DS 9 - Corrigé

Problème 1 - Solubilité du diiode.

1/ La dissolution de 5 g dans 0,5 L d'eau conduirait à une concentration massique en diiode aqueux $c_{I_2(aq)} = 10\ g.L^{-1}$. Or la solubilité de $I_2(s)$ dans l'eau pure vaut $s = 0,34\ g.L^{-1}$: c'est donc impossible.

2/ $I_2(s) = I_2(aq)$ (0), $K_s = ?$

n	0
$n-\xi$	ξ

À l'équilibre :

– $\underbrace{[I_2]_{eq}}_{mol.L^{-1}} = \frac{\overbrace{s}^{g.L^{-1}}}{M_{I_2}}$

– $K_s = \frac{[I_2]_{eq}}{C°}$

D'où $K_s = \frac{s}{M_{I_2}C°} \Rightarrow \boxed{K_s = \frac{s}{2M_I C°}}$

A.N. : $s = 0,340\ g.L^{-1}$

$M_I = 126,9\ g.mol^{-1}$

$\Rightarrow$ $K_s = 1,34 \times 10^{-3}$.

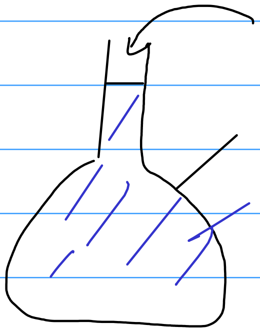
3/ $I_2(aq) + I^-(aq) = I_3^-(aq)$, $K_1° = 750$ (1)

3.1/ $I_2(s) + I^-(aq) = I_3^-(aq)$ (2) , $K_2° = ?$

(2) = (1) + (0) donc :

$\boxed{K_2° = K_1° \times K_s}$ A.N. : $K_2° = 750 \times 1,34 \times 10^{-3} \simeq 1$

3.2/



$m_{KI} = 20\ g$.

$m_{I_2} = 5\ g$

$V = 500\ mL$.

eau (l)

3.2.1/ $n_{I_2,i} = \frac{m_{I_2}}{2M_I} = 19,7 \times 10^{-2}\ mol$

$KI(s) = K^+(aq) + I^-(aq)$ totale !

$\Rightarrow n_{I^-_i} = n_{KI} = \frac{m_{KI}}{M_{KI}} = 1,20 \times 10^{-1}\ mol$

3.2.2/ Masse de diiode solubilisée.

$I_2(s)$ +	$I^-(aq)$ =	$I_3^-(aq)$
$n_{I_2,i}$	$n_{I^-,i}$	0
$n_{I_2,i}-\xi_f$	$n_{I^-,i}-\xi_f$	ξ_f

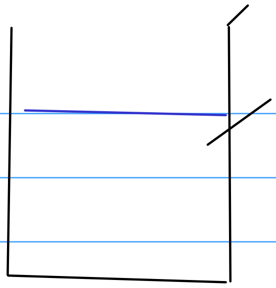
Supposons que I_2 a totalement disparu.

i-e $\xi_f = n_{I_2,i} = 1,97 \times 10^{-2}\ mol$.

Alors $Q_f = \frac{[I_3^-]_f}{[I^-]_f} = \frac{\xi_f}{n_{I^-} - \xi_f} = 0,195 < K_s$

↳ rupture d'équilibre. I_2 a totalement réagi !

Problème 2 - Séparation d'ions métalliques par précipitation sélective.



Cu^{2+}, NO_3^- à 10^{-4} mol.L^{-1}
Zn^{2+}, NO_3^- à 10^{-4} mol.L^{-1}
H_2S à 10^{-1} mol.L^{-1}

1. $Zn^{2+}_{(aq)} + S^{2-}_{(aq)} = ZnS_{(s)}$, $K = \frac{1}{K_s(ZnS)} = 10^{pK_s(ZnS)}$

2. Non précipitation si $Q_0 > K$ soit $\frac{1}{Q_0} < K_s$

avec $Q_0 = \frac{c^{\circ 2}}{[Zn^{2+}]_0[S^{2-}]_0} \Rightarrow \boxed{\frac{[Zn^{2+}]_0[S^{2-}]_0}{c^{\circ 2}} < K_s}$

Soit avec $[Zn^{2+}]_0 = C$: $\boxed{[S^{2-}]_0 < \frac{K_s c^{\circ 2}}{C}}$ C_{lim}

A.N. : $[S^{2-}]_0 < 1,58 \times 10^{-20}$ mol.L^{-1}

3/ $H_2S_{(aq)} + 2H_2O_{(l)} = S^{2-}_{(aq)} + 2H_3O^+_{(aq)}$ (1) , $K_1 = ?$

(1) = (2) + (3)

avec $H_2S_{(aq)} + H_2O_{(l)} = HS^-_{(aq)} + H_3O^+_{(aq)}$ (2) , $Ka_1 = 10^{-7}$

