



DS7 – CORRIGÉ

D.Malka – MPSI 2015-2016 – Lycée Saint-Exupéry

25.03.2016

Problème 1 – Une pile au lithium

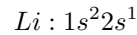
1. Le lithium et ses propriétés

1.1 L'élément lithium

L'isotope le plus abondant (92,5%) sur terre est ${}^7_3\text{Li}$.

1.1.1 Le lithium ${}^7_3\text{Li}$ est constitué de 3 protons et 4 neutrons. Sa masse molaire : $M_{\text{Li}} \approx 70.\text{g.mol}^{-1}$.

1.1.2 Configuration électronique de l'atome de Lithium.



1.1.3 En perdant un électron, le lithium atomique forme l'ion lithium $\text{Li}^+ : 1s^2$, très stable car sa couche de valence (1s) est saturée.

1.1.4 Le lithium est un alcalin. C'est un très bon réducteur.

1.2 Structure cristalline

À une température ordinaire, le lithium cristallise dans un système cubique centré (fig.1) de paramètre de maille $a = 0,35$ nm.

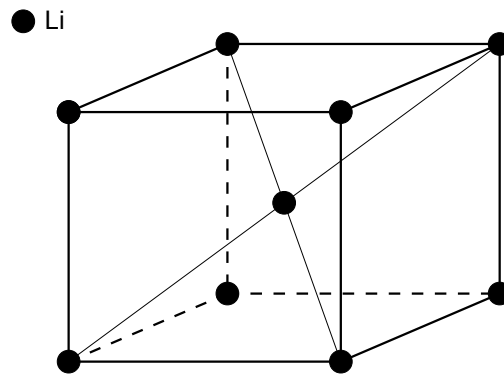


FIGURE 1 – Réseau cubique centré

1.2.1 Contact entre atomes de Li plus proche voisins suivant la diagonale du cube :

$$4r_{\text{Li}} = \sqrt{3}a$$

$$\Leftrightarrow r_{\text{Li}} = \frac{\sqrt{3}a}{4}$$

$$\text{A.N. : } r_{\text{Li}} = 152 \text{ pm}$$

1.2.2 Masse volumique.

$$\rho = \frac{2m_{Li}}{a^3}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\rho = \frac{2M_{Li}}{N_A a^3}}$$

A.N. : $\rho = 542,4 \text{ kg.m}^{-3}$

1.2.3 Compacité du lithium.

$$c = \frac{2 \times \frac{4}{3} \pi r_{Li}^3}{a^3}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{c = \frac{8\pi r_{Li}^3}{3a^3}}$$

A.N. : $c = 66\%$

2. Structure du chlorure de thionyle

Formule de Lewis pour le chlorure de thionyle $SOCl_2$.

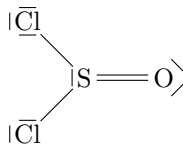
S : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$: 6 électrons de valence

O : $1s^2 2s^2 2p^6$: 6 électrons de valence

Cl : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^7$: 7 électrons de valence

Nombre total d'électrons de valence : $N = 6 + 6 + 2 \times 7 = 26$

Doublets électroniques à placer sur la molécules : $D = \frac{N}{2} = 13$



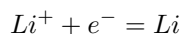
3. La pile au lithium

Une modélisation simple d'une pile au lithium est proposée ici. Une des électrodes est constituée de lithium $Li(s)$, l'autre est une électrode liquide qui joue en même temps le rôle d'électrolyte.

3.1 Électrode de lithium

À 25°C , on donne $\frac{RT}{\mathcal{F}} \ln 10 \approx 0,06 \text{ V}$ et $E^\circ(Li^+/Li) = -3,03 \text{ V}$.

