



# DS5 – CORRIGÉ

D.Malka – MPSI 2016-2017 – Lycée Saint-Exupéry

14.01.2017

## Problème 1 – Structures cristallographiques du fer et de l'acier

Données :

- Masse molaire du fer :  $M_{Fe} = 55,8 \text{ g.mol}^{-1}$
- Masse molaire du carbone :  $M_C = 12,0 \text{ g.mol}^{-1}$
- Nombre d'Avagadro :  $\mathcal{N}_A = 6,02.10^{23}$

1. Le fer  $\gamma$ . A haute température le fer cristallise suivant le réseau cubique faces centrées (fer  $\gamma$ ).

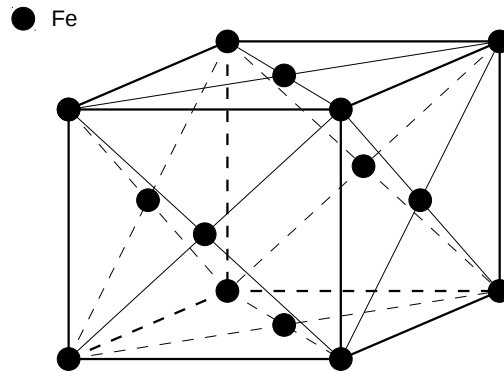


FIGURE 1 – Maille conventionnelle de fer  $\gamma$

1.1 Population de la maille :  $P(Fe) = 8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} = 4$

1.2 Compacité :  $c = \frac{V_{atomes}}{V_{maille}}$  avec :

—  $V_{atomes} = P(Fe) \times V_{Fe} = \frac{16\pi R_\gamma^3}{3}$

—  $V_{maille} = a^3$

D'après le modèle des sphères dures, les atomes de fer plus proches voisins sont en contact. Par exemple, l'atome de Fe au centre de la face (100) est en contact avec les sommets du carré ce qui donne suivant la diagonal d'une face :

$$4R_\gamma = \sqrt{2}a \Leftrightarrow R_\gamma = \frac{\sqrt{2}a}{4}$$

On peut calculer numérique la compacité de la structure cubique face centrée :

$$c = \frac{16\pi}{3a^3} \times \left(\frac{\sqrt{2}a}{4}\right)^3$$

$$c = \frac{\pi\sqrt{2}}{6} = 74\%$$

1.3 Paramètre de maille :  $a_\gamma = 2\sqrt{2}R_\gamma$ .

A.N. :  $a = 365 \text{ pm}$

1.4 Masse volumique  $\rho_{Fe}$  du fer  $\gamma$ .

$$\rho_{Fe} = \frac{P(Fe)m_{Fe}}{V_{maille}}$$

avec :

$$\begin{aligned} - V_{maille} &= a^3 \\ - m_{Fe} &= \frac{M_{Fe}}{N_A} \\ - P(Fe) &= 4 \end{aligned}$$

$$\rho_{Fe} = \frac{P(Fe)M_{Fe}}{a^3}$$

A.N. :  $\rho_{Fe} = 7625 \text{ kg.m}^3$

## 2. L'austénite

L'austénite est un acier riche en carbone. Le carbone est soluble dans le fer en phase liquide mais beaucoup moins en phase solide. Les atomes de carbone doivent alors s'insérer dans les sites octaédriques du cristal de fer. La rayon atomique du carbone vaut  $R_C = 77 \text{ pm}$ .

2.1 Sites octaédriques : fig.2.

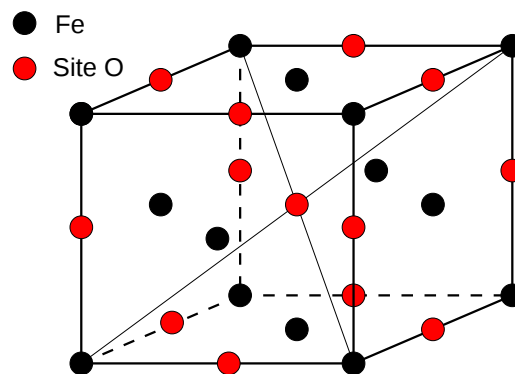


FIGURE 2 – Localisation des site octaédrique dans la maille du fer  $\gamma$

Nombre de sites octaédriques :  $N_O = 12 \times \frac{1}{4} + 1 = 4$

2.2 Un atome de carbone peut-il se loger dans un site octaédrique sans expansion de la maille ?

Calculons le rayon  $r_O$  d'un site octaédrique et comparons le au rayon de l'atome de carbone  $R_C = 77 \text{ pm}$ .

