

# Analyse fréquentielle et solides cristallins

Durée : 4 heures

L'usage de la calculatrice et de tout autre appareil électronique est interdit.

- ▷ La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, et sauf si la question le demande explicitement, **les résultats non justifiés ne sont pas pris en compte.**
- ▷ La présentation, la lisibilité et l'orthographe font partie des critères d'évaluation. Les candidats sont invités à **numéroter les copies utilisées**, à **encadrer les résultats de leurs calculs** et à mettre en évidence le numéro des questions. Une **pénalité pouvant aller jusqu'à 10 % de la note obtenue** sera appliquée aux copies sales et peu soignées.
- ▷ Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, **il le signale sur sa copie et poursuit sa composition** en précisant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
- ▷ Le sujet se compose de **plusieurs parties indépendantes** les unes des autres, que le candidat est libre d'aborder **dans l'ordre de son choix.**
  - La partie I aborde la cristallographie du silicium. Elle est extraite du concours E3a MP 2016, sur lequel recrute l'ENSAM, et compte pour 28 % du barème.
  - La partie II étudie le fonctionnement d'une ligne ADSL. Elle représente 44 % du barème.
  - La partie III présente le principe de fonctionnement du microscope à force atomique. Elle est extraite du concours E3a MP 2016, comme la partie I, et compte pour 28 % du barème.
- ▷ Le sujet est volontairement long pour laisser au candidat le choix des parties sur lesquelles il souhaite se concentrer en priorité. Pour faire ce choix en connaissance de cause, il est recommandé de lire le sujet en entier avant d'entamer la composition.

*Les candidats doivent vérifier que le sujet comporte bien 10 pages, numérotées de 1/10 à 10/10.*

## I - Nitrure de silicium

[E3a MP 2016]

*Le sujet porte sur la microscopie à force atomique (AFM en anglais), qui est une méthode permettant d'étudier la surface de matériaux à l'échelle microscopique. Il s'agit de poser une pointe très fine et très dure à la surface du matériau à étudier et de la déplacer. La partie de chimie porte sur le nitrure de silicium, matériau qui compose la pointe de l'AFM mise en contact de la surface étudiée.*

Données :

- ▷ Numéro atomique du silicium :  $Z = 14$ .
- ▷ Masse volumique du silicium :  $\rho = 2,33 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ;
- ▷ Masse molaire du silicium :  $M = 28,1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  ;
- ▷ Rayon de l'ion nitrure  $\text{N}^{3-}$  :  $r(\text{N}^{3-}) = 140 \text{ pm}$  ;
- ▷ Rayons de l'ion  $\text{Si}^{4+}$  :  $r(\text{Si}^{4+}) = 27 \text{ pm}$  si coordinence 4 ou  $40 \text{ pm}$  si coordinence 6 ;
- ▷ Énergie de liaison Si–Si :  $D_{\text{Si-Si}} = 225 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$  ;
- ▷ Électronégativité sur l'échelle de Pauling :  $\chi(\text{N}) = 3,04$  et  $\chi(\text{Si}) = 1,90$ .

### I.A - L'élément silicium

**1** - Écrire la configuration électronique à l'état fondamental de l'atome de silicium Si. Préciser ses électrons de cœur et de valence.

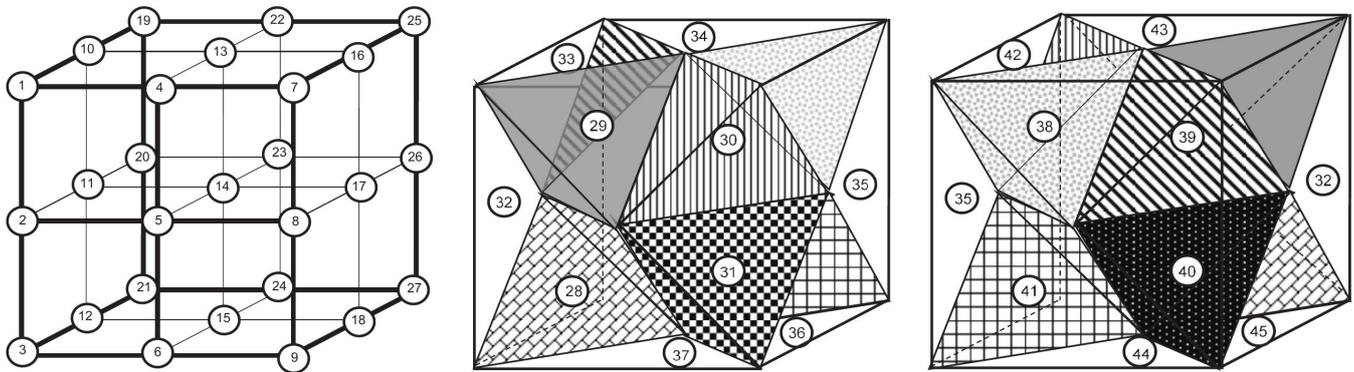
**2** - En déduire sa position dans la classification périodique de Mendeleïev (numéro de période et de colonne). Citer un élément chimique très répandu qui possède la même configuration de valence. Quel est l'élément le plus électro-négatif des deux ? Justifier.

**3** - Le silicium intervient naturellement dans de nombreux composés, comme  $\text{SiO}_2$ ,  $\text{Si(OH)}_4$ ,  $\text{SiCl}_4$ . Donner la structure de Lewis pour chacun de ses composés. Combien de liaisons forme le silicium dans chacun des cas ? Interpréter.

