement est visible quand on les isole. Plus on augmente le nombre d'harmoniques dans les hautes fréquences, plus la pente du signal reconstitué est importante en $t = 0$ s et $t = 1$ s. On peut tracer uniquement ces hautes fréquences, à savoir la somme :

$$\sum_K^{\infty} E_n \cos\left(n \times 2\pi \frac{t}{T} + \varphi_n\right),$$

dans trois cas, $K = 20$, $K = 50$ puis $K = 600$. On isole ainsi la partie haute fréquence du signal, contenue par les harmoniques de rang supérieur ou égal à K .

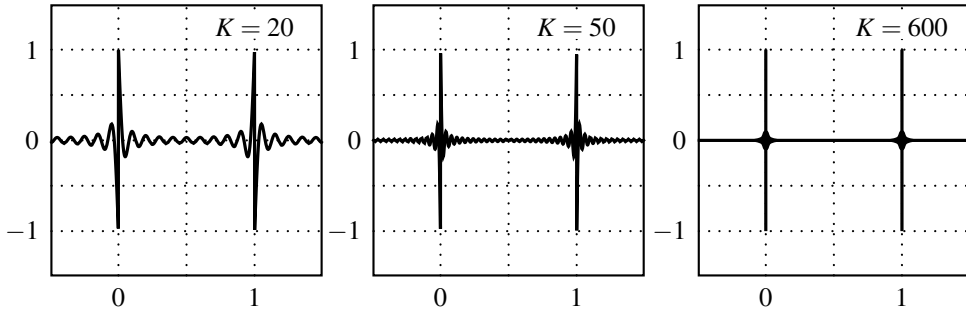


Figure 12.10 – Hautes fréquences contenues dans le signal triangle.

Les brusques variations en $t = 0$ s et $t = 1$ s se détachent très nettement lorsqu'on monte dans les hautes fréquences. Pour $K = 600$ par exemple, il ne reste plus qu'elles. Ce sont bien ces hautes fréquences qui contiennent cette discontinuité du signal.

Les hautes fréquences contiennent les brusques variations et les détails du signal.

2.2 Complément : phénomène de Gibbs

Les séries de Fourier tronquées présentent systématiquement un dépassement d'environ 9% lors d'une somme finie, nommé **phénomène de Gibbs**². Il est dû à l'absence dans la somme des hautes fréquences, indispensables pour modéliser correctement les détails fin. Par exemple pour le signal créneau déjà rencontré, on l'observe quand on somme les 400 premières harmoniques :

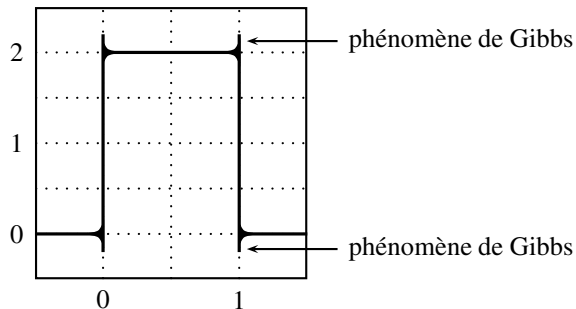


Figure 12.11 – Dépassement de Gibbs.

2. en l'honneur de Josiah Willard Gibbs, 1839 – 1903, physicien, chimiste et mathématicien américain, professeur à l'université de Yale, qui l'a le premier étudié. L'œuvre fondamentale en thermochimie de Gibbs relève du cours de seconde année.

3 Valeur efficace

3.1 Définition

La **valeur efficace** S_{eff} d'un signal $s(t)$, T -périodique, est définie par :

$$S_{eff}^2 = \langle s^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t) dt,$$

où t_0 est une date quelconque, bien choisie afin de simplifier le calcul.

3.2 Cas d'un signal sinusoïdal

On étudie, par exemple, $s(t) = S_0 \cos(\omega t)$. Le déphasage de $s(t)$ est arbitrairement choisi nul. Ceci est toujours possible avec un décalage de l'origine des temps, c'est-à-dire le choix de la date $t = 0$. Alors :

$$S_{eff}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T S_0^2 \cos^2(\omega t) dt.$$

Or $\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\omega t))$, donc :

$$S_{eff}^2 = \frac{S_0^2}{T} \int_0^T \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2\omega t)}{2} \right) dt = \frac{S_0^2}{T} \left(\frac{1}{2}T + \left[\frac{\sin(2\omega t)}{4\omega} \right]_0^T \right).$$

Or $\sin(0) = 0$ et $\sin(2\omega T) = \sin(4\pi) = 0$. Ainsi : $S_{eff}^2 = \frac{S_0^2}{2}$, d'où :

$$S_{eff} = \frac{S_0}{\sqrt{2}}.$$

La valeur efficace S_{eff} d'un signal harmonique $s(t) = S_0 \cos(\omega t)$ est $S_{eff} = \frac{S_0}{\sqrt{2}}$. Alors :

$$s(t) = S_{eff} \sqrt{2} \cos(\omega t).$$

Les oscilloscopes numériques et les multimètres mesurent directement la valeur efficace et l'affichent avec la mention **RMS**, acronyme anglais signifiant *root mean square*. En effet, la valeur efficace est la racine carrée (*square root*) de la moyenne du carré du signal (*mean of the square*).