3.1.1 Formule de Nernst :



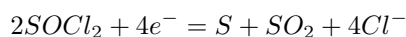
$$\boxed{E(Li^+/Li) = E^0(Li^+/Li) + 0,06 \log \left(\frac{[Li^+]}{c^0} \right)}$$

A.N. : pour $[Li^+] = 0,01 \text{ mol.L}^{-1}$, $E(Li^+/Li) = -3,15 \text{ V}$

3.1.2 Le lithium est très réducteur. Il subit donc une oxydation. L'électrode de lithium est donc l'anode.

3.2 Électrode liquide au chlorure de thionyle ($SOCl_2$)

Elle est constituée d'une électrode de carbone poreux remplie de chlorure de thionyle. Ce dernier est à la fois le solvant et l'électrolyte. La demi-équation est :



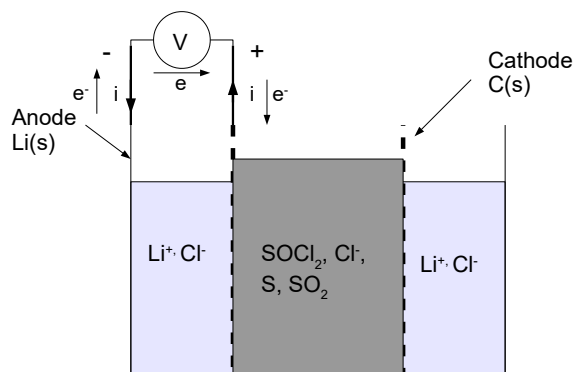
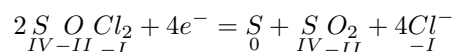


FIGURE 2 – Représentation schématique de la pile au lithium

3.2.1

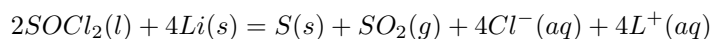


3.2.2 Le soufre subit une réduction donc l'électrode liquide est la cathode.

3.3 Bilan de la pile

3.3.1 Schéma de la pile : fig.2.

3.3.2 Equation-bilan de la réaction de la pile.



$$\text{Constante d'équilibre : } K = 10^{4 \frac{E^0(SOCl_2/S) - E^0(Li^+/Li)}{0,06}} \approx K = 10^{4 \frac{E - E^0(Li^+/Li)}{0,06}}.$$

A.N. : $K = 2,15 \cdot 10^{245}$: la réaction est quasi-totale.

3.3.3 F.é.m de la pile.

$$e = E - E(Li^+/Li)$$

A.N. : $e = 3,8 V$. C'est plus élevé que la f.e.m. d'une pile alcaline (1,5 V).

3.3.4 Masse de l'électrode de lithium.

La capacité Q de la pile est donnée par :

$$Q = zN_A \xi_f e$$

avec $z = 4$ le nombre d'électrons échangés dans l'équation-bilan, e la charge élémentaire et ξ_f l'avancement final de la réaction.

Si on suppose que le lithium métallique est en défaut alors :

$$n_{Li}^f = 0$$

$$\Leftrightarrow n_{Li}^i - 4\xi_f = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{m_{Li}}{M_{Li}} = 4\xi_f$$

$$\Leftrightarrow m_{Li} = 4\xi_f M_{Li}$$

$$\text{avec } \xi_f = \frac{Q}{zN_A e} \text{ d'où :}$$

$$m_{Li} = 4 \frac{Q}{z \mathcal{N}_A e} M_{Li}$$

A.N. : $m_{Li} = 58,9 \text{ mg}$

3.4 Il faut jeter les piles usagées dans un conteneur spécial en vue d'un traitement ultérieur.

Problème 2 – Comment faire un looping ... sans se louper

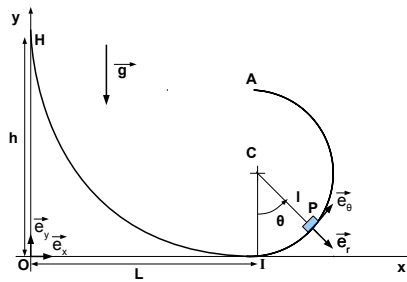


FIGURE 3 – Rampe de looping

1. Les seules forces s'exerçant sont le poids et la réaction normale. Or le poids est conservatif et le travail de la réaction normal est nul. Le système est donc conservatif.
2. Etude mécanique du problème.

Système : point matériel $P(m)$

Référentiel : terrestre galiléen

Bilan des forces :

- poids $\vec{P} \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$
- réaction $\vec{R} \perp d\vec{l}$.

