Cinématique du solide 14

Lorsque l'on observe le mouvement d'un solide, deux cas retiennent particulièrement l'attention : les mouvements au cours desquels le solide est en rotation autour d'un axe fixe et les mouvements de translation. Un ascenseur est en translation alors qu'un tambour de machine à laver est en rotation autour d'un axe fixe. Dans ce chapitre, on définit, on décrit et on paramètre ces deux types de mouvements. Une grande partie de ce chapitre doit être mis en correspondance avec le cours de SII du premier semestre.

1 Repérage d'un solide

Jusqu'à présent, on s'est intéressé aux systèmes dont on pouvait négliger l'extension spatiale et que l'on assimilait à des points. On s'occupe maintenant des systèmes pour lesquels ce n'est plus possible. La description du mouvement de tels systèmes requiert plus de paramètres.

1.1 Définition d'un solide

Un **solide** est système matériel dont les points restent à distance constante les uns des autres.

On oppose les solides aux systèmes déformables dont les points peuvent se déplacer les uns par rapport aux autres. Les déformations ou les ruptures du solide sont exclues de cette étude.

Exemple

Un ressort peut être étiré ou comprimé. C'est un système déformable. Une boule de billard est un solide indéformable.

1.2 Repérage d'un solide dans l'espace

On considère un référentiel auquel on associe un repère d'espace orthonormé direct $\mathscr{R} = (O,x,y,z)$. À chaque solide, on peut fixer un repère d'espace $\mathscr{R}_1 = (O_1,x_1,y_1,z_1)$ également orthonormé direct. Les coordonnées d'un point quelconque du solide sont alors constantes dans ce repère $\mathscr{R}_1$. Repérer le solide dans l'espace revient donc à situer le repère lié au solide $\mathscr{R}_1$ par rapport au repère $\mathscr{R}$ lié au référentiel d'étude (voir figure 14.1).

Pour cela, dans le cas général, on a besoin de six paramètres :

- les trois coordonnées d'un point du solide : par exemple celles de l'origine O_1 du repère attaché au solide ;
- trois angles qui définissent l'orientation des axes du repère lié au solide par rapport au référentiel d'étude.

Le repérage du point O_1 a été étudié dans le chapitre de cinématique du point et requiert l'utilisation de trois paramètres. La figure 14.2 permet de se convaincre de la nécessité de définir trois angles pour repérer l'orientation du cube et donc l'orientation de $\mathscr{R}_1$ par rapport à $\mathscr{R}$.

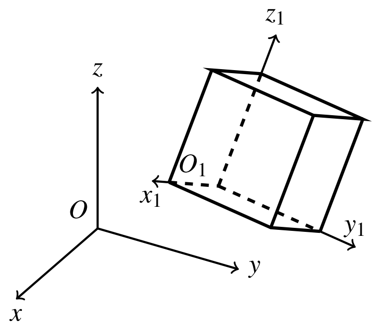


Figure 14.1 – Repérage d'un cube dans l'espace.

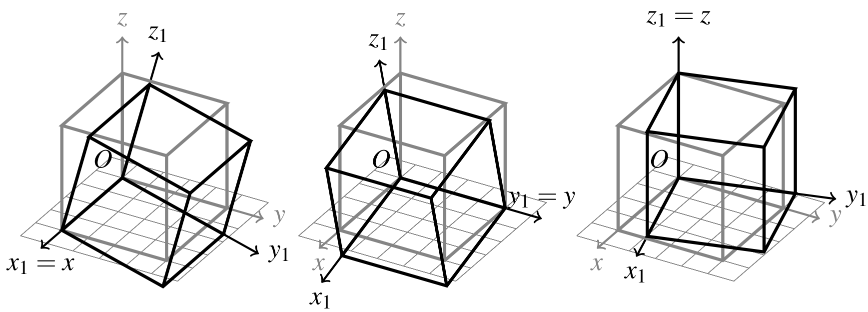


Figure 14.2 – Cube de sommet O fixe repéré dans l'espace. À gauche, le cube a tourné autour l'axe (Ox) ; au centre, autour de (Oy) et à droite, autour de (Oz).