3.3 Cas d'un signal créneau

Si le signal $s(t)$ est un créneau T -périodique :

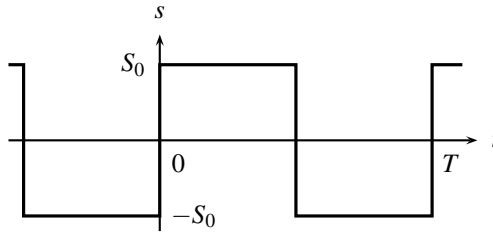


Figure 12.12 – Signal crêteau périodique.

Alors :

$$S_{eff}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T S^2(t) dt = \frac{1}{T} \left(\int_0^{T/2} S_0^2 dt + \int_{T/2}^T (-S_0)^2 dt \right).$$

Ainsi :

$$S_{eff}^2 = S_0^2 \quad \text{d'où} \quad S_{eff} = S_0.$$



Le facteur $\sqrt{2}$, entre l'amplitude S_0 et la valeur efficace S_{eff} , est caractéristique du régime purement sinusoïdal, ne se généralise pas pour les autres formes d'ondes.

3.4 Comparaison avec un signal constant

Pourquoi définir une valeur efficace par la valeur moyenne du carré du signal, et pourquoi la qualifier d'efficace ?

Soit un circuit très simple, composé d'un générateur qui délivre une tension $e(t)$ et d'une résistance R qui modélise un chauffage ou un éclairage. L'intensité $i(t)$ du courant qui circule est donnée par la loi d'Ohm :

$$i(t) = \frac{e(t)}{R}.$$

Que vaut la puissance \mathcal{P} délivrée en moyenne dans la résistance (puissance thermique dans le cas d'un chauffage, puissance lumineuse dans le cas d'un éclairage) ? Si $e(t)$ est une constante E_0 , alors l'intensité du courant est elle-aussi une constante $I_0 = E_0/R$; la puissance vaut dans ce cas :

$$\mathcal{P} = E_0 I_0 = \frac{E_0^2}{R}.$$

Si $e(t)$ est sinusoïdale, ce qui est le cas de la tension délivrée par EDF, elle s'écrit $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ et $i(t) = \frac{E_0}{R} \cos(\omega t)$. La puissance instantanée dans la résistance vaut :

$$p(t) = e(t) i(t) = \frac{e(t)^2}{R} = \frac{E_0^2}{R} \cos^2(\omega t),$$

et en moyenne :

$$\mathcal{P} = \langle p(t) \rangle = \frac{\langle e(t)^2 \rangle}{R} = \frac{E_{eff}^2}{R} = \frac{E_0^2}{2R}.$$

La puissance a chuté de moitié par rapport au cas constant !

Pour retrouver la même puissance, il faut alimenter le circuit avec une tension dont la valeur efficace vaut E_0 , c'est-à-dire une tension $e(t) = E_0\sqrt{2} \cos(\omega t)$. Ceci est illustré sur la figure 12.13.

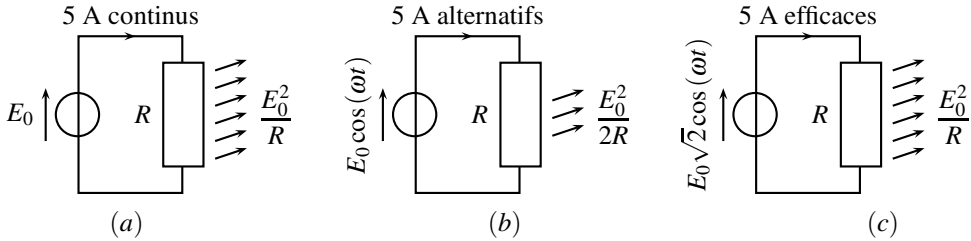


Figure 12.13 – Puissances dans un circuit résistif pour une intensité de 5 A (a) cas constant (b) cas sinusoïdal de même amplitude (c) cas sinusoïdal de même valeur efficace.

Un signal sinusoïdal de **valeur efficace** E_0 est aussi « efficace » qu'un signal constant E_0 pour l'alimentation en puissance. De plus, c'est bien $\langle e^2 \rangle$, c'est-à-dire E_{eff}^2 , qui intervient dans le calcul de la puissance moyenne.

4 Filtrage linéaire d'un signal non sinusoïdal

4.1 Position du problème

Le but de ce paragraphe est d'observer spectralement la réponse $s(t)$ d'un système, en régime permanent, lorsqu'il est soumis à un signal périodique non sinusoïdal, par exemple un signal créneau $e(t)$, de valeur moyenne différente de 0, de période T variable :

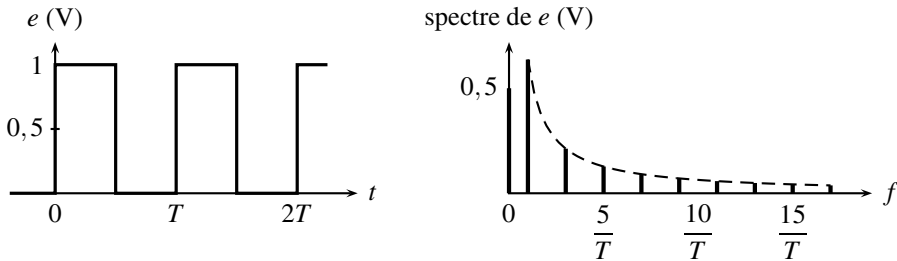


Figure 12.14 – Forme d'onde et spectre du signal $e(t)$.