Conservation de l'énergie mécanique entre H et P :

$$E_m(P) = E_m(H)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_P^2 + mgz_P + K = \frac{1}{2}mv_H^2 + mgh + K$$

avec $v_H = 0$ et $z_P = l(1 - \cos \theta)$:

$$v_P = \sqrt{2mg(h - l(1 - \cos \theta))}$$

3. Pour un mouvement circulaire :

$$v_P = l\dot{\theta}$$

4. Appliquons le principe fondamentale de la dynamique au point matériel :

$$m\vec{a}(P)|_R = \vec{R} + \vec{P}$$

Projetons cette relation dans la base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$:

$$\overrightarrow{v(P)} = l\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{a(P)} = l\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - l\dot{\theta}^2\vec{e}_r = l\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - \frac{v(P)^2}{l}\vec{e}_r$$

d'où :

$$\begin{cases} ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta & \text{suivant } \vec{e}_\theta \quad (1) \\ -m\frac{v(P)^2}{l} = R(\theta) + mg \cos \theta & \text{suivant } \vec{e}_r \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow R(\theta) = -m\frac{v(P)^2}{l} - mg \cos(\theta)$$

$$R(\theta) = -mg \left[\frac{2h}{l} + 3 \cos(\theta) - 2 \right]$$

5. Tant que le point P est en contact avec le rail, $R(\theta) < 0$.
6. Pour atteindre A , le point matériel doit demeurer en contact avec le rail c'est à dire que $R(\theta)$ ne doit pas s'annuler avant A . $R(\theta)$ est une fonction décroissante de θ donc si $R(A) \geq 0$ alors cette relation est vérifiée pour tout point de la portion IA .

Le point matériel arrive en $A(\theta = \pi)$ si :

$R(\pi) \geq 0$ ce qui donne $h \geq h_m$ avec

$$h_m = \frac{5}{2}l$$

7. $R_I = R(\theta = 0, h = \frac{5}{2}l)$

On trouve facilement :

$$R_I = 6mg$$

8. $v_A = v_P(\theta = \pi, h = h_m)$

En utilisant l'expression de la vitesse déterminée en 1), on obtient :

$$v_A = \sqrt{gl}$$

9. A partir du point A , le point matériel est en chute libre avec les conditions initiales suivantes :
à $t = 0$, $y_i = 2l$, $x_i = L$ et $\vec{v}_i = v_A \vec{e}_x$.

Appliquons le principe fondamental de la dynamique au point matériel : $m\vec{a}(P) = \vec{P}$.

On obtient :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = -mg \\ \dot{x} = -v_A \\ \dot{y} = -gt \\ x(t) = -v_A t + L \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 2l \end{cases}$$

Déterminons l'équation de la trajectoire.

$t = \frac{L-x}{v_A}$, en remplaçant dans l'expression $y(t)$, on obtient :

$$y(x) = -\frac{1}{2}g \frac{(L-x)^2}{v_A^2} + 2l$$

soit

$$y(x) = -\frac{1}{2} \frac{(L-x)^2}{l} + 2l$$

Le point matériel repasse par l'axe Ox lorsque $y(x_0) = 0$. La résolution de cette équation donne :

$$x_0 = L - 2l$$

Problème 3 – Piège de Paul pour des ions

1. Préliminaire

- 1.1 D'un point de vue dimensionnel, on a $\phi = MT^{-2}$. En déduire la dimension de a et b .
Par homogénéité de l'équation (1) :

$$[a] = [b] \quad \text{et} \quad [\phi a]L^2 = [E]$$

D'où :

$$[a] = [b] = \frac{[E]}{[\phi]L^2} = \frac{ML^2T^{-2}}{MT^{-2}L^2}$$

$$[a] = [b] = \emptyset$$

a et b sont des nombres sans dimension.

- 1.2 Le système {masse+ressort} est l'archétype de l'oscillateur harmonique.

2. Etude d'un mouvement unidimensionnel

- 2.1 Montrons que dans le cas où $K > 0, x = 0$ est une position d'équilibre stable.

L'énergie potentielle dans laquelle est plongé le point matériel est :

$$E_p = Kx^2$$

$$\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\right)_{x=0} = 0$$

Donc $x = 0$ est une position d'équilibre.