Les atomes de fer plus proches voisins du site octaédrique situé sur une arête de la maille sont les atomes appartenant à la même arête. Il vient :

$$2R_\gamma + 2r_O = a$$

$$\Leftrightarrow R_\gamma = \frac{a}{2} - r_O$$

A.N. :  $r_0 = 54 \text{ pm}$

$r_O < R_C$  donc les atomes de carbone ne peuvent pas s'insérer dans les sites tétraédriques sans expansion de la maille.

- 2.3 En présence d'atomes de carbone le paramètre de maille passe de  $a$  à  $a'$  de l'austénite. En supposant le contact entre atome de carbone et de fer  $a'$  est donné par :

$$a' = 2R_\gamma + 2R_C$$

A.N. :  $a' = 412 \text{ pm}$

- 2.4 Le pourcentage massique de carbone est une grandeur intensive : on peut donc l'évaluer au sein d'une maille :

$$\mathcal{P}_C = \frac{p(C).m_C}{p(C).m_C + p(Fe).m_{Fe}} = \frac{p(C).M_C}{p(C).M_C + p(Fe).M_{Fe}}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{P}_C(p(C).M_C + p(Fe).M_{Fe}) = p(C).M_C$$

$$\Leftrightarrow (\mathcal{P}_C - 1)p(C).M_C = -\mathcal{P}_C p(Fe).M_{Fe}$$

$$\Leftrightarrow p(C) = \mathcal{P}_C \frac{p(Fe) M_{Fe}}{(1 - \mathcal{P}_C) M_C}$$

A.N. :  $p(C) \approx 0,25$ . Il y a donc en moyenne un 1/4 d'atome de carbone par maille. La majorité des sites octaédrique est inoccupée.

- 2.5 En supposant que le nouveau paramètre de maille est  $a'$  précédemment calculé bien que l'intégralité des sites tétraédrique ne soit pas occupé, la masse volumique de l'acier vaut :

$$\rho_{acier} = \frac{p(Fe)M_{Fe} + p(C)M_C}{\mathcal{N}_A a'^3}$$

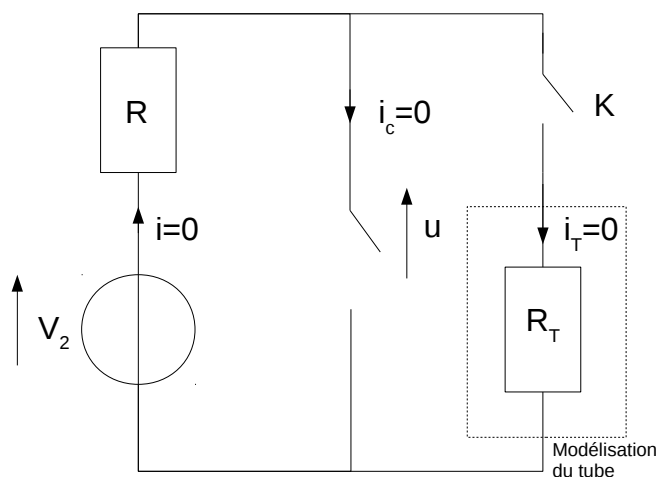
A.N. :  $\rho_{acier} = 5373 \text{ kg.m}^{-3}$

L'acier est bien moins dense que le fer d'où sa préférence dans la majorité des constructions.