## I.B - Cristallographie du silicium

Le silicium forme une structure de type diamant, c'est-à-dire une structure cubique faces centrées (cfc) d'atomes de silicium, avec occupation d'un site tétraédrique sur deux par un atome de silicium.

4 - Sur la figure 1 ci-dessous, quels sont les numéros correspondant aux sites tétraédriques (notés T) et aux sites octaédriques (notés O) d'une maille cubique faces centrées ?



**Figure 1 – Structure cubique faces centrées.** La figure de droite est une rotation de  $180^\circ$  de la figure centrale.

5 - En déduire le nombre de sites T et de sites O appartenant en propre à une maille cfc.

6 - En déduire la population de la maille de type diamant du silicium en détaillant le calcul. Préciser la coordinence de l'atome de silicium dans la structure.

7 - Comment expliquer que le silicium soit un matériau très dur ? Pour ce faire, analyser la nature de la liaison Si-Si dans la structure.

8 - Écrire la relation entre le paramètre de maille  $a$  et le rayon  $r(\text{Si})$  de l'atome de silicium dans la structure de type diamant.

9 - À partir de la masse volumique fournie, calculer la valeur du rayon  $r(\text{Si})$ .

10 - Calculer la compacité de la structure. Commenter.

## I.C - Cristallographie du nitrure de silicium

Le nitrure de silicium  $\text{Si}_3\text{N}_4$ , quant à lui, cristallise sous trois variétés dont l'une est appelée gamma. Il s'agit d'une structure spinelle, c'est-à-dire une structure cubique faces centrées d'ions nitrure  $\text{N}^{3-}$  dans laquelle les ions  $\text{Si}^{4+}$  occupent un huitième des sites T et la moitié des sites O.

11 - Le nitrure de silicium peut exister à l'état solide sous différentes variétés cristallines. Comment appelle-t-on ce phénomène ?

12 - L'occupation des sites T et O est-elle cohérente avec la stœchiométrie de  $\text{Si}_3\text{N}_4$  ?

13 - Dans une structure cfc, l'habitabilité des sites T est inférieure à celle des sites O. Déterminer l'habitabilité des sites T en détaillant le calcul.

14 - Le nitrure de silicium est un alliage d'insertion. Rappeler ce qui caractérise la structure de ces alliages. En déduire le rayon maximal de l'ion  $\text{Si}^{4+}$ . Est-ce cohérent avec les données ?

15 - Quelle est la nature de la liaison entre  $\text{Si}^{4+}$  et  $\text{N}^{3-}$  ? Citer deux propriétés que la liaison confère au matériau qui permettent de justifier l'utilisation d'une pointe en nitrure de silicium pour un AFM.

## II - Principe de fonctionnement d'une ligne ADSL

La technologie ADSL était jusque récemment celle qui permettait au plus grand nombre un accès internet haut débit. Bien qu'en perte de vitesse depuis 2015, notamment face au déploiement du réseau de fibre optique, j'ai choisi d'en faire l'objet de cette partie du DS car elle constitue une application grand public « parlante » des notions de filtrage que nous avons étudiées en cours.

### Document 1 : Structure du réseau téléphonique

Le réseau téléphonique est une infrastructure complexe permettant d'interconnecter différents équipements de télécommunication (téléphones fixes, téléphones mobiles, modem, fax, etc.) les uns aux autres. Laissons de côté les problématiques liées à la téléphonie mobile et intéressons-nous exclusivement aux connexions filaires. Pour décrire schématiquement le réseau téléphonique filaire, partons de l'utilisateur final et remontons la ligne.

Le réseau téléphonique arrive chez l'utilisateur par l'intermédiaire de deux fils de cuivre. Ces fils viennent directement du Nœud de Raccordement d'Abonnés (NRA) le plus proche. Il s'agit d'un local où aboutissent toutes les lignes des abonnés du quartier. Cette portion du réseau est appelée boucle locale.

À l'intérieur du NRA, le devenir de la ligne dépend du type d'abonnement souscrit.

- ▷ Pour un abonné ne disposant que du téléphone classique, les deux fils de cuivre sont connectés à un autocommutateur qui se charge de le mettre en relation avec l'interlocuteur qu'il souhaite joindre ou qui souhaite le joindre.
- ▷ Pour un abonné ne disposant que de l'internet par ADSL et du service de téléphonie VoIP, les deux fils de cuivre sont connectés à un Multiplexeur d'Accès à la Ligne d'Abonné Numérique (en anglais DSLAM), raccordé à son tour au réseau du fournisseur d'accès internet (FAI). On parle souvent dans ce cas de dégroupage total. Cette technologie représente environ la moitié des NRA en mars 2016 mais concerne 90 % des particuliers.
- ▷ Pour un abonné disposant à la fois du téléphone classique et de l'internet par ADSL, cas qui nous intéresse ici, les deux fils de cuivre sont connectés à un filtre qui permet de répartir le signal selon sa nature entre l'autocommutateur et le DSLAM, voir figure 2. Cette technologie a commencé à décliner au quatrième trimestre 2014 devant la concurrence de la fibre optique et du VDSL2 qui apportent un débit supérieur.