De plus :

$$\left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}\right)_{x=0} = K > 0$$

Donc $x = 0$ est une position d'équilibre stable.

Trajectoire de phase : fig.4.

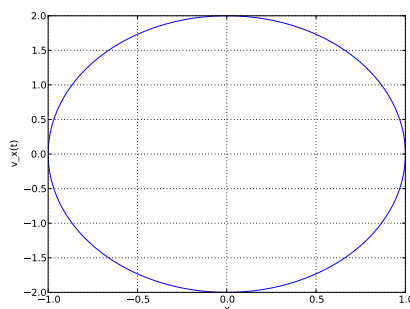
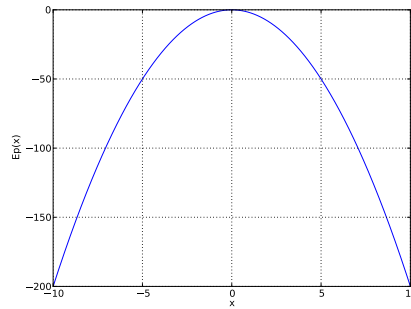


FIGURE 4 – Trajectoire de phase pour $K > 0$

- 2.2 $x = 0$ est un maximum d'énergie potentielle c'est-à-dire une position d'équilibre instable.
2.3 Le point M est piégé pour $K > 0$ car l'énergie potentielle diverge vers $+\infty$ à l'infini ce qui borne nécessairement la trajectoire de la particule, quelle que soit son énergie mécanique. Lorsque $K < 0$, l'énergie potentielle diverge vers $-\infty$ à l'infini ce qui autorise la particule à partir à l'infini (fig.5).

3. Etude du régime statique appliqué à une particule de mouvement tridimensionnel

FIGURE 5 – Mouvement 1-D – Allure de l'énergie potentielle pour $K < 0$

3.1 Exprimons la force \vec{F} subit par la particule dans le piège. \vec{F} dérive de l'énergie potentielle :

$$E_p = \phi_0(ax^2 + ay^2 + bz^2)$$

donc :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}E_p$$

$$\boxed{\vec{F} = \phi_0 \begin{pmatrix} 2ax \\ 2ay \\ 2bz \end{pmatrix}}$$

3.2 Appliquons la relation fondamentale de la dynamique à la particule dans le référentiel d'étude supposé galiléen :

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

Par projection sur les vecteurs de la base cartésiennes, on obtient :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{2a}{m}x = 0 & (1) \\ \ddot{y} + \frac{2a}{m}y = 0 & (2) \\ \ddot{z} + \frac{2b}{m}z = 0 & (3) \end{cases}$$

3.3 On admet qu'en conséquence des équations fondamentales de l'électromagnétisme, dans ce cas statique, a et b doivent vérifier la relation :

$$2a + b = 0$$

Dans ce cas, soit :

- $a \geq 0 \Rightarrow b = -2a \leq 0$. Les solutions des équations (1) et (2) sont alors des fonctions sinusoïdales donc la particule est piégée suivant les directions Ox et Oy . Mais la solution de l'équation (3) est du type $z(t) = A \exp\left(\sqrt{\frac{2b}{m}}t\right) + B \exp\left(-\sqrt{\frac{2b}{m}}t\right)$ qui diverge avec le temps. La particule n'est pas piégée suivant Oz et peut s'échapper. Globalement, la particule n'est donc pas piégée par ce piège!
- $a \leq 0 \Rightarrow b = -2a \geq 0$. Un raisonnement analogue au précédent permet de conclure que la particule est confinée suivant Oz mais pas suivant Ox et Oy .

Ainsi la particule ne peut pas être piégée de cette façon.

4. Etude du régime dynamique appliqué à une particule de mouvement tridimensionnel

4.1 Par analyse dimensionnelle, déterminons fréquence ω_0 caractéristique du piège en fonction ϕ_0 et m .

$$[\phi_0] = MT^{-2} \quad \text{et} \quad [m] = M$$

D'où :

$$\left[\sqrt{\frac{\phi_0}{m}} \right] = T^{-1}$$

Donc on peut proposer $\omega_0 = \sqrt{\frac{\phi_0}{m}}$ comme pulsation caractéristique du piège.