2 Mouvement de translation

2.1 Définition

Un solide est en **translation** lorsque les directions du repère lié au solide sont fixes par rapport au référentiel d'étude.

2.2 Mouvement d'un point d'un solide en translation

Les directions du repère lié au solide étant fixes dans le référentiel d'étude, on peut faire coïncider les vecteurs de base de $\mathscr{R}_1$: $(\overrightarrow{u_{x_1}}, \overrightarrow{u_{y_1}}, \overrightarrow{u_{z_1}})$ avec ceux de $\mathscr{R}$: $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$. La position d'un point P fixé au solide est repérée par rapport au solide par ses coordonnées (x_P, y_P, z_P) telles que :

$$\overrightarrow{O_1P} = x_P\overrightarrow{u_{x_1}} + y_P\overrightarrow{u_{y_1}} + z_P\overrightarrow{u_{z_1}}.$$

Le point P étant fixé au solide, ses coordonnées (x_P, y_P, z_P) sont constantes. La base $(\overrightarrow{u_{x_1}}, \overrightarrow{u_{y_1}}, \overrightarrow{u_{z_1}})$ étant confondue avec la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$, elle est constante dans $\mathscr{R}$. Le vecteur $\overrightarrow{O_1P}$ est donc lui aussi constant dans $\mathscr{R}$. Un vecteur quelconque lié au solide est invariant dans $\mathscr{R}$. Le solide ne tourne pas sur lui-même. La position de P dans $\mathscr{R}$ se déduit de celle de O_1 par une translation de vecteur $\overrightarrow{O_1P}$ constant. Le mouvement suivi par un point quelconque d'un solide en translation est alors identique à celui de O_1.

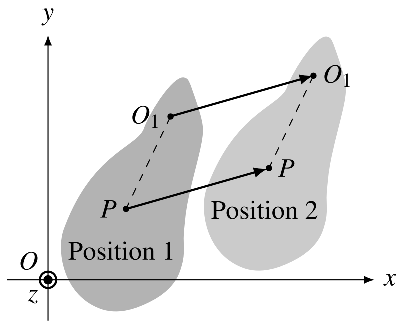


Figure 14.3 – Solide en translation dans $\mathscr{R}$.

2.3 Conséquences

Les vecteurs déplacement infinitésimal, vitesse et accélération de chacun des points du solide sont identiques à chaque instant donc :

- cela a un sens de parler de déplacement, vitesse et accélération du solide ;
- le mouvement du solide est parfaitement défini par la donnée du mouvement d'un de ses points. On choisit souvent O_1 ou le centre d'inertie G du solide.

Tous les points d'un solide en translation ont le même mouvement. Le mouvement du solide est complètement décrit par le mouvement d'un de ses points.

Il suffit de trois coordonnées pour décrire la position d'un solide en translation et on est ramené au cas de la cinématique du point.

Remarque

En lien avec le cours de cinématique du solide de SII, un mouvement de translation d'un solide est caractérisé par la nullité de son vecteur instantané de rotation. Le torseur cinématique est de la forme couple.

2.4 Deux mouvements de translations remarquables

a) Translation rectiligne

Lorsque le mouvement de O_1 est un mouvement rectiligne, tous les points du solide en translation ont un mouvement rectiligne et la translation du solide est qualifiée de **translation rectiligne**. On peut noter que chaque point du solide décrit une portion de droite de même direction mais que l'origine de chacune de ces portions de droite est différente.

Exemple

Un ascenseur est en translation rectiligne le long d'une ligne verticale par rapport au référentiel lié au sol.

b) Translation circulaire

Lorsque le mouvement de O_1 est un mouvement circulaire, tous les points du solide en translation ont un mouvement circulaire et la translation du solide est qualifiée de **translation circulaire**. On peut noter que chaque point du solide décrit un arc de cercle de même rayon mais que le centre de chacun de ces arcs de cercles est différent.

> **Exemple**
>
> Les nacelles d'un manège de type « grande roue » sont en translation circulaire par rapport au référentiel lié au sol.

3 Solides en rotation autour d'un axe fixe

3.1 Définition

Un solide est en rotation autour d'un axe Δ fixe dans $\mathscr{R}$, s'il existe une unique droite Δ immobile à la fois par rapport au solide et au référentiel $\mathscr{R}$.