$HS^-_{(aq)} + H_2O_{(l)} = S^{2-}_{(aq)} + H_3O^+_{(aq)}$ (3) , $Ka_2 = 10^{-12,9}$

D'où $\boxed{K_1 = Ka_1 Ka_2}$. A.N. : $K_1 = 10^{-19,9}$

4/ LAM appliqué à (1) : $K_1 = \frac{[H_3O^+]_{eq}[S^{2-}]_{eq}}{[H_2S]_{eq} C^\circ}$

avec $[H_2S] = c' = 0,1$ mol.L^{-1} cste et $[H_3O^+] = 10^{-pH}$

$\Rightarrow [S^{2-}]_{eq} = K_1 \times 10^{pH} c'$

D'où $[S^{2-}]_{eq} < C_{lim} \Leftrightarrow K_1 \times 10^{pH} c' < C_{lim}$.

$\Leftrightarrow \boxed{pH < pKa_1 + pKa_2 - \log c' + \log C_{lim}}$

A.N. : $pH < 0,55$.

5/ CuS précipite toujours. Pour séparer Cu^{2+} et Zn^{2+}, il faut se placer à $pH < 0,5$ puis filtrer la solution : le filtrat contient Zn^{2+}, le précipité contient Cu^{2+} (dans CuS).

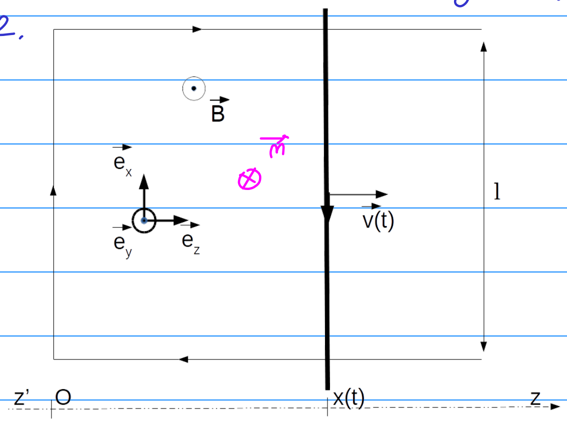
Problème 3 - Haut-parleur électrodynamique.

1. Étude temporelle

1.1. Le haut-parleur convertit de l'énergie électrique en énergie mécanique. via l'induction électromagnétique et les forces de Laplace.

1.2.1. La fem e(t) résulte du mvt de la bobine à travers le champ magnétique $\vec{B}$.

1.2.2.



$$e(t) = -\frac{d\phi}{dt} \quad \text{avec} \quad \phi = \iint \vec{B}\cdot\vec{dS} = -Blx.$$

$$\Rightarrow \quad e(t) = +Bl\dot{x} = +Bl\,v(t)$$

1.2.3. $u(t) = R\,i(t) + L\frac{di}{dt} - e(t)$

chute de tension due à la résistance de la bobine

fem d'auto-induct°

fem d'induct° due au champ extérieur

1.3. $\vec{df_L} = i\,\vec{dl}\wedge\vec{B}$ avec $\vec{dl} = dl\,\vec{u_\theta}$ et $\vec{B} = B\,\vec{u_r}$

$\Rightarrow \quad \vec{df_L} = i\,dl\,B\,\vec{u_\theta}\wedge\vec{u_r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{df_L} = -i\,dl\,B\,\vec{u_z}}$

1.4. $m\frac{d\vec{v}}{dt} = -i(t)Bl\,\vec{u_z} - kz\,\vec{u_z} - \lambda\vec{v}$

force de Laplace

force de rappel de la suspension

dissipation mécanique d'énergie

avec $\frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{z}\,\vec{u_z}$ et $\vec{v} = \dot{z}\,\vec{u_z}$

$\boxed{m\ddot{z} = -i(t)Bl - kz - \lambda\dot{z}}$ Équat° mécanique.