Il sera important d'interpréter qualitativement la forme du signal de sortie avec l'éventuelle présence de la valeur moyenne et des hautes fréquences.

4.2 Filtrage passe-bas

On utilise un filtre passe-bas du premier ordre de transmittance : $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\tau\omega}$.

L'allure de la sortie dépend de la valeur de T par rapport à celle de τ , ce qui est très visible quand on trace, simultanément, le diagramme de Bode, limité au gain, et le spectre du signal d'entrée, accompagné de son enveloppe. La valeur moyenne de $e(t)$, de pulsation nulle, est rejetée à l'infini à gauche en échelle logarithmique. De plus, les hautes fréquences sont d'une amplitude trop faible pour être observées (l'amplitude des harmoniques décroît en $1/n$), mais restent bien présentes.

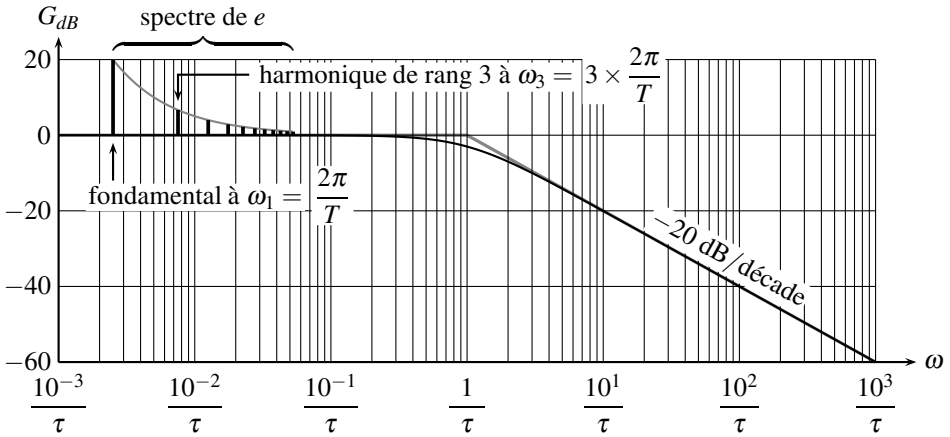


Figure 12.15 – Gain du système et spectre de l'entrée dans le cas où $\frac{2\pi}{T} \ll \frac{1}{\tau}$.

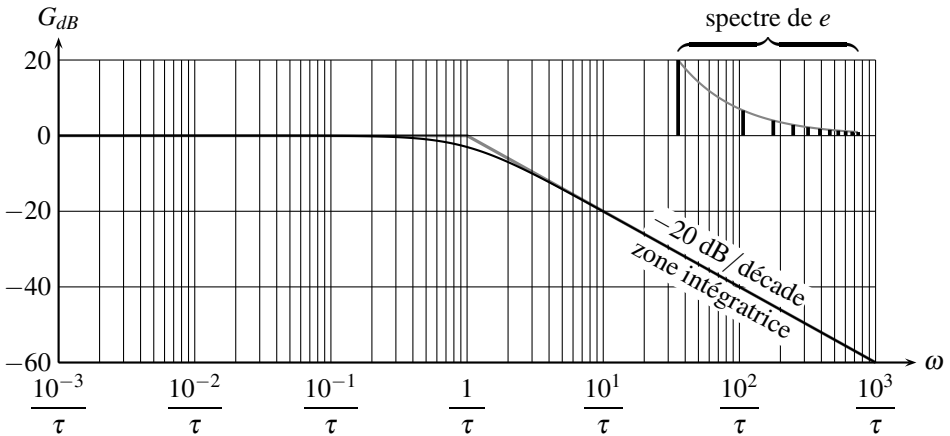


Figure 12.16 – Gain du système et spectre de l'entrée dans le cas où $\frac{2\pi}{T} \gg \frac{1}{\tau}$.

On observe trois cas distincts pour la sortie $s(t)$:

- $2\pi/T \ll 1/\tau$: le spectre est dans la zone passante du filtre. Le signal de sortie est peu différent de celui d'entrée, avec toutefois un arrondissement aux demi-périodes, car les hautes fréquences, indispensables pour reconstituer les brusques variations, sont filtrées.

Plus $1/T$ est faible devant $1/\tau$, plus le nombre d'harmoniques qui passent à travers le filtre est élevé, plus le signal de sortie tend vers le signal d'entrée.

- $2\pi/T \approx 1/\tau$: c'est une zone de transition, une partie seulement du signal d'entrée est filtrée.
- $2\pi/T \gg 1/\tau$: à part la valeur moyenne, qui passe intacte à travers le filtre, le spectre est totalement dans la zone à -20 dB/décade, où le signal est intégré. On observe donc un signal de sortie triangulaire, mais de très faible amplitude autour de la valeur moyenne car le système présente une forte atténuation. On a ainsi réalisé un **moyenneur**.

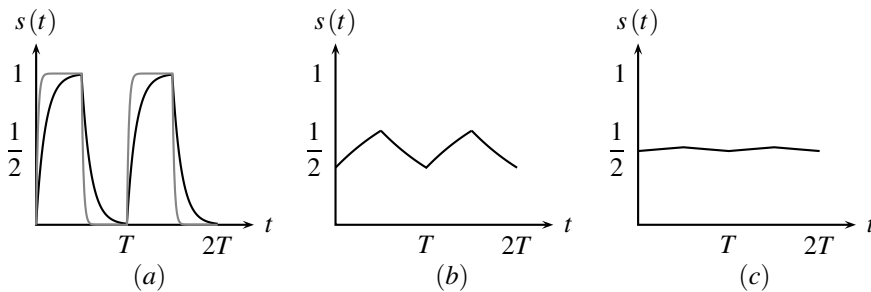


Figure 12.17 – Filtrage passe-bas d'un signal créneau (a) $T = 50\tau$ en gris et $T = 10\tau$ en noir, (b) $T = \tau$, (c) $T = 0,1\tau$.