3.2 Mouvement d'un point d'un solide en rotation

On choisit les origines $O = O_1$ sur l'axe Δ. On fait coïncider l'axe (Oz) du repère d'étude $\mathscr{R}$ et l'axe (O_1z_1) du repère $\mathscr{R}_1$ lié au solide à l'axe fixe Δ. On oriente l'axe de rotation Δ par le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_z}$. La position du solide est alors entièrement repérée par l'angle θ que fait l'axe (Ox_1) avec l'axe (Ox) (voir figure 14.4).

Un point P lié au solide est repéré par le vecteur $\overrightarrow{OP}$ que l'on décompose en une composante parallèle à Δ et une composante qui lui est perpendiculaire. Pour cela, on introduit le point H, projeté orthogonal de P sur Δ et on écrit :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HP}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{OH}$ est constant puisqu'il appartient à Δ. La distance HP reste constante puisque H et P appartiennent au solide. Le vecteur $\overrightarrow{HP}$ fait un angle constant avec le vecteur $\overrightarrow{u_{x_1}}$ car tous deux appartiennent au solide. Le vecteur $\overrightarrow{HP}$ est donc entraîné en rotation avec le solide et le point P décrit un cercle de centre H, de rayon HP à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$.
Dans $\mathscr{R}$, le mouvement de P est un mouvement circulaire de centre H dans le plan (Hxy) passant par H, orthogonal à $\overrightarrow{u_z}$ et orienté par $\overrightarrow{u_z}$.

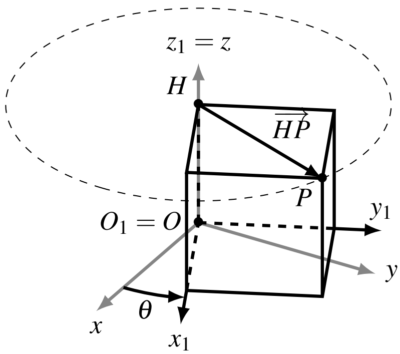


Figure 14.4 – Solide en rotation autour de l'axe (O_1z) fixe dans $\mathscr{R}$.

On peut donc définir sa position par ses coordonnées polaires de centre H. On pose $\|\overrightarrow{HP}\| = r$, $\overrightarrow{u_r} = \dfrac{\overrightarrow{HP}}{r}$ et $\overrightarrow{u_\theta} = \overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{u_r}$ le vecteur du plan (Hxy) directement orthogonal à $\overrightarrow{u_r}$. On obtient alors :

$$\overrightarrow{HP} = r\overrightarrow{u_r} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{v}_{P/\mathscr{R}} = r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}.$$

La vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est commune à tous les points du solide et mesure la vitesse de rotation du solide autour de son axe de rotation. Elle s'exprime en rad·s^{-1}.

Le mouvement d'un point P lié à un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ est un mouvement circulaire situé dans le plan perpendiculaire à Δ contenant P. La trajectoire est caractérisée par

- son centre H, projeté orthogonal P sur l'axe de rotation Δ,
- son rayon r, distance de P à l'axe de rotation Δ,
- sa vitesse angulaire $\dot{\theta}$ égale à la vitesse de rotation du solide autour de Δ.

Dans le système de coordonnées cylindriques d'origine O et d'axe (Oz), la vitesse instantanée du point P s'écrit :

$$\overrightarrow{v}_{P/\mathscr{R}} = r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}.$$

Il suffit d'une coordonnée angulaire θ pour décrire la position du solide et on est ramené au cas du mouvement circulaire de la cinématique du point.

Remarque

- L'axe de rotation n'est pas forcément situé à l'intérieur du solide.
- La vitesse de rotation est parfois donnée en tour·min^{-1}, qui n'est pas une unité du Système International.

3.3 Conséquences

Le déplacement angulaire infinitésimal dθ, la vitesse angulaire $\dot{\theta}$, ainsi que l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ sont identiques pour chacun des points du solide donc :

- cela a un sens de parler de rotation et de vitesse de rotation du solide ;
- le mouvement du solide est parfaitement défini par la donnée du déplacement angulaire d'un de ses points.