4.2

$$E_{p,eff} = \frac{m\omega_0^4}{16\Omega^2}(x^2 + y^2 + 4z^2)$$

Equations différentielles vérifiées par x , y et z :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{\omega_0^4}{8\Omega^2}x = 0 \\ \ddot{y} + \frac{\omega_0^4}{8\Omega^2}y = 0 \\ \ddot{z} + \frac{\omega_0^2}{2\Omega^2}z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_x^2 x = 0 & (4) & \omega_x = \frac{\omega_0^2}{2\sqrt{2}\Omega} \\ \ddot{y} + \omega_y^2 y = 0 & (5) & \omega_y = \frac{\omega_0^2}{2\sqrt{2}\Omega} \\ \ddot{z} + \omega_z^2 z = 0 & (6) & \omega_z = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{2}\Omega} \end{cases}$$

4.3 Comme ω_x , ω_y et ω_z , les équations (4), (5) et (6) sont des équations d'oscillateurs harmoniques. Les solutions sinusoïdales et donc bornées : la particule est confinée dans les trois directions de l'espace.

4.4 L'intégration des équations (4), (5) et (6) entre 0 et t conduit à :

$$\begin{cases} x(t) = A_x \cos(\omega_x t) + B_x \sin(\omega_x t) \\ y(t) = A_y \cos(\omega_y t) + B_y \sin(\omega_y t) \\ z(t) = A_z \cos(\omega_z t) + B_z \sin(\omega_z t) \end{cases}$$

Les conditions initiales sur la positions imposent :

$$\begin{cases} x(t=0) = 0 \\ y(t=0) = 0 \\ z(t=0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_x = 0 \\ A_y = 0 \\ A_z = 0 \end{cases}$$

Les conditions initiales sur la vitesse imposent :

$$\begin{cases} \dot{x}(t=0) = v_0 \\ \dot{y}(t=0) = v_0 \\ \dot{z}(t=0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_x B_x = v_0 \\ \omega_y B_y = 0 \\ \omega_z B_z = v_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B_x = v_0 \frac{2\sqrt{2}\Omega}{\omega_0^2} \\ B_y = 0 \\ B_z = v_0 \frac{\sqrt{2}\Omega}{\omega_0^2} \end{cases}$$

D'où les solutions, en posant $2\omega = \omega_z = 2\omega_x$:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \frac{2\sqrt{2}\Omega}{\omega_0^2} \sin(\omega t) \\ y(t) = 0 \\ z(t) = v_0 \frac{\sqrt{2}\Omega}{\omega_0^2} \sin(2\omega t) \end{cases}$$