2. Régime sinusoïdal forcé

2.1. Equat° électrique

$$\boxed{\underline{u}(t) = R\,\underline{i} + jL\omega\,\underline{i} - B\ell\, j\omega\,\underline{z}} \qquad (E)$$

Equat° mécanique

$$\boxed{-m\omega^2\underline{z} = -\underline{i}\,B\ell - k\underline{z} - j\lambda\omega\underline{z}} \qquad (M)$$

2.2. $(M) \Rightarrow \underline{z} = \underline{i} \times \dfrac{B\ell}{m\omega^2 - k - j\lambda\omega}$

$(E) \Rightarrow \underline{u} = \left(R + jL\omega + \dfrac{B^2\ell^2 j\omega}{m\omega^2 - k - j\lambda\omega}\right)\underline{i}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{Z} = R + jL\omega + \frac{B^2\ell^2 j\omega}{m\omega^2 - k - j\lambda\omega}}$$

2.3. $\underline{Z} = \underline{Z_e}(\omega) + \underline{Z_m}(\omega)$ avec $\boxed{\underline{Z_e}(\omega) = R + jL\omega}$

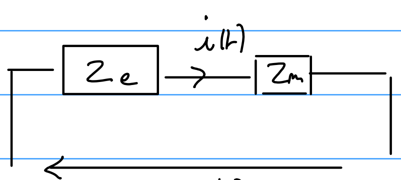
$$\boxed{\underline{Z_m}(\omega) = -\frac{B^2\ell^2 j\omega}{m\omega^2 - k - j\lambda\omega}}$$

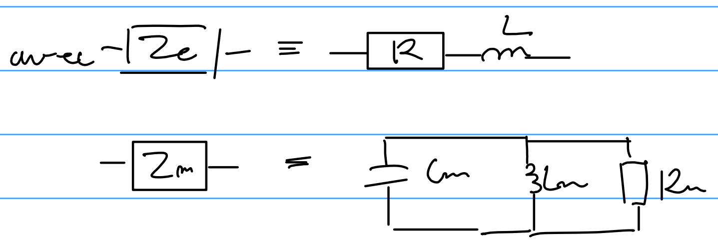
2.4. $\underline{Y_m}(\omega) = -\dfrac{m\omega^2}{B^2\ell^2 j\omega} + \dfrac{k}{B^2\ell^2 j\omega} + \dfrac{B^2\ell^2}{\lambda}$

$$\underline{Y_m}(\omega) = +j\frac{m}{B^2\ell^2}\omega + \frac{1}{j\frac{B^2\ell^2}{k}\omega} + \frac{B^2\ell^2}{\lambda}$$

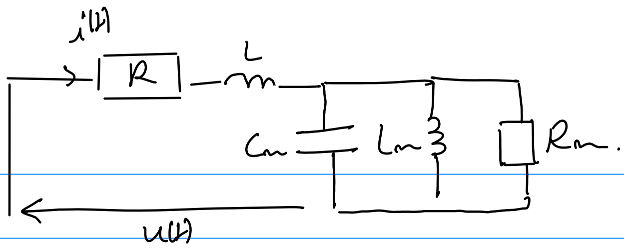
Soit $\boxed{\underline{Y_m} = jC_m\omega + \dfrac{1}{jL_m\omega} + \dfrac{1}{R_m}}$ avec $\boxed{C_m = \dfrac{m}{B^2\ell^2} \quad L_m = \dfrac{B^2\ell^2}{k} \quad R_m = \dfrac{\lambda}{B^2\ell^2}}$

2.5. Schéma équivalent du haut-parleur





D'où :



2.6. $\underline{Z}(\omega) = R_T + jX_T$

$R_T = \mathcal{R}e(\underline{Z}_e) + \mathcal{R}e(\underline{Z}_m)$

avec $\mathcal{R}e(\underline{Z}_e) = R$

$$\mathcal{R}e(\underline{Z}_m) = \mathcal{R}e(1/\underline{Y}_m) = \mathcal{R}e\left(\frac{\underline{Y}_m^*}{\|\underline{Y}_m\|^2}\right) = \frac{\mathcal{R}e(\underline{Y}_m^*)}{\|\underline{Y}_m\|^2}$$

$$= \frac{1/R_m}{1/R_m^2 + \left(C_m\omega - \frac{1}{L_m\omega}\right)^2} = \frac{R_m}{1 + R_m^2\left(C_m\omega - \frac{1}{L_m\omega}\right)^2}$$

D'où : $$\boxed{R_T = R + \frac{R_m}{1 + R_m^2\left(C_m\omega - \frac{1}{L_m\omega}\right)^2}}$$

2.7. $R = \lim\limits_{\omega \to 0} R_T = \lim\limits_{\omega \to +\infty} R_T$ On lit $R_T = 8\ \Omega$

Pic de résonance pour $\omega_0 \approx 550\ Hz$ soit $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 88\ Hz$

Analytiquement, R_T max pour $\left(C_m\omega_0 - \frac{1}{L_m\omega_0}\right) = 0 \Leftrightarrow \boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_m C_m}}}$

A.N. $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{2,5\times10^{-4}\times 12,8\times10^{-3}}} \approx 88,9\ Hz$ Cohérent avec la valeur lue.