Remarque

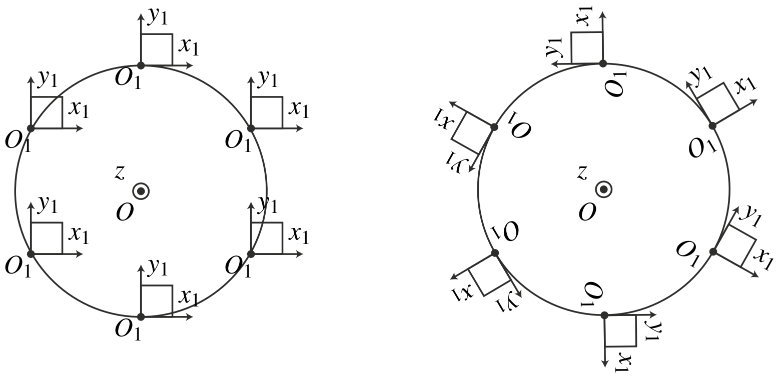
En lien avec le cours de cinématique du solide de SII, le torseur cinématique pour ce type de mouvement est de la forme glisseur. En prenant $\overrightarrow{u_z}$ orienté selon l'axe de rotation, le vecteur $\overrightarrow{\Omega} = \dot{\theta}\overrightarrow{u_z}$ est le vecteur instantané de rotation du solide par rapport à $\mathscr{R}$. La vitesse de P s'exprime alors $\overrightarrow{v}_{P/\mathscr{R}} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OP} = \dot{\theta}\overrightarrow{u_z} \wedge r\overrightarrow{u_r} = r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$ où le vecteur $\overrightarrow{u_\theta} = \overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{u_r}$ est tel que $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$ est une base orthonormée directe.

3.4 Quelques exemples de rotation autour d'un axe fixe

Il existe de nombreux exemples de systèmes en rotation autour d'un axe fixe par rapport à un référentiel $\mathscr{R}$. On peut citer :

- la Terre dans son mouvement de rotation propre autour de son axe Nord-Sud en un jour sidéral de durée $T = 23$ h 56 min 4 s $= 86\,164$ s par rapport au référentiel géocentrique. La vitesse de rotation est alors constante et égale à $\dot{\theta} = \dfrac{2\pi}{T} = 7{,}3.10^{-5}\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$;
- le rotor d'un moteur électrique par rapport au référentiel lié au stator. La vitesse de rotation peut alors varier fortement ;
- une voiture qui prend un virage circulaire par rapport au référentiel lié au sol. Dans ce cas, l'axe de rotation n'est pas dans la voiture mais au centre du virage ;
- les roues d'une voiture se déplaçant en ligne droite par rapport au référentiel lié au châssis de la voiture. L'axe de rotation est alors l'axe du moyeu de la roue. Il est en mouvement par rapport au sol mais fixe par rapport au châssis de la voiture.

⚠ Une erreur courante consiste à confondre le mouvement de rotation autour d'un axe fixe et le mouvement de translation circulaire. La figure 14.5 illustre la différence entre ces deux mouvements : tous les points d'un solide en translation circulaire décrivent une trajectoire circulaire de même rayon mais de centres différents et les axes (O_1x_1) et (O_1y_1) restent fixes ; tous les points d'un solide en rotation autour d'un axe fixe décrivent une trajectoire circulaire de même centre mais de rayons différents et les axes (O_1x_1) et (O_1y_1) sont en rotation.



Translation circulaire. Rotation autour de (Oz).

Figure 14.5 – Différence entre le mouvement de translation circulaire et le mouvement de rotation pour un solide carré.

SYNTHÈSE

SAVOIRS

- définir un solide
- mouvement de translation
- mouvement de rotation autour d'un axe fixe
- vitesse angulaire d'un solide en rotation

SAVOIR-FAIRE

- différencier un solide d'un système déformable
- reconnaître et décrire une translation rectiligne, un translation circulaire
- décrire la trajectoire d'un point quelconque d'un solide en rotation autour d'un axe fixe. Exprimer sa vitesse en fonction de sa distance à l'axe et de la vitesse angulaire

MOTS-CLÉS

- solide
- indéformable
- translation
- rotation