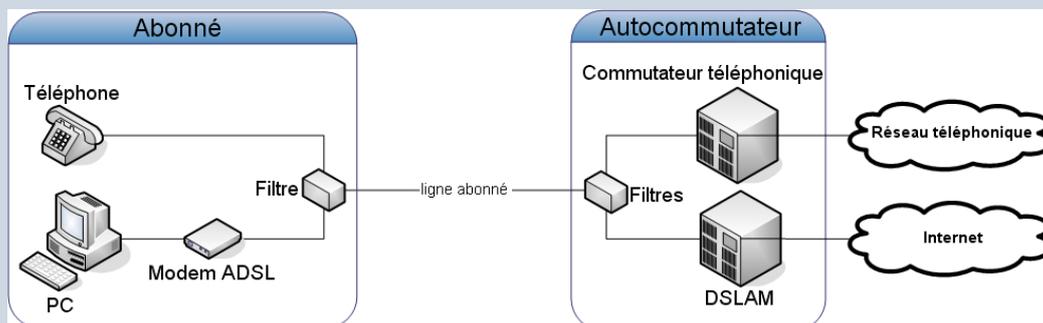


Figure 2 – Schéma de principe d'une ligne ADSL.

Les signaux utilisés pour la téléphonie classique (sonnerie, numérotation multifréquences, voix) occupent une bande de fréquences qui s'étend entre 25 et 3400 Hz environ. Le principe de l'ADSL consiste à exploiter une autre bande de fréquence pour échanger des données numériques en parallèle avec une éventuelle conversation téléphonique. Elle est comprise entre environ 69 kHz et 1,1 MHz et donc située au-dessus de celle utilisée pour la téléphonie. Grâce à cette séparation dans le domaine fréquentiel, les signaux ADSL qui transportent les données et les signaux téléphoniques qui transportent la voix circulent donc simultanément sur la même ligne d'abonné sans interférer les uns avec les autres.

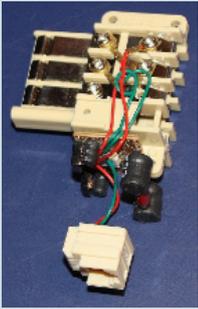
On s'intéresse à la situation d'un abonné ayant souscrit un accès ADSL tout en gardant un abonnement au téléphone classique. Le signal électrique entrant chez l'utilisateur par la ligne téléphonique est noté  $s_e(t)$ . On le modélise comme la somme d'un signal de téléphonie classique  $s_{\text{tel}}(t)$  et d'un signal ADSL  $s_{\text{ADSL}}(t)$ ,

$$s_e(t) = s_{\text{tel}}(t) + s_{\text{ADSL}}(t).$$

### II.A - Schéma équivalent d'un filtre ADSL

Le fournisseur d'accès à internet fournit à l'abonné un filtre ADSL Z100-FR qu'il doit placer entre l'arrivée de sa ligne et son téléphone. Le rôle d'un tel filtre est présenté dans le document 2 et un extrait de la notice technique du filtre est donnée document 3. On modélise le téléphone par une simple résistance  $R_T$ . Lorsque le téléphone est décroché,  $R_T = 600 \Omega$ . Lorsque le téléphone est raccroché, il se comporte en interrupteur ouvert, c'est-à-dire  $R_T = +\infty$ .

## Document 2 : Rôle d'un filtre ADSL



Un filtre ADSL est un dispositif électronique destiné à être installé sur une ligne d'abonné lorsqu'elle est utilisée simultanément pour les communications téléphoniques sur le réseau commuté et la transmission de signaux ADSL. Dans ce cas de figure, le filtre permet d'éviter que les divers équipements qui partagent l'accès à la ligne se perturbent mutuellement, par effet d'intermodulation ou de défaut d'adaptation en impédance.

Le filtre ADSL est un dispositif électronique muni de trois interfaces :

- ▷ une interface connectée à la ligne téléphonique de l'abonné, en haut à gauche sur la photo ci-contre ;
- ▷ une interface connectée à l'équipement ADSL de l'abonné (modem, routeur d'accès ou box), en bas de la photo ;
- ▷ une interface connectée à l'équipement téléphonique (ou aux équipements téléphoniques) de l'abonné (poste téléphonique, télécopieur), en haut à droite de la photo.

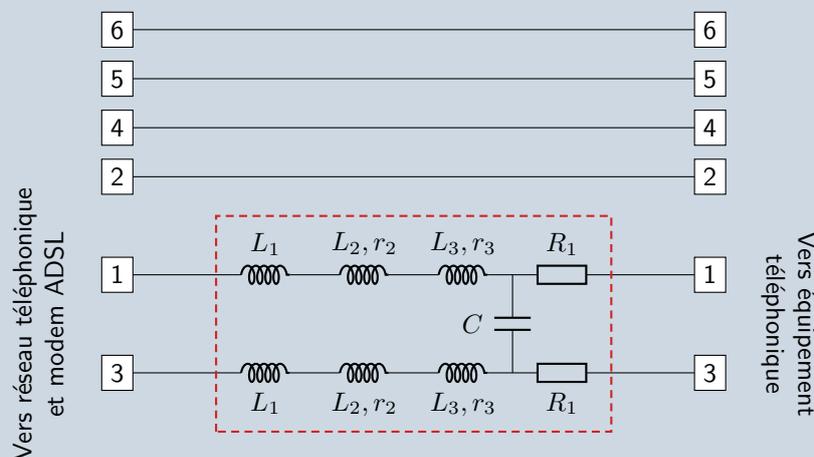
À l'intérieur du filtre, l'interface connectée à la ligne téléphonique est le plus souvent directement reliée à l'interface destinée à l'équipement ADSL. En revanche, un filtre passe-bas est installé entre l'interface connectée à la ligne et l'interface destinée aux équipements téléphoniques de l'abonné. Ce filtre passe-bas agit de deux manières :

- ▷ il atténue très fortement les signaux ADSL qui, en son absence, seraient transmis vers les équipements téléphoniques de l'abonné ;
- ▷ quel que soit l'état en-ligne ou hors-ligne (« décroché » ou « raccroché ») de ces équipements téléphoniques, il présente une impédance très élevée aux fréquences utilisées par les signaux de l'ADSL.