3. Etude énergétique

3.1) $u(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt} - e(t)\, i(t) \Rightarrow u(t)i(t) = Ri^2(t) + L\frac{di}{dt}i - e(t)\, i(t)$

$$\boxed{u(t)i(t) = P_J(i(t)) + \frac{dE_{mag}}{dt} + P_L(v(t))}$$

avec $P_J(i(t)) = Ri^2(t)$: puissance dissipée par effet Joule

$P_L(v(t)) = -e(t)i(t)$: puissance reçue par induction

$E_{magn} = \frac{1}{2}L\, i^2(t)$: énergie magnétique stockée dans la bobine

3.2. Bilan de puissance mécanique

$\cdot \vec{v}$ $\quad m\frac{d\vec{v}}{dt} = -i(t)B\ell\vec{u_z} - kz\vec{u_z} - \lambda\vec{v}(t)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = -i(t)B\ell v - kz\dot{z} - \lambda v^2 = \frac{d}{dt}E_c = -i(t)B\ell v - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kz^2\right) - \lambda v^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{dE_c}{dt} + P_A(v(t)) + \frac{dE_{pe}}{dt} = P_L(v(t))}$$

avec $E_c = \frac{1}{2}mv^2$: énergie cinétique de l'équipage mobile

$E_p = \frac{1}{2}kz^2$: énergie potentielle élastique

$P_A(v(t)) = \lambda v^2$: puissance dissipée par les forces de frottement (en fait puissance perdue par émission de l'onde sonore)

$P_L(v(t)) = -i(t)B\ell v$: puissance reçue des forces de Laplace

3.3. $\begin{cases} P_L(v(t)) = \dfrac{d\overbrace{(E_c+E_p)}^{E_m}}{dt} + P_A(v(t)) \\ u(t)i(t) = P_J(i(t)) + \dfrac{dE_{mag}}{dt} + P_L(v(t)) \end{cases} \Rightarrow \boxed{u(t)i(t) = \dfrac{dE_m}{dt} + \dfrac{dE_{mag}}{dt} + P_A(t) + P_J(t)}$

La puissance reçue par le haut-parleur est pour partie stockée sous forme magnétique et mécanique et perdue sous forme thermique et mécanique.

3.4. $$\langle P_S(t)\rangle = \langle u(t)\,i(t)\rangle = \underbrace{\left\langle \frac{dE_m}{dt}\right\rangle}_{\substack{0 \text{ sur une période} \\ \text{car mvt périodique}}} + \underbrace{\left\langle \frac{dE_{mag}}{dt}\right\rangle}_{\substack{0 \text{ sur une période} \\ \text{car } i(t) \text{ périodique.}}} + \underbrace{\langle P_J(i(t))\rangle + \langle P_A(v(t))\rangle}_{R\langle i^2\rangle + \lambda\langle v^2\rangle}$$

D'où en moyenne : $\boxed{\langle P_S(t)\rangle = R\langle i^2\rangle + \lambda\langle v^2\rangle}$

$P_u(t)$: puissance emportée par l'onde sonore générée par le haut-parleur.

Rendement : $\boxed{\eta = \dfrac{P_u(t)}{\langle P_S(t)\rangle} = \dfrac{\langle P_S(t)\rangle - R\langle i^2\rangle}{\langle P_S(t)\rangle}}$

3.5/ $P_S(t) = u(t)\,i(t) = R_T i(t)^2 + L\frac{di}{dt}i(t) \Rightarrow \langle P_S(t)\rangle = R_T\langle i^2(t)\rangle + \underbrace{\left\langle L\frac{di}{dt}i(t)\right\rangle}_{=0}$

$\Rightarrow \langle P_S(t)\rangle = R_T I_{eff}^2$

d'où : $\eta = \dfrac{R_T I_{eff}^2 - R I_{eff}^2}{R_T I_{eff}^2} \Leftrightarrow \boxed{\eta = \dfrac{R_T - R}{R_T}}$

3.6. Rendement max pour $\omega_0 \approx 550 \text{ rad.s}^{-1}$ soit $\boxed{f = f_0 \approx 89 \text{ Hz}}$

A la question 2.6, on a vu que $R_T = R + \dfrac{R_m}{1 + R_m^2\left(C_m\omega - \frac{1}{L_m\omega}\right)}$

était maximale pour $f = f_0$.

Or $\eta = 1 - \dfrac{R}{R_T}$ donc η est max pour $f = f_0$: cohérent !

3.7. Bande passante du haut-parleur en terme de rendement :

$\sim \left[\frac{400}{2\pi}, \frac{600}{2\pi}\right] \sim [60 \text{ Hz}, 100 \text{ Hz}]$ restitue les graves. avec une bonne efficacité.

Domaine audible : $\underline{[20 \text{ Hz}, 20 \text{ kHz}]}$

3.8. Il faut équiper les enceintes de haut-parleur qui restitue efficacement les médium et les graves en complément.