4.3 Réalisation d'un moyenneur

On voit nettement dans le cas (c) du paragraphe précédent, que le signal de sortie est quasiment constant, égal à sa valeur moyenne. En effet, seule la valeur moyenne du signal d'entrée passe à travers le filtre. On en déduit une méthode systématique de réalisation d'un moyenneur au moyen d'un passe-bas :

- identifier la période T du signal $e(t)$ dont on cherche la valeur moyenne,
- se souvenir que toutes les harmoniques contenues dans $e(t)$ auront une pulsation supérieure ou égale à $2\pi/T$, pulsation du fondamental, sauf la valeur moyenne qui a une pulsation nulle,
- construire un passe-bas qui laisse passer la pulsation nulle mais élimine toutes les pulsations à partir de $2\pi/T$, c'est-à-dire un filtre de pulsation caractéristique très inférieure à $2\pi/T$.

Un **moyenneur** est un filtre passe-bas de pulsation caractéristique très inférieure à celle du fondamental du signal à moyenner.

4.4 Filtrage passe-haut

On utilise maintenant un filtre passe-haut du premier ordre de transmittance :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j\tau\omega}{1 + j\tau\omega}.$$

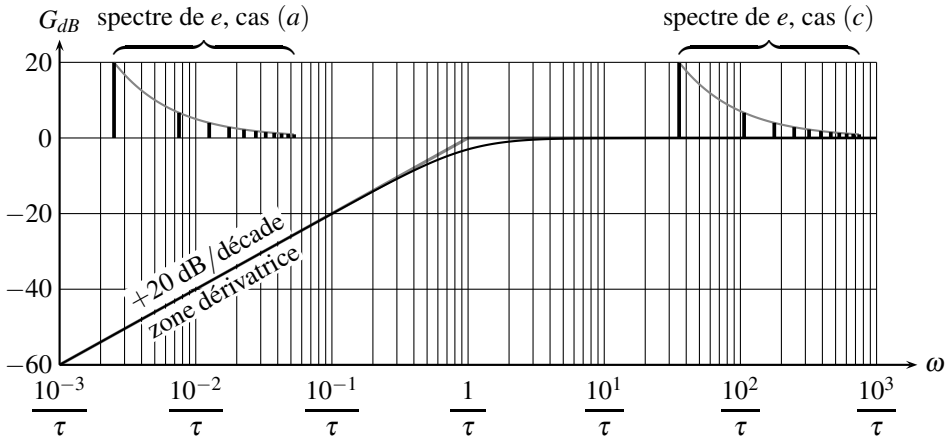


Figure 12.18 – Gain du système et spectre de l'entrée pour un filtrage passe-haut.

On observe dans chaque cas que la valeur moyenne est complètement éliminée par le filtre. La valeur moyenne du signal de sortie est donc nulle. De plus, l'allure de la sortie dépend encore de la valeur de T par rapport à celle de τ :

- $2\pi/T \ll \frac{1}{\tau}$: le spectre est dans la zone à +20 dB/décade, où le signal est dérivé. On observe donc un signal de sortie qui présente de brusques variations aux demi-périodes, dues aux hautes fréquences. L'amplitude du signal est due à ces hautes fréquences, d'amplitudes trop faibles pour être distinguées sur le spectre, qui passent à travers le filtre.
- $2\pi/T \approx \frac{1}{\tau}$: c'est une zone de transition, une partie seulement du signal d'entrée est filtrée.
- $2\pi/T \gg \frac{1}{\tau}$: le spectre est dans la zone passante du filtre. Le signal de sortie est peu différent de celui d'entrée, avec de brusques variations nettement marquées aux demi-périodes, à cause des hautes fréquences.

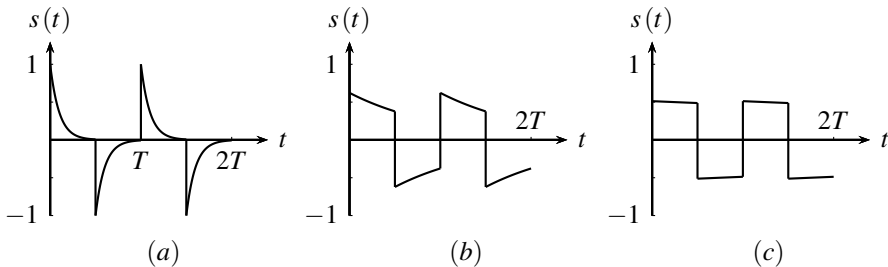


Figure 12.19 – Filtrage passe-haut d'un signal créneau (a) $T = 10\tau$, (b) $T = \tau$, (c) $T = 0,1\tau$.