Le filtre permet donc d'empêcher les signaux à haute fréquence qui sont échangés entre l'équipement ADSL local et son partenaire distant (DSLAM), et qui circulent sur la ligne téléphonique de l'abonné, d'atteindre ses équipements téléphoniques et d'en perturber les communications. Il permet également de masquer l'impédance de ces équipements téléphoniques vis-à-vis de l'équipement ADSL, lequel pourrait sans cela être à son tour perturbé par cette impédance parasite connectée en parallèle de ses bornes. Finalement, le filtre permet donc de masquer la présence de l'équipement téléphonique vis-à-vis de l'équipement ADSL et vice versa.

*Extrait de Wikipedia, article « Filtre ADSL »*

## Document 3 : Schéma électrique de principe du filtre Z100-FR



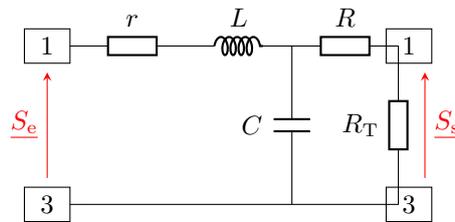
Les numéros indiquent les bornes de la prise téléphonique, le filtre étudié est encadré en pointillés. Lorsqu'une résistance est associée à une bobine, cela signifie que la bobine n'est pas idéale et doit être modélisée par la mise en série d'une bobine idéale et de la résistance indiquée. Numériquement  $L_1 = 33 \mu\text{H}$ ,  $L_2 = 220 \mu\text{H}$ ,  $L_3 = 10 \text{mH}$ ,  $r_2 = 2 \Omega$ ,  $r_3 = 21 \Omega$  et  $R_1 = 22 \Omega$ .

*Adapté de la fiche technique du filtre*

Tout au long de ce problème, sauf mention contraire, on se place en régime permanent sinusoïdal forcé. On note  $\underline{S}$  l'amplitude complexe d'un signal  $s(t) = S_m \cos(2\pi ft + \varphi)$ .

**16** - Montrer qu'en régime sinusoïdal forcé l'ensemble filtre-téléphone est équivalent au montage représenté figure 3. Donner les expressions de  $r$ ,  $R$ ,  $L$  et  $C$  en fonction des données techniques du filtre résumées dans le document 3.

Dans toute la suite, on ne raisonne plus que sur le schéma équivalent de la figure 3.



**Figure 3 – Schéma équivalent au filtre ADSL.** On note respectivement  $S_e$  l'amplitude complexe du signal entrant par la ligne téléphonique, et  $S_s$  celle du signal « de sortie » du filtre aux bornes du téléphone.

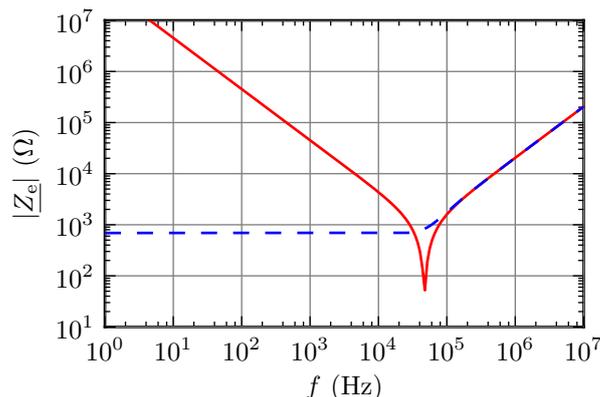
## II.B - Impédance d'entrée de l'ensemble filtre-téléphone

En conclusion du document 2, on lit que « le filtre permet donc de masquer la présence de l'équipement téléphonique vis-à-vis de l'équipement ADSL et vice versa. » L'objectif de cette partie est de justifier et préciser cette affirmation en se plaçant du point de vue du modem ADSL, à qui la présence du téléphone doit être « masquée ».

**17 -** Montrer qu'en hautes fréquences l'ensemble filtre-téléphone est équivalent à un interrupteur ouvert, quel que soit l'état (raccroché ou décroché) du téléphone.

**18 -** Montrer que, vu du modem ADSL, l'ensemble filtre-téléphone est équivalent à un dipôle d'impédance complexe  $Z_e$  dont on donnera l'expression en fonction de  $r$ ,  $R$ ,  $C$ ,  $L$  et  $R_T$ .

La figure 4 représente l'évolution du module  $|Z_e|$  en fonction de la fréquence du signal d'entrée dans les deux états possibles du téléphone.



**Figure 4 – Impédance d'entrée de l'ensemble filtre-téléphone.** La courbe en trait pointillé correspond au téléphone décroché et la courbe en trait plein au téléphone raccroché. Les courbes se superposent à droite de la figure.

**19 -** Justifier que la courbe en trait pointillé correspond au téléphone décroché et la courbe en trait plein au téléphone raccroché. Il n'est pas nécessaire d'avoir calculé  $Z_e$  pour répondre à la question.

**20 -** Dans le document 2, on lit que le filtre « présente une impédance très élevée aux fréquences utilisées par les signaux de l'ADSL ». Qu'en pensez-vous ? Qu'en serait-il sans filtre ? La réponse est simple mais doit être correctement justifiée. Conclure : quel est l'intérêt principal d'avoir choisi conçu un filtre présentant l'impédance d'entrée étudiée dans cette partie ?