## Problème 2 – Flash électronique d'un appareil photo

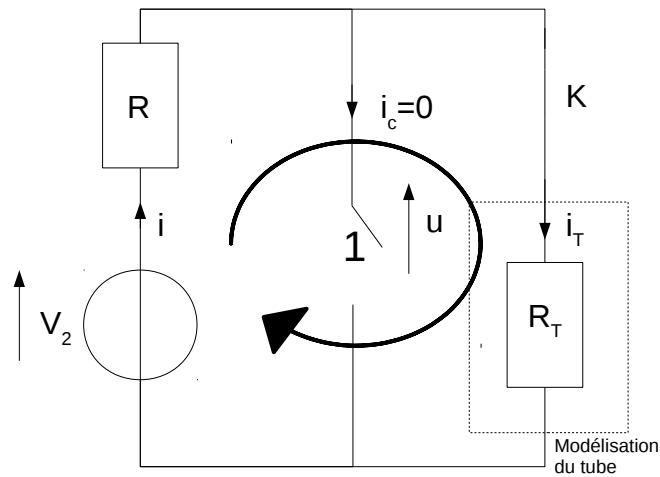
1. L'ionisation du Xénon augmente la densité de porteurs de charge mobiles et abaisse ainsi la résistance du milieu.
2. Déterminons  $i_T(0^+)$ .

$i_T(0^+)$  n'est a priori continu mais  $i_T(0^+) = \frac{u(O^+)}{R_T}$  avec  $u(O^+) = u(0^-)$  par continuité de la tension aux bornes du condensateur. Reste à déterminer  $u(0^-)$ . Schéma équivalent du circuit en régime stationnaire à  $t = 0^-$  :



$$i(0^-) = 0 \Rightarrow u(0^-) = V_2. \text{ Donc : } \boxed{i_T(0^+) = \frac{V_2}{R_T}} .7$$

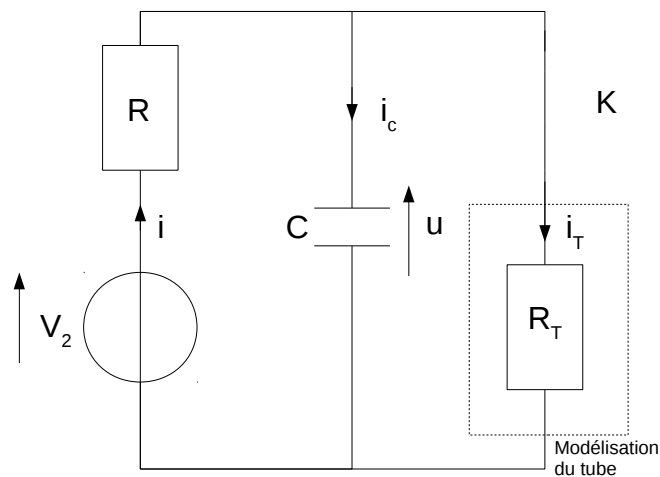
Déterminons  $i_T(\infty)$ . Schéma équivalent du circuit en régime stationnaire à  $t \rightarrow \infty$  :



La loi des mailles dans l'unique maille restante donne :

$$\boxed{i_T(\infty) = \frac{V_2}{R + R_T}}$$

3. Déterminons l'équation différentielle vérifiée par  $i_T(t)$  pour  $t > 0$ .



Loi des mailles dans la maille 1 :

$$R_i + R_T i_T = V_2$$

avec, loi des noeuds en A :  $i = i_c + i_T$ , d'où :

$$R i_C + (R + R_T) i_T = V_2$$

Reste à déterminer  $i_C$  à l'aide des lois de fonctionnement :

$$- i_C = C \dot{u},$$

$$- u = \frac{i_T}{R_T}$$

D'où  $i_C = \frac{1}{R_T} \frac{di_T}{dt}$ . Finalement :

$$\frac{R}{R_T} C \frac{di_T}{dt} + (R + R_T) i_T = V_2$$

Soit sous forme canonique :

$$\boxed{\frac{di_T}{dt} + \frac{i_T}{\tau} = \frac{i_T(\infty)}{\tau}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau = \frac{RR_T}{R + R_T} C}$$

4. Pour  $t > 0$  :

$$i_T(t) = i_T(\infty) + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

Or on a démontré que  $i_T(0^+) = \frac{V_2}{R}$  et d'autre part, en évaluant l'expression ci-dessus à  $t = 0$  :

$$i_T(0^+) = i_T(\infty) + A$$

d'où  $A = \frac{V_2}{R} - i_T(\infty)$  et donc :

$$\boxed{\forall t > 0, \quad i(t) = \frac{V_2}{R} + \left( \frac{V_2}{R} - i_T(\infty) \right) e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