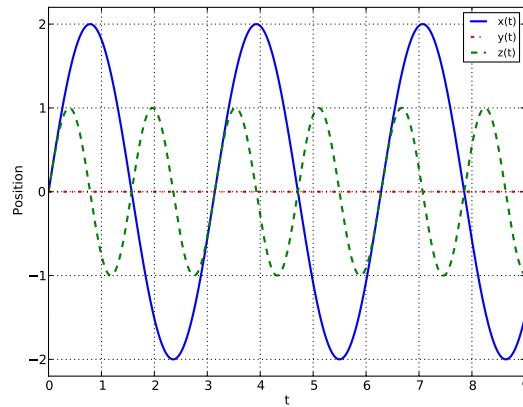


FIGURE 6 – Trajectoire de l'ion dans le piège de Paul

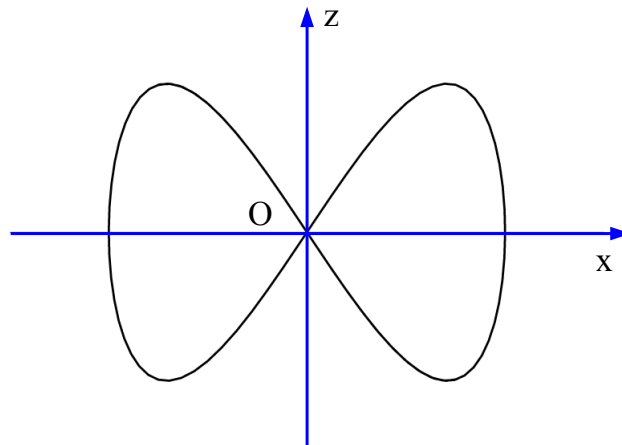


FIGURE 7 – Trajectoire de l'ion dans le piège de Paul

4.5 Mouvement de l'ion suivant les trois directions de l'espace : fig.6

4.6 L'allure de la trajectoire de la particule est tracée fig.7.

La période globale du mouvement est la plus grande parmi T_x et T_z . C'est donc $T_x = 2T_z$. Ainsi sur une période T , $x(t)$ atteint deux extrema tandis que $z(t)$ en rencontre quatre. Ainsi l'axe horizontal est Ox et l'axe vertical est Oz .

Problème 4 – Le pendule conique

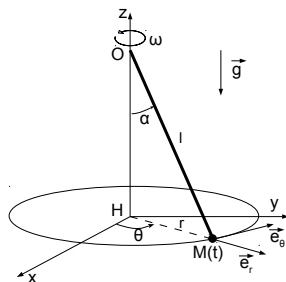


FIGURE 8 – Pendule conique

1. Montrons que la force centrifuge \vec{f}_e dérive d'une énergie potentielle.

$$\delta W(\vec{f}_e) = \vec{f}_e \cdot d\vec{l} = m\omega^2 r \cdot dr = -d\left(-\frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + K\right) = -dE_{p_e}(r)$$

Donc la force centrifuge \vec{f}_e est conservative et dérive de l'énergie potentielle :

$$E_{p_e}(r) = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + K$$

2. Les seules forces travaillant, \vec{P} et \vec{f}_e sont conservatives (la tension du fil est orthogonale à la trajectoire quelque qu'elle soit si $l = cste$) donc le système est conservatif. Son énergie potentielle s'écrit :

$$E_p = E_{p_e} + E_{p_p}$$

$$E_p = mgz - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + K$$

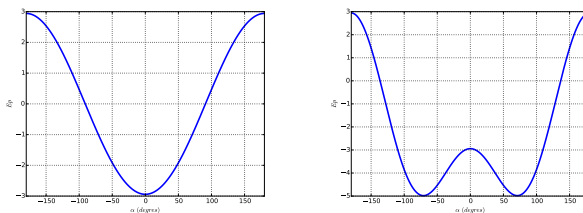
avec $r = l \sin \alpha$ et $z = -l \cos \alpha$:

$$E_p = -mgl \cos \alpha - \frac{1}{2}m\omega^2 l^2 \sin^2 \alpha + K$$

avec $E_{p_0} = -mgl$ et $\omega_0 = \frac{g}{l}$:

$$E_p(\alpha) = E_{p_0} \left(\cos \alpha + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \sin^2 \alpha \right)$$

3. Sur la figure 9 est représenté cette énergie potentielle pour différentes valeurs des paramètres du problème.



(a) $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$, $l = 30 \text{ cm}$, $\omega = 1 \text{ rad.s}^{-1}$, $m = 1 \text{ kg}$ (b) $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$, $l = 30 \text{ cm}$, $\omega = 10 \text{ rad.s}^{-1}$, $m = 1 \text{ kg}$

FIGURE 9 – Energie potentielle

Figure (a) : $\alpha = 0$ est une position d'équilibre stable, $\alpha = \pi$ est une position d'équilibre instable.

Figure (b) : $\theta = 0$ est une position d'équilibre instable, $\alpha = \pi$ est une position d'équilibre instable. Il existe deux positions d'équilibre stables symétriques différentes de 0 (ici environ 70°)

A paramètres l, g, m fixés soit à pulsation ω_0 fixé, quand ω augmente, les positions d'équilibre changent (lieu, stabilité).

On se replace dans le cas général pour la suite.