## II.C - Filtrage du signal téléphonique

Plaçons-nous maintenant du point de vue du téléphone. D'après le document 2, le filtre « atténue très fortement les signaux ADSL qui, en son absence, seraient transmis vers les équipements téléphoniques de l'abonné ».

**21 -** Quel type de filtre faut-il ajouter entre l'arrivée du réseau et le téléphone pour éviter ces perturbations ? Montrer sans calcul que le filtre ADSL, dont on rappelle que le schéma équivalent est représenté figure 3, réalise bien la fonction voulue.

**22 -** Montrer qu'il est possible de déterminer la tension aux bornes du téléphone en fonction de la tension d'entrée en identifiant successivement deux ponts diviseurs de tension. Il n'est pas demandé de mener les calculs à leur terme, mais seulement d'expliquer le principe : vous pouvez par exemple vous appuyer sur des schémas pour introduire des impédances équivalentes sans pour autant les calculer explicitement.

On admet que la fonction de transfert du filtre s'écrit sous forme canonique

$$\underline{H}(f) = \frac{H_0}{1 - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2 + j\frac{f}{Qf_0}},$$

et son diagramme de Bode est représenté sur le document réponse, figure 9, page 10. Il peut être annoté pour répondre aux différentes questions, à condition de le préciser clairement dans la copie.

**23** - Quel est l'ordre du filtre utilisé? Quel est l'intérêt d'utiliser un filtre de cet ordre comparé à un filtre plus simple à mettre en œuvre mais d'ordre inférieur?

**24** - Déterminer la valeur de la pente du gain en décibel dans la limite haute fréquence.

**25** - Comment s'appelle le phénomène visible sur le diagramme de Bode du gain correspondant au téléphone raccroché? À quelle condition sur le facteur de qualité est-il visible?

**26** - Rappeler la définition de la fréquence de coupure  $f_c$ . En déterminer l'ordre de grandeur lorsque le téléphone est décroché.

**27** - Sur la figure 9, page 10 du document réponse, indiquer les domaines des fréquences de la téléphonie et de l'ADSL. Déterminer numériquement l'ordre de grandeur minimal du facteur par lequel l'amplitude des signaux ADSL est divisée en sortie du filtre.

**28** - Le phénomène discuté à la question 25, observable téléphone raccroché, est-il gênant? Justifier.

**29** - En conclusion des parties B et C, le filtre obéit-il au cahier des charges décrit dans le document 2? Une justification précise est attendue.

## II.D - Filtrage d'une sous-porteuse par un modem ADSL

On s'intéresse pour finir au principe de fonctionnement du modem ADSL. Cette partie est indépendante des précédentes, même si la lecture de l'ensemble des documents est recommandée avant de l'aborder.

### Document 4 : Codage en fréquence des signaux ADSL

Comme indiqué document 1, les signaux utilisés pour la téléphonie classique (sonnerie, numérotation multifréquences, voix) occupent une bande de fréquences qui s'étend entre 25 et 3400 Hz environ, alors que les signaux ADSL occupent une autre bande de fréquence, située au-dessus de celle utilisée pour la téléphonie, pour échanger des données numériques en parallèle avec une éventuelle conversation téléphonique.

L'ADSL exploite la technique de codage par sous-porteuses : la bande de fréquences comprise entre 0 Hz et environ 1,1 MHz est divisée en 256 intervalles de largeur  $f_a = 4,3125$  kHz. À chaque intervalle est associée une sous-porteuse, qui est un signal sinusoïdal dont l'amplitude est modulée en fonction des données à transmettre. La  $n$ -ième sous-porteuse est donc un signal de fréquence  $(n + 1/2)f_a$ . Un modem ADSL peut donc être considéré comme la mise en parallèle d'un grand nombre de modems analogiques, chacun échangeant des informations sur une bande de fréquences différente correspondant à chaque sous-porteuse :  $[0, f_a]$  pour le premier, puis  $[f_a, 2f_a]$ , ensuite  $[2f_a, 3f_a]$  etc.

Toutes les sous-porteuses d'indice 0 à 255 sont théoriquement utilisables pour transmettre des données. Toutefois, les sous-porteuses 0 à 15 ne sont en général pas exploitées en raison de la présence possible de signaux téléphoniques dans une gamme de fréquences proche des fréquences utilisées par ces sous-porteuses. Ainsi, en pratique, seules les sous-porteuses d'indice 16 à 255 sont disponibles pour la communication ADSL proprement dite.

*Adapté de Wikipedia, article « ADSL »*

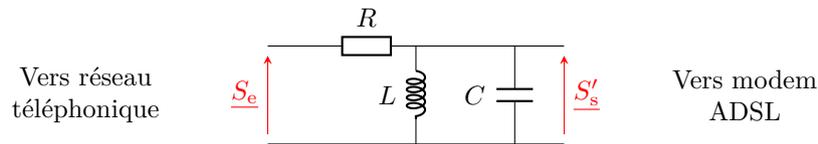
L'objectif de cette partie est de modéliser un des filtres se trouvant dans le modem ADSL, celui permettant de récupérer les signaux de la sous-porteuse ADSL de numéro 100. Le filtre utilisé est un filtre actif, mais on admet que sa fonction de transfert est analogue à celle du filtre passif représenté figure 5. **Bien que les notations soient les mêmes pour alléger les écritures, les dipôles sont différents de ceux du filtre ADSL étudié dans les parties précédentes.**

**30** - En exploitant les données du document 4, retrouver les valeurs numériques des bornes en fréquence de la bande ADSL indiquées dans le document 1.

**31** - Quelle doit être la nature du filtre? Montrer sans calcul que celui représenté figure 5 réalise la fonction demandée.