5. Allure  $i_T(t)$  : fig.3.

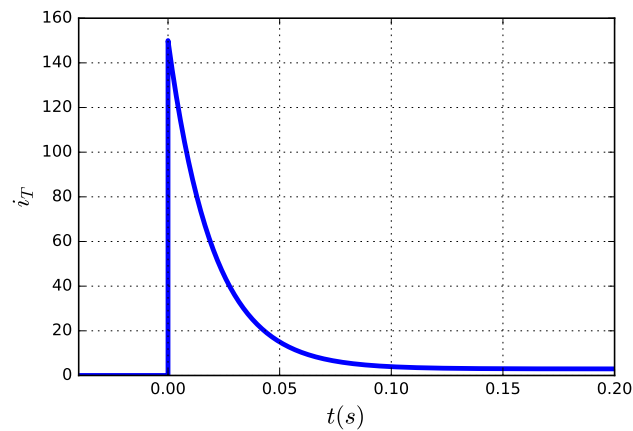


FIGURE 3 – Allure de l'intensité du courant  $i_T$ . On a pris arbitrairement  $R = 1 \Omega$ ,  $R_T = 100 \Omega$ ,  $\tau = 0,2 \text{ s}$ .

Dans le cadre de ce modèle, le flash s'interprète par la lumière émise lors de la décharge du condensateur à travers la résistance  $R_T$ . La durée du flash est environ  $5\tau$ .

6. Energie initialement stockée dans le condensateur :

$$\boxed{E_C = \frac{1}{2} CV_2^2}$$

7. On souhaite générer un flash d'une puissance égale à  $P = 4,0 \text{ W}$  et d'une durée de  $T = 0,10 \text{ s}$ . En supposant que la puissance donnée est la puissance moyenne. L'énergie dissipée par le flash vaut :

$$E_{flash} = P.T$$

Si on suppose que cette énergie était entièrement stockée dans le condensateur initialement (on néglige les transfert thermique par exemple) alors :

$$E_C = E_{flash}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}CV_2^2 = P.T$$

$$\Leftrightarrow \boxed{C = \frac{2P.T}{V_2^2}}$$

A.N. :  $C \approx 8,9 \mu F$

La capacité du condensateur est usuelle.

☞ bien que l'énoncé n'y invite pas vraiment, on peut se poser la question de l'influence de la capacité sur la durée du flash dans le cadre de ce modèle. Impossible de répondre sans les valeurs de  $R$  et  $R_T$ .

### Problème 3 – Interprétation énergétique du facteur de qualité d'un oscillateur harmonique

- Equation différentielle vérifiée par  $u_C(t)$ .

Loi des mailles + lois de fonctionnement des dipôles :

$$\boxed{\ddot{u}_C(t) + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u}_C + \omega_0^2 u_C(t) = \omega_0^2 e(t)}$$

avec  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $Q = \frac{L\omega_0}{R}$

#### Réponse indicielle du circuit RLC.

Le circuit est soumis à l'échelon de tension :

$$e(t) = \begin{cases} E & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

- Pour  $t < 0$ ,  $e(t) = E$ . En régime établi, le condensateur se comporte comme un coupe-circuit, la bobine comme un court-circuit donc :

$$i(0^-) = 0 \quad u_C(0^-) = E$$

- Pour  $t \rightarrow +\infty$ , le régime permanent est établi et  $e(t) = 0$  d'où  $u_C(\infty) = 0$ .

- Régime transitoire.

Facteur de qualité :  $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = 10 > \frac{1}{2}$ .