4.5 Filtrage passe-bande

Ce filtrage est réalisé par un filtre du second ordre de transmittance :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{2\xi \frac{j\omega}{\omega_0}}{1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}.$$

On traite ici le cas d'un filtre très sélectif, c'est-à-dire très peu amorti ou de fort coefficient de qualité :

$$Q = 50 \quad \text{soit} \quad \xi = \frac{1}{2m} = 10^{-2}.$$

Le filtre ne laisse passer qu'une étroite bande de pulsation autour de ω_0 , où son gain vaut 1. En dehors de cette fréquence, le gain est tellement négatif que le signal est complètement absorbé par le passe-bande. En effet, un gain -60 dB, par exemple, représente une division du signal par 1000.

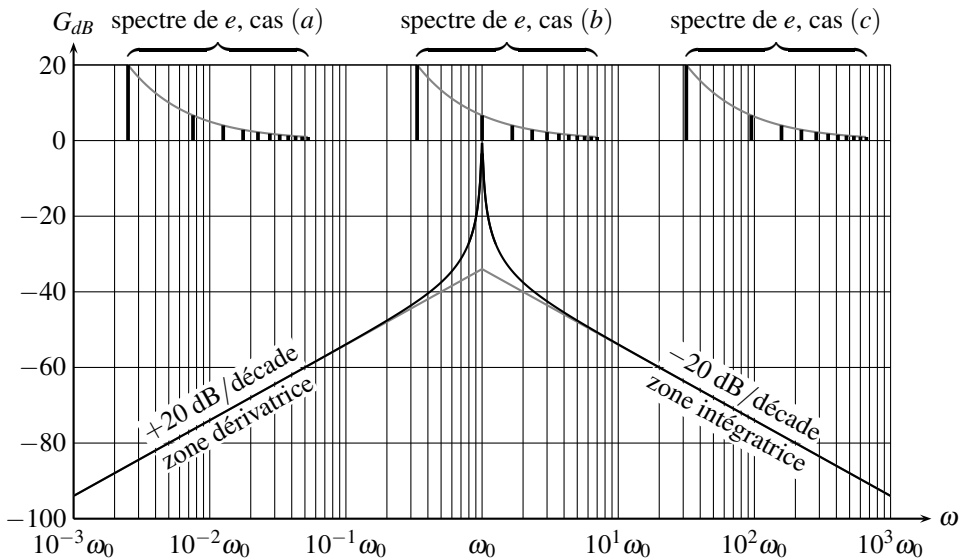


Figure 12.20 – Gain du système et spectre de l'entrée pour un filtrage passe-bande.

La valeur moyenne, composante de pulsation nulle, est complètement filtrée. La valeur moyenne du signal de sortie est donc nulle. De plus, l'allure de la sortie dépend encore de la valeur

de $\frac{2\pi}{T}$ par rapport à celle de ω_0 :

- $\frac{2\pi}{T} \ll \omega_0$: le spectre est dans la zone à $+20$ dB/décade, où le signal est dérivé. Toutefois, l'atténuation est tellement forte que l'amplitude du signal est quasiment nulle.

- $3 \times \frac{2\pi}{T} \approx \omega_0$: c'est l'exemple du bas (b) sur la figure. L'harmonique de rang 3, de pulsation $3 \times \frac{2\pi}{T}$, arrive exactement en ω_0 , seule composante que le filtre laisse passer. Cette harmonique est la seule à passer à travers le filtre, on la retrouve en sortie.
- $\frac{2\pi}{T} \gg \omega_0$: le spectre est dans la zone à -20 dB/décade, où le signal est intégré. Toutefois, l'atténuation est tellement forte que l'amplitude du signal triangulaire est très faible.

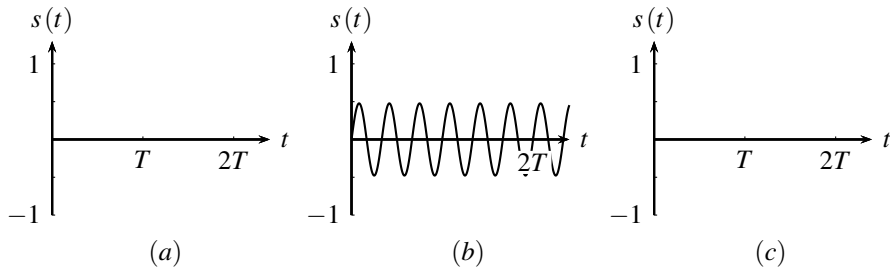


Figure 12.21 – Filtrage passe-bande d'un signal créneau : (a) $\frac{2\pi}{T} \ll \omega_0$,
 (b) $3 \times \frac{2\pi}{T} = \omega_0$, (c) $\frac{2\pi}{T} \gg \omega_0$.

5 Réponse indicielle et contenu spectral

5.1 Possibilité de discontinuité, valeur moyenne

La réponse indicielle d'un système du premier ou du deuxième ordre est la réponse du filtre à un échelon. Elle a été étudiée dans les chapitres précédents. On rappelle, dans trois cas, les résultats alors obtenus, auxquels on ajoute la fonction de transfert du système.