**32** - Établir l'expression de la fonction de transfert du filtre et l'écrire sous la forme

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x}\right)},$$



**Figure 5 – Filtre équivalent à celui utilisé pour filtrer une sous-porteuse du signal ADSL.** On note respectivement  $S_e$  l'amplitude complexe du signal entrant par la ligne téléphonique, et  $S'_s$  celle du signal de sortie du filtre envoyé vers le modem.

avec  $H_0$  une constante,  $Q$  le facteur de qualité,  $f_0$  la fréquence propre du filtre et  $x = f/f_0$  la fréquence réduite. Préciser en fonction de  $R$ ,  $L$  et  $C$  les expressions de  $H_0$ ,  $Q$  et  $f_0$ .

**33 -** Déterminer les équivalents asymptotiques en basse et haute fréquence du gain en décibel  $G_{dB}$  et du déphasage  $\varphi$  induit par le filtre.

**34 -** Tracer le diagramme de Bode en gain et en phase du filtre pour  $Q = 0,1$  et  $Q = 10$  sur la figure 10, page 10 du document réponse. Vous commencerez par un tracé du diagramme asymptotique avant d'en déduire l'allure du diagramme réel.

**35 -** Rappeler sans démonstration le lien entre la largeur de la bande passante à  $-3$  dB du filtre et son facteur de qualité.

**36 -** Quelles valeurs faut-il donner à  $f_0$  et  $Q$  pour que la bande passante du filtre soit égale à la bande de fréquence correspondant à la sous-porteuse numéro 100 ?

### III - AFM en mode oscillant

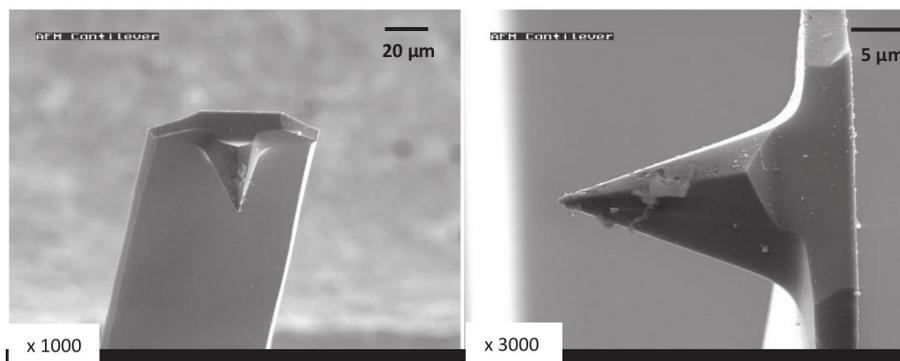
[E3a MP 2016]

La microscopie en champ proche tire profit de phénomènes physiques qui ont un effet notable sur des gammes de distances inférieures au micromètre. Il est ici proposé l'étude d'un instrument permettant d'imager des surfaces avec une résolution inférieure à 10 nm : le microscope à force atomique (AFM pour Atomic Force Microscope).

La sonde de mesure d'un AFM est principalement constituée d'un levier de dimensions micrométriques au bout duquel est fixé une pointe de forme conique. Cette pointe entre en interaction via les forces de van der Waals avec les surfaces que l'on cherche à imager. La distance pointe-surface est de l'ordre de quelques nanomètres. Le mode oscillant permet, sans contact avec l'échantillon donc sans risque de l'endommager, de mesurer le gradient de la force d'interaction entre la pointe et l'échantillon.

#### III.A - Dimensions de la pointe AFM

Les photographies de la figure 6 représentent la pointe d'un microscope à force atomique. Elles ont été obtenues avec un microscope électronique à balayage (MEB). Au lieu d'être éclairés par de la lumière visible, comme c'est le cas dans un microscope optique traditionnel, les objets sont « éclairés » par des électrons préalablement accélérés.



**Figure 6 – Images MEB d'une pointe AFM.**

**37 -** Évaluer la largeur et la hauteur de la pointe AFM ainsi que la largeur et l'épaisseur du levier. Confronter aux données de l'énoncé.

**38 -** Quelle est selon vous l'information qui figure dans l'encart blanc en bas à gauche des images sous la forme « × ... » ? Comparer aux microscopes optiques traditionnels.

**39 -** Expliquer qualitativement pourquoi on ne peut pas obtenir cette image avec un microscope optique traditionnel.

### III.B - Système pointe-levier

La pointe du microscope se situe sous un levier parallélépipédique de longueur  $L$ , de largeur  $a$  et d'épaisseur  $e$  encastré horizontalement dans une paroi. Au repos, le système levier-pointe, de masse  $m$ , est horizontal, à la hauteur  $d_0$  de l'échantillon. On néglige son poids. Quand on applique une force verticale  $\vec{F}_{\text{ext}}$  (on supposera que la force reste verticale tout au long de l'expérience) à l'extrémité libre du système, celui-ci est déformé. L'extrémité est déplacée verticalement d'une distance  $z$  que l'on appelle la flèche (voir figure 7) et se trouve alors à une distance  $d(z)$  de l'échantillon.

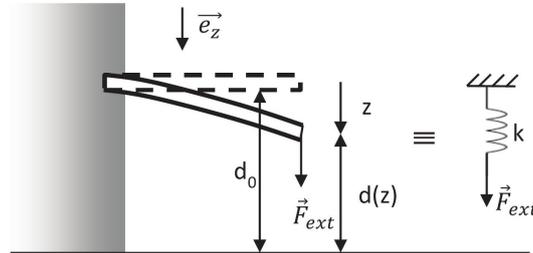


Figure 7 – Système encastré dans une paroi et modèle.