Le régime transitoire est donc pseudo-périodique. En posant l'équation caractéristique (voir cours), on arrive à :

$$u_C(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} (a \cos \Omega t + b \sin \Omega t)$$

Avec  $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$  et  $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

Continuité du courant traversant la bobine et de la tension aux bornes du condensateur :

$$\begin{aligned} i(0^+) &= i(0^-) \\ u_C(0^+) &= u_C(0^-) \end{aligned}$$

$$a = E \quad b = \frac{E}{\Omega\tau}$$

D'où la solution complète :

$$\boxed{u_C(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}} \left( \cos \Omega t + \frac{1}{\Omega\tau} \sin \Omega t \right)}$$

5.  $\tau$  est le temps de relaxation de l'oscillateur,  $\Omega$  la pseudo-période du régime transitoire.  
 6.  $Q \gg 1$  donc  $\Omega \approx \omega_0$ . Soit  $N$  le nombre d'oscillations observées pendant le régime transitoire :

$$N = \frac{5\tau}{T} = 5 \frac{2Q}{\omega_0} \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 1,6 Q$$

Donc il y a de l'ordre de  $Q$  pseudo-oscillations avant amortissement.

7.  $Q \gg 1$  donc  
 —  $\Omega \approx \omega_0$   
 —  $\frac{1}{\Omega\tau} \approx \frac{1}{2Q} \ll 1$   
 D'où :

$$u_C(t) \approx E e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega_0 t)$$

8. intensité  $i(t)$  du courant dans le circuit.

$$i(t) = C \dot{u}_C(t)$$

Après calcul :

$$i(t) = C E e^{-\frac{t}{\tau}} \left( -\frac{1}{\tau} \cos(\omega_0 t) + \omega_0 \sin(\omega_0 t) \right)$$

or  $Q \gg 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\tau} \ll \omega_0$ , d'où :

$$i(t) \approx C E \omega_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega_0 t)$$

9. La figure 4, représente l'évolution de l'énergie totale, de l'énergie stockée dans le condensateur et de l'énergie stockée dans la bobine. Commenter.

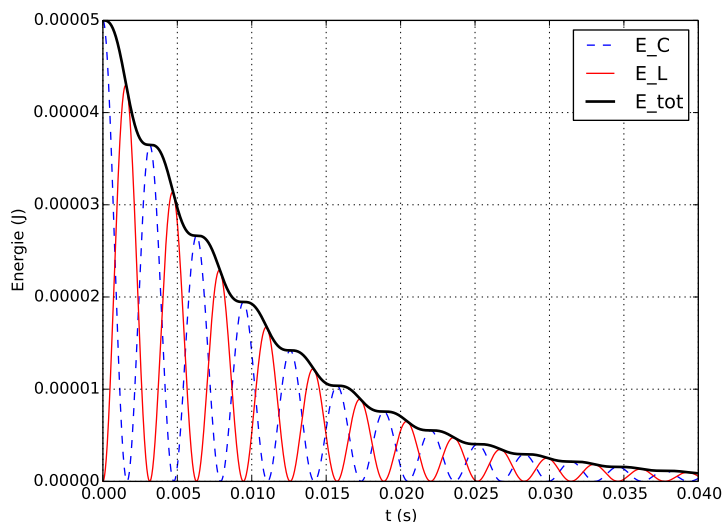


FIGURE 4 – Evolution de l'énergie du circuit RLC

On observe des pseudo-oscillations des énergies stockées dans le condensateur et la bobine. Il y a échange périodique d'énergie entre ces deux réservoirs. L'énergie électrique totale diminue du fait de la dissipation d'énergie par effet Joule dans la résistance.

10. Energie électrique  $\mathcal{E}(t)$  de l'oscillateur à l'instant  $t$  :

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} C u^2 + \frac{1}{2} L i^2$$

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} C E e^{-\frac{2t}{\tau}}$$

11.

$$\frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}} = \frac{\frac{1}{2} C E e^{-\frac{2(t+T)}{\tau}}}{\frac{1}{2} C E e^{-\frac{2t}{\tau}}} - 1$$

$$\frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}} = e^{-\frac{2T}{\tau}} - 1$$

$$\frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}} \approx 1 - \frac{2T}{\tau} - 1$$

$$\frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}} \approx -\frac{2T_0}{\tau}$$

$$\text{or } \tau = \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{Q\pi T_0}{\pi}$$

D'où :

$$\frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}} \approx \frac{2\pi}{Q}$$

12. Le facteur de qualité est une mesure des pertes énergétiques relatives de l'oscillateur harmonique. Pour un oscillateur harmonique non amorti :  $Q \mapsto \infty$  soit  $\Delta E \mapsto 0$  ce qui est cohérent.