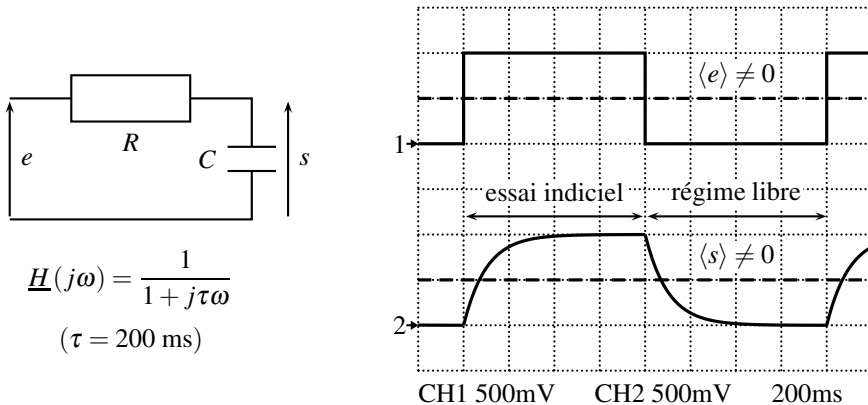


Figure 12.22 – Montage, transmittance, essai indiciel et régime libre d'un passe-bas du premier ordre.

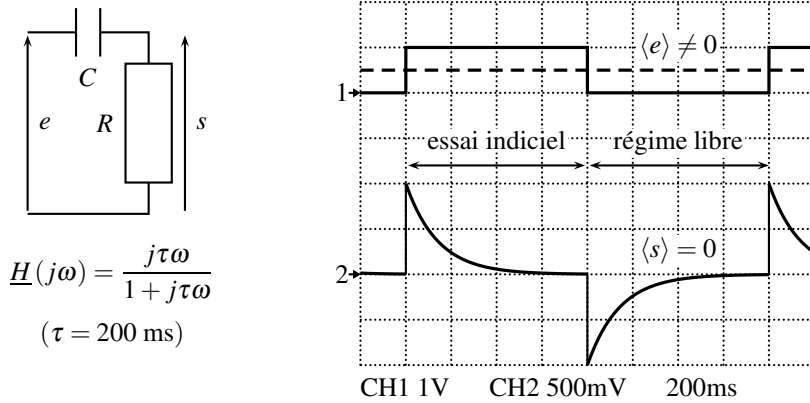


Figure 12.23 – Montage, transmittance, essai indiciel et régime libre d'un passe-haut du premier ordre.

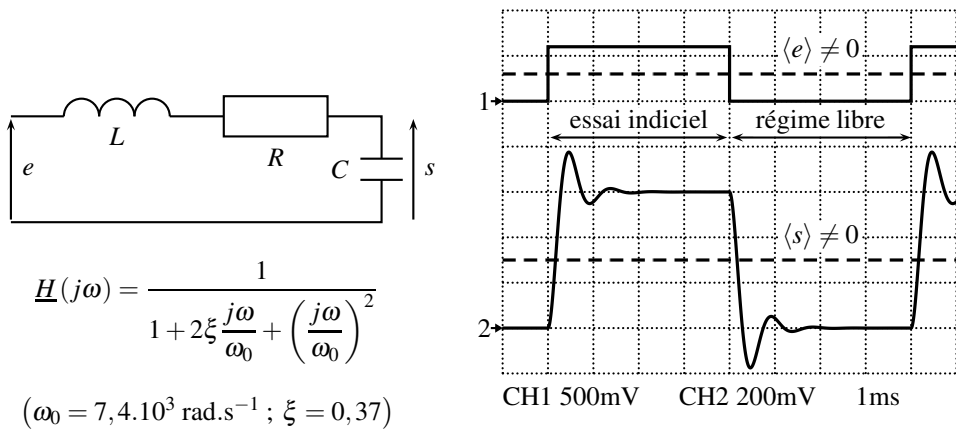


Figure 12.24 – Montage, transmittance, essai indiciel et régime libre d'un passe-bas du deuxième ordre.

On observe que pour les passe-bas, tant du premier que du deuxième ordre, le signal de sortie est continu, c'est-à-dire que la sortie admet la même valeur juste après l'échelon que juste avant. C'est la même chose pour le régime libre, la valeur de la sortie reste continue lors de la mise à la masse de l'entrée.

Pour le passe-haut, au contraire, on observe une sortie discontinue, c'est-à-dire que la valeur de la tension de sortie juste après l'échelon est différente de celle juste avant ; de même dans le cas du régime libre.

Comment interpréter ces résultats ?

La forme générale d'un signal est contenue dans ses basses fréquences, alors que les détails et les brusques variations le sont dans ses hautes fréquences. Ainsi, lors d'un filtrage passe-bas, les hautes fréquences sont supprimées ; il est donc impossible de reconstituer une brusque variation du signal en sortie. Lors du filtrage passe-haut, au contraire, les hautes fréquences,

contenues dans le signal créneau, sont transmises et expliquent la brusque variation du signal de sortie.

Il ne peut y avoir de discontinuité du signal de sortie que si le système présente un caractère passe-haut.

De plus, on observe que le signal de sortie des passe-bas a une valeur moyenne différente de zéro, alors que la sortie du passe-haut a une valeur moyenne nulle.

Le contenu spectral d'un signal explique ce phénomène. En effet, la valeur moyenne est la composante de pulsation nulle ($\omega = 0$) du signal. Elle passe à travers les passe-bas et se retrouve intacte en sortie (dans les deux cas, $\underline{H}(0) = 1$) : la valeur moyenne du créneau en entrée se retrouve en sortie. Le filtrage passe-haut, quant à lui, coupe les basses fréquences, donc la valeur moyenne. Le signal de sortie d'un passe-haut a donc nécessairement une valeur moyenne nulle.

Le signal de sortie ne peut avoir de valeur moyenne non nulle que si le système présente un caractère passe-bas.