La flèche  $z$  est donnée par la relation

$$z = \frac{4L^3}{Eae^3} F_{\text{ext}}$$

où  $E = 1,0 \cdot 10^{11}$  USI est appelé module d'Young du matériau constituant le levier et la pointe et  $\vec{F}_{\text{ext}} = F_{\text{ext}} \vec{e}_z$ .

40 - Quelle est la dimension du module d'Young  $E$  ?

41 - En se plaçant à l'équilibre, montrer que l'on peut modéliser le système par un ressort à vide nulle et de constante de raideur  $k$  dont on donnera l'expression analytique en fonction de  $E$ ,  $a$ ,  $L$  et  $e$ .

42 - Déterminer numériquement  $k$  pour une fibre de longueur  $L = 2,0 \cdot 10^2 \mu\text{m}$ , de largeur  $a = 50 \mu\text{m}$  et d'épaisseur  $e = 5,0 \mu\text{m}$ .

Dans un premier temps, on ne considère pas les forces d'interactions entre la pointe et l'échantillon. Le levier et la pointe sont seuls. Le déplacement d'une céramique piézoélectrique soumet le système pointe-levier à une force excitatrice  $\vec{F}_{\text{ext}} = F_m \cos(\omega t) \vec{e}_z$ . De plus, le système est soumis à une force de frottement fluide de coefficient  $\alpha$  et à la force de rappel du ressort. On note  $z$  l'écart à la position d'équilibre. L'équation de la dynamique du mouvement du système pointe-levier s'écrit

$$\ddot{z} + \frac{\alpha}{m} \dot{z} + \frac{k}{m} z = \frac{F_m}{m} \cos(\omega t)$$

On pose  $A = F_m/m$ .

43 - Exprimer la pulsation propre  $\omega_0$  et le facteur de qualité  $Q$ .

On note  $\underline{z}(t) = \underline{Z}_0 e^{j\omega t}$  la solution particulière de l'équation de la dynamique.

44 - En déduire l'expression de l'amplitude complexe d'oscillation  $\underline{Z}_0$  en fonction de la pulsation  $\omega$ .

45 - Exprimer sa norme.

46 - Établir l'expression de la pulsation de résonance  $\omega_r$  en fonction de la pulsation propre  $\omega_0$  et du facteur de qualité  $Q$ . À quelle condition sur le facteur de qualité la résonance existe-t-elle ? On pourra poser  $|\underline{Z}_0| = A / (\omega_0^2 \sqrt{f(X)})$  où  $f$  est une fonction de la variable  $X = (\omega/\omega_0)^2$ .

47 - Sur la figure 8 est représentée l'amplitude  $|\underline{Z}_0|$  des oscillations dans le cas où il y a résonance. Reproduire cette courbe sur votre copie, et y superposer l'allure de l'amplitude  $|\underline{Z}_0|$  des oscillations dans le cas où il n'y a pas résonance. Faire apparaître la valeur atteinte par  $|\underline{Z}_0|$  en basse fréquence.

### III.C - Protocole AFM

Prenons à présent en considération, en plus de la force excitatrice, la force d'interaction entre la pointe et la surface, que l'on écrit formellement  $\vec{F}_{\text{int}} = F_{\text{int}}(z) \vec{e}_z$ . On suppose pouvoir utiliser un développement limité au premier ordre au voisinage de la position d'équilibre  $z = 0$  :

$$F_{\text{int}}(z) \simeq F_{\text{int}}(0) + \beta z \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{dF_{\text{int}}}{dz}(z=0).$$

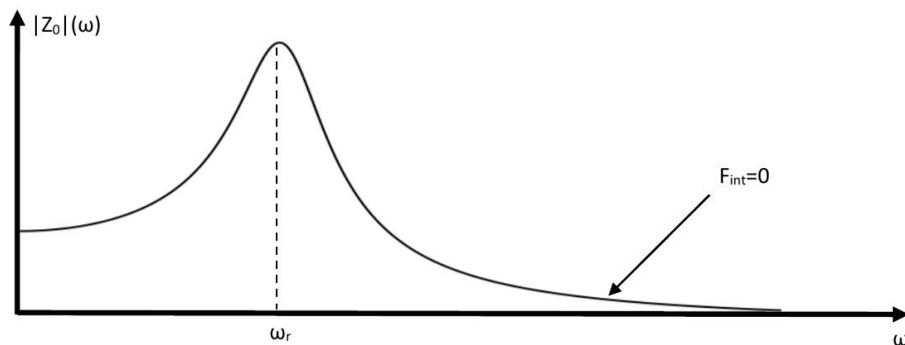


Figure 8 – Amplitude des oscillations en fonction de la pulsation.

48 - Écrire la nouvelle équation de la dynamique en présence de cette interaction.

49 - Montrer que la nouvelle pulsation propre s'écrit  $\Omega_0 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\beta}{k}}$ .

La force d'interaction peut s'écrire sous la forme

$$F_{\text{int}}(z) = \frac{HR}{6d(z)^2}$$

où  $R$  est le rayon de courbure de la pointe et  $H = 1,5 \cdot 10^{-20}$  USI est la constante de Hamacker.

50 - À l'aide de la figure 7, déterminer une relation entre  $z$ ,  $d(z)$  et  $d_0$ , puis exprimer  $\beta$ .