4. Existence de positions d'équilibre suivant la valeur de ω .

Les positions d'équilibre vérifient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial Ep}{\partial \alpha} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow Ep_0 \left(-\sin \alpha + \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \times 2 \cos \alpha \sin \alpha \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow -Ep_0 \sin \alpha \left(-1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \times \cos \alpha \right) &= 0 \end{aligned}$$

Les solutions sont :

– dans tous les cas :

$$\sin \alpha = 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 0[\pi]}$$

– si $\omega > \omega_0$:

$$\cos \alpha = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \arccos \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)}$$

5. Stabilité de ces positions suivant la valeur de ω .

Calculons la dérivée seconde de l'énergie potentielle :

$$\frac{\partial^2 Ep}{\partial \alpha^2} = Ep_0 \left(-\cos \alpha + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \cos \alpha \right)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 Ep}{\partial \alpha^2} = Ep_0 \left(-\cos \alpha + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} (2 \cos^2 \alpha - 1) \right)}$$

– $\alpha = 0$:

$$\left(\frac{\partial^2 Ep}{\partial \alpha^2} \right) = -Ep_0 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)$$

– si $\omega < \omega_0$, $\frac{\partial^2 Ep}{\partial \alpha^2} > 0$: la position d'équilibre est stable.

– si $\omega > \omega_0$, $\frac{\partial^2 Ep}{\partial \alpha^2} < 0$: la position d'équilibre est instable.

– $\alpha = \pi$:

$$\left(\frac{\partial^2 Ep}{\partial \alpha^2} \right) = -Ep_0 \left(-1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) < 0$$

Cette position d'équilibre est toujours instable.

– $\alpha = \arccos \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)$ (avec $\omega > \omega_0$) :

$$\frac{\partial^2 Ep}{\partial \alpha^2} = Ep_0 \left(-\cos \alpha + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \cos(2\alpha) \right)$$

$$\frac{\partial^2 Ep}{\partial \alpha^2} = Ep_0 \left(-\cos \alpha + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} (2 \cos^2 \alpha - 1) \right)$$

$$\frac{\partial^2 Ep}{\partial \alpha^2} = Ep_0 \left(-\frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} (2 \frac{\omega_0^4}{\omega^4} - 1) \right)$$

$$\frac{\partial^2 Ep}{\partial \alpha^2} = Ep_0 \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)$$

Comme $\omega > \omega_0$, $\frac{\partial^2 Ep}{\partial \alpha^2} > 0$: la position d'équilibre est stable.

6. Initialement la tige est verticale. Lorsqu'on met en rotation la tige autour de la verticale, elle demeure verticale tant que $\omega < \omega_0$: $\alpha = 0$ est une position d'équilibre stable. Lorsque $\omega > \omega_0$, cette position devient instable, la tige s'en écarte et se positionne en $\alpha = \arccos\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)$. A partir de $\omega = \omega_0$, lorsque ω croît, la position d'équilibre croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$ (cas limite où $\omega \rightarrow \infty$). Physiquement, il y a compétition entre le poids de la tige qui tend à l'aligner avec la verticale et la force centrifuge qui tend à l'aligner avec l'horizontale.
7. On suppose $\omega > \omega_0$ et on note α_{eq} la position d'équilibre stable du système. Au voisinage de α_{eq} , on peut écrire l'énergie potentielle à l'ordre 2 en $\alpha - \alpha_{eq}$:

$$Ep(\alpha) = Ep(\alpha_{eq}) + \left(\frac{\partial Ep}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=\alpha_{eq}} (\alpha - \alpha_{eq}) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 Ep}{\partial \alpha^2} \right)_{\alpha=\alpha_{eq}} (\alpha - \alpha_{eq})^2 + o((\alpha - \alpha_{eq})^2)$$

Par choix d'origine des potentiels, on peut prendre : $Ep(\alpha_{eq}) = 0$. Par définition $\left(\frac{\partial Ep}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=\alpha_{eq}} = 0$. On a

vu que $\left(\frac{\partial^2 Ep}{\partial \alpha^2} \right)_{\alpha=\alpha_{eq}} = -Ep_0 \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)$ d'où :

$$Ep(\alpha) \approx -\frac{1}{2} Ep_0 \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) (\alpha - \alpha_{eq})^2$$

On reconnaît l'énergie potentielle d'un oscillateur harmonique : $Ep = \frac{1}{2} m \Omega^2 l^2 (\alpha - \alpha_{eq})^2$ avec :

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{l} \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)}$$

$$\boxed{\Omega = \omega_0 \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)}}$$