Attendu que la valeur moyenne est la composante de pulsation nulle du signal, en notant $e(t)$ l'entrée et $s(t)$ la sortie d'un système de transmittance $\underline{H}(j\omega)$:

$$\langle s \rangle = \underline{H}(0) \langle e \rangle .$$

Et pour un passe-bande, qui ne laisse passer ni les basses ni les hautes fréquences ? *A priori*, le signal de sortie, lors d'un essai indiciel ou d'un régime libre :

- admet une valeur moyenne nulle, car la composante $\omega = 0$ est filtrée,
- reste continu à l'arrivée de l'échelon ou du régime libre, car les hautes fréquences, indispensables à une brusque variation du signal, sont filtrées.

L'observation expérimentale valide ces deux résultats :

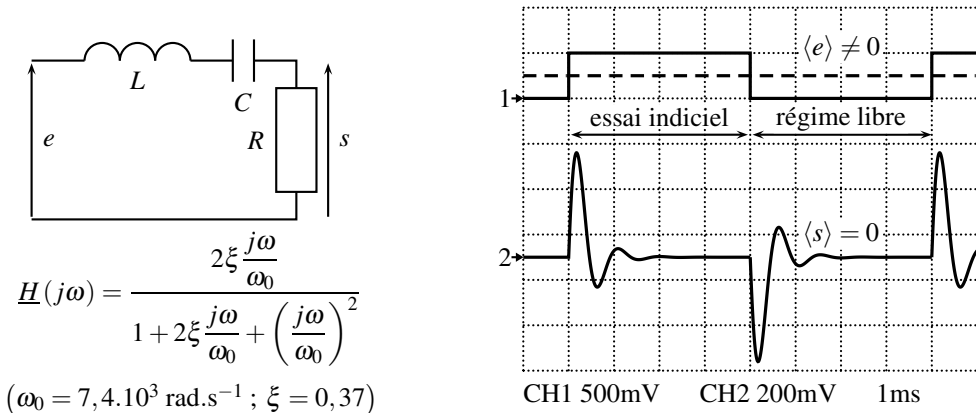


Figure 12.25 – Montage, transmittance, essai indiciel et régime libre d'un passe-bande du deuxième ordre.

5.2 Complément : lien avec le théorème de la valeur initiale

Le cours de SII introduit un outil très utile pour l'étude des essais indiciels : le théorème de la valeur initiale. Si sa démonstration ne relève pas du présent cours, ses enseignements sont totalement liés à ceux du paragraphe précédent.

La fonction de transfert de Laplace est la même que celle en régime permanent sinusoïdal, en remplaçant $j\omega$ par p . Le théorème de la valeur initiale affirme que, lorsque les limites existent :

$$\lim_{t \rightarrow 0} s(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pS(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} pH(p)E(p).$$

La transformée de Laplace d'un échelon de hauteur E_0 est $E(p) = E_0/p$ et donc, pour un essai indiciel :

$$\lim_{t \rightarrow 0} s(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} H(p)E_0 \quad \text{soit} \quad s(0^+) = H(\infty)E_0.$$

Ainsi, si le filtre présente un caractère passe-bas, $H(\infty) = 0$ et $s(0^+) = 0$; la sortie reste continue. Par contre, si le filtre présente un caractère passe-haut, $H(\infty) \neq 0$ et $s(0^+) \neq 0$; la sortie est discontinue lors d'un essai indiciel. De plus, c'est la valeur de la fonction de transfert en l'infini qui importe, c'est-à-dire pour les hautes fréquences. On retrouve qu'une brusque variation d'un signal est due aux hautes fréquences.

6 Approche documentaire : accéléromètre

La notion de filtrage n'est pas réservée aux circuits électriques. Elle peut être étendue à tout type de système, par exemple mécanique. Il existe de nombreux filtres mécaniques, comme les sismomètres, les amortisseurs, les accéléromètres...

Un extrait de la notice constructeur d'un accéléromètre est présentée sur la page suivante. Il s'agit d'une puce qui transforme une accélération mécanique en un signal électrique. Ce genre de puce est intégrée dans toutes les manettes de jeux de console, dans les téléphones portables...

L'accéléromètre présenté est le ADXL330. Les deux premières lettres d'une puce indiquent le fabricant, ici Analog Device ; les lettres et les chiffres qui suivent précisent de quel circuit il s'agit. Le lecteur retrouvera la fiche technique entière sur internet en cherchant « *ADXL330 datasheet* ».

Quelques questions :

1. le ADXL330 mesure-t-il l'accélération suivant un seul axe ou selon les 3 coordonnées d'espace ?
2. Les fréquences qui passent à travers un filtre constituent la **bande passante**, *bandwidth* en anglais. Quelles sont les bandes passantes maximales suivant les trois axes ?
3. L'utilisateur peut-il diminuer ces bandes passantes ? les augmenter ?
4. Qu'arrive-t-il aux fréquences qui sont en dehors de la bande passante ?
5. Les dimensions de la puce sont précisées dans l'extrait. Dessiner de profil la puce et indiquer à quoi correspondent les trois axes.