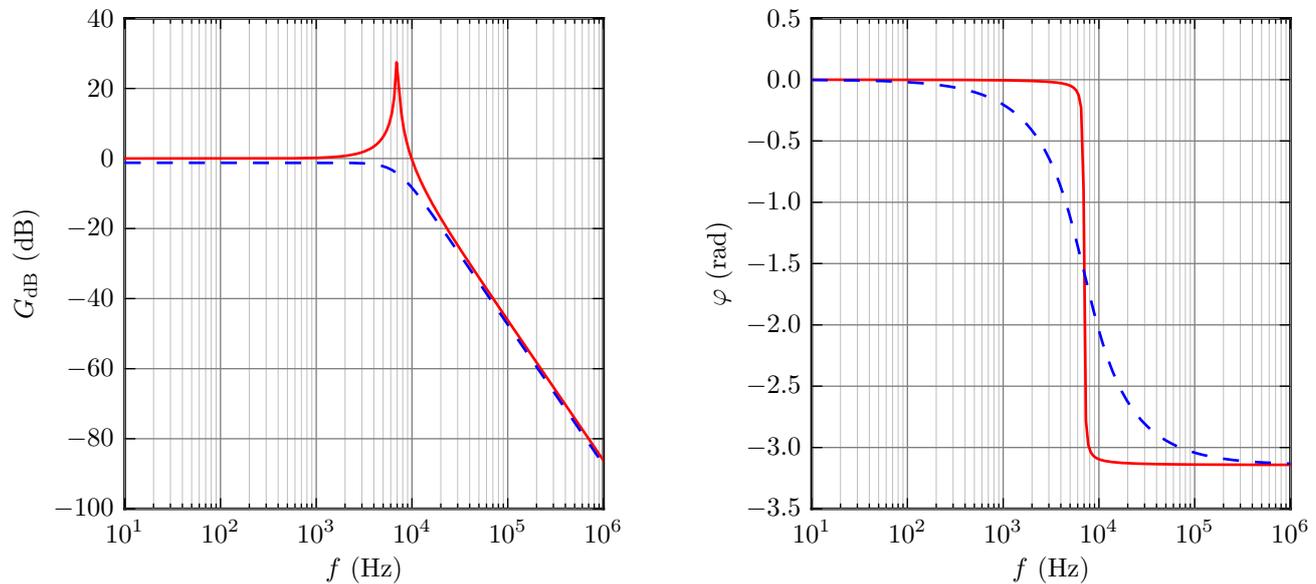
51 - L'écart relatif à la pulsation de résonance que génère l'existence d'une interaction se produit-il vers les hautes ou basses fréquences ?

52 - Sur la même figure qu'à la question 47, représenter qualitativement le cas résonant prenant désormais en compte l'interaction décrite précédemment.

## Document réponse à rendre avec la copie

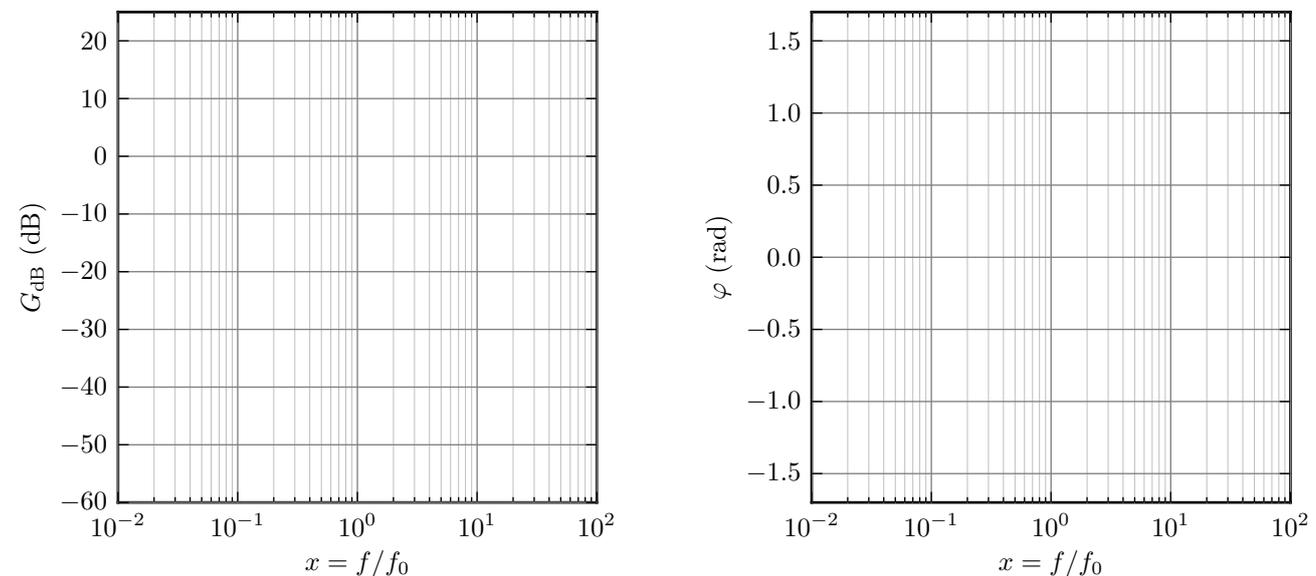
Nom du candidat :

### Question 27 : Diagramme de Bode du filtre ADSL



**Figure 9 – Diagramme de Bode du filtre ADSL.** Diagramme de Bode en gain et en phase. La courbe en trait pointillé correspond au téléphone décroché et la courbe en trait plein au téléphone raccroché. Les deux courbes se superposent sur la partie droite de la figure.

### Question 34 : Diagramme de Bode à compléter



**Figure 10 – Diagramme de Bode du filtre récupérant les signaux de la sous-porteuse ADSL de numéro 100.**