Small, Low Power, 3-Axis $\pm 3 g$ *i*MEMS® Accelerometer

ADXL330

FEATURES

- 3-axis sensing**
- Small, low-profile package**
4 mm × 4 mm × 1.45 mm LFCSP
- Low power**
180 μ A at $V_s = 1.8$ V (typical)
- Single-supply operation**
1.8 V to 3.6 V
- 10,000 g shock survival**
- Excellent temperature stability**
- BW adjustment with a single capacitor per axis**
- RoHS/WEEE lead-free compliant**

APPLICATIONS

- Cost-sensitive, low power, motion- and tilt-sensing applications**
- Mobile devices
- Gaming systems
- Disk drive protection
- Image stabilization
- Sports and health devices

GENERAL DESCRIPTION

The ADXL330 is a small, thin, low power, complete 3-axis accelerometer with signal conditioned voltage outputs, all on a single monolithic IC. The product measures acceleration with a minimum full-scale range of $\pm 3 g$. It can measure the static acceleration of gravity in tilt-sensing applications, as well as dynamic acceleration resulting from motion, shock, or vibration.

The user selects the bandwidth of the accelerometer using the C_x , C_y , and C_z capacitors at the X_{OUT} , Y_{OUT} , and Z_{OUT} pins. Bandwidths can be selected to suit the application, with a range of 0.5 Hz to 1600 Hz for X and Y axes, and a range of 0.5 Hz to 550 Hz for the Z axis.

The ADXL330 is available in a small, low profile, 4 mm × 4 mm × 1.45 mm, 16-lead, plastic lead frame chip scale package (LFCSP_LQ).

FUNCTIONAL BLOCK DIAGRAM

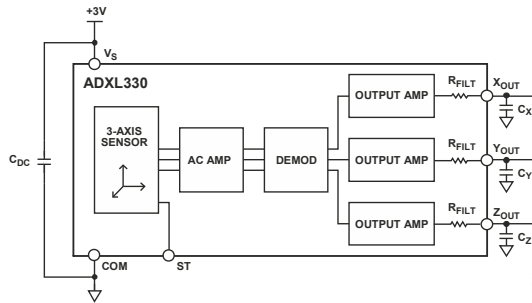


Figure 1.

Rev. A
Information furnished by Analog Devices is believed to be accurate and reliable. However, no responsibility is assumed by Analog Devices for its use, nor for any infringements of patents or other rights of third parties that may result from its use. Specifications subject to change without notice. No license is granted by implication or otherwise under any patent or patent rights of Analog Devices. Trademarks and registered trademarks are the property of their respective owners.

One Technology Way, P.O. Box 9106, Norwood, MA 02062-9106, U.S.A.
Tel: 781.329.4700 www.analog.com
Fax: 781.461.3113 ©2007 Analog Devices, Inc. All rights reserved.

6. Quelle est l'ordre de grandeur de la fréquence maximale d'oscillation qu'un expérimentateur normal peut atteindre avec une manette de jeux ou un téléphone ? Le résultat est-il en accord avec les spécifications du ADXL330 ?
7. Pourquoi la bande passante doit-elle être supérieure à la fréquence maximale d'oscillation précédente ?

Des réponses sont proposées à la page suivante.

SYNTHÈSE

SAVOIRS

- développement en série de Fourier
- définir la valeur moyenne
- définir la valeur efficace

SAVOIR-FAIRE

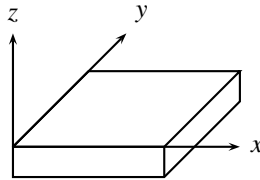
- utiliser une fonction de transfert ou sa représentation graphique pour conduire l'étude de la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale, à une somme finie d'excitations sinusoïdales, à un signal périodique
- expliciter les conditions d'utilisation d'un filtre en moyenneur

MOTS-CLÉS

- développement en série de Fourier
- valeur efficace
- valeur moyenne
- moyenneur
- réponse d'un système linéaire

Réponses proposées aux questions de l'analyse documentaire :

1. le ADXL330 mesure l'accélération suivant les 3 coordonnées d'espace : *The ADXL is a [...] complete 3-axis accelerometer.*
2. La bande passante maximale est de 1600 Hz suivant (Ox) et (Oy) et de 550 Hz suivant (Oz).
3. L'utilisateur peut les diminuer jusqu'à 0,5 Hz, mais ne peut pas les augmenter.
4. Les fréquences en dehors de la bande passante sont éliminées. La documentation ne précise pas si l'atténuation est forte ou pas, l'utilisateur doit donc considérer que toute fréquence qui sort de la bande passante est filtrée.
5. Les dimensions sont $4\text{ mm} \times 4\text{ mm} \times 1,45\text{ mm}$. Attendu que les caractéristiques sont identiques suivant (Ox) et (Oy), ces deux axes sont équivalents : la puce mesure 4 mm suivant ces axes, et donc $1,45\text{ mm}$ suivant (Oz).



6. L'auteur arrive à mener environ 10 oscillations du poignet par seconde au maximum, ce qui correspond à une fréquence de 10 Hz. Les oscillations physiques sont donc comprises entre une fréquence de 0 Hz, pour un mouvement extrêmement lent, à 10 Hz, pour des oscillations rapides. Cette gamme de fréquence entre dans la bande passante du ADXL330.
7. La question précédente n'envisage qu'un mouvement harmonique. Un mouvement d'un point à un autre de l'espace, avec un départ très rapide, n'est pas sinusoïdal, mais contient de nombreuses fréquences, en particulier des hautes fréquences, qui permettent de décrire un signal qui varie très rapidement. Pour bien capter un mouvement quelconque, l'accéléromètre doit être capable de prendre en compte ces hautes fréquences. C'est pourquoi la bande passante doit être largement supérieure à 10 Hz.