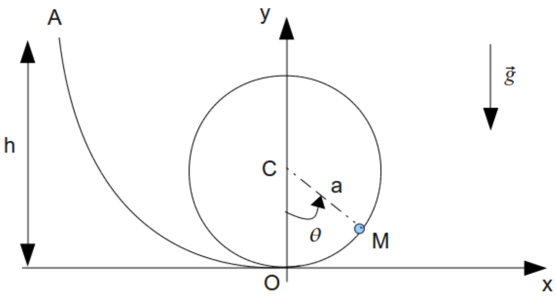
TD M3
Travail et énergie en mécanique

1 Exercices

Exercice 1 - Acrobaties



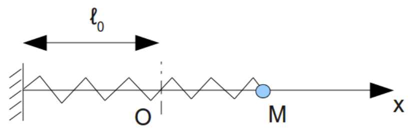
Un adepte du roller, assimilé à un point matériel M de masse m, se lâche sans vitesse initiale depuis le point A d'une rampe, situé à une hauteur h au dessus de O, point le plus bas de la rampe. A partir de O la rampe a une forme cylindrique de rayon a : le patineur peut rouler à l'intérieur de ce cylindre en restant dans le plan vertical (Oxy), et éventuellement faire le tour complet. Le contact est sans frottement sur toutes les surfaces.
On note $\vec{g} = -g\ \overrightarrow{e_y}$ l'accélération de la pesanteur, et on désigne par $\overrightarrow{e_r} = \dfrac{\overrightarrow{CM}}{CM}$ le vecteur unitaire radial par rapport au cercle.

1. Déterminer la norme v_0 de la vitesse du patineur lorsqu'il arrive au point O.
2. Déterminer la norme v de la vitesse du patineur en un point M quelconque du cercle, repéré par l'angle θ.
3. Montrer que la réaction exercée par le support cylindrique sur le patineur est :

$$\vec{R} = -mg\left(\frac{2h}{a} + 3\cos\theta - 2\right)\overrightarrow{e_r}$$

4. a) Que se passe-t-il si, en un certain point du cylindre, v s'annule avec R non nulle ? (Répondre sans calculs).
b) Que se passe-t-il si c'est la réaction R qui s'annule avec v non nulle ? (Répondre sans calculs).
5. Déterminer la valeur minimale que doit avoir la hauteur h pour que le patineur puisse faire un tour complet du cylindre.

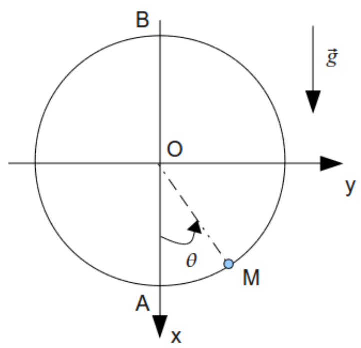
Exercice 2 - Utilisation de l'énergie mécanique



Un point matériel M de masse m est astreint à se déplacer sans frottements sur une tige, le long de l'axe (Ox) horizontal. Il est lié à l'extrémité d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, l'autre extrémité étant fixe.
L'origine O coïncide avec sa position d'équilibre. A l'instant $t = 0$, on écarte M d'une distance $X_0 = 8,0$ cm et on le lâche sans vitesse initiale.

1. Établir l'expression de l'énergie mécanique de M.
2. Montrer que cette énergie mécanique est une constante du mouvement et donner sa valeur.
3. Établir l'équation différentielle du mouvement de M.
4. Donner sa solution et calculer la période des oscillations.
5. Avec quelle vitesse le point M repasse-t-il par le point O ?
Données : $m = 250$ g ; $k = 20$ N.m^{-1}.

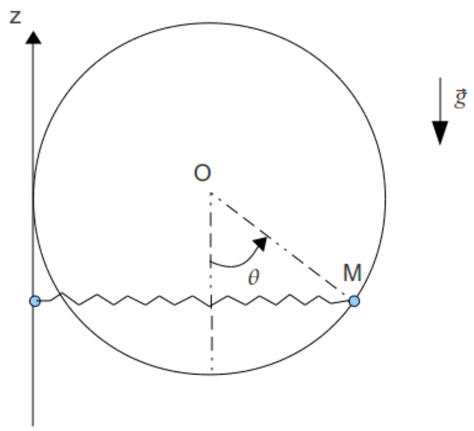
Exercice 3 - Équilibre et mouvement sur un cercle



Un anneau de masse m, assimilable à un point matériel M, peut coulisser sans frottement sur un cerceau vertical de rayon r. L'anneau est lancé à l'instant initial avec une vitesse de norme v_0 depuis le point A, point le plus bas du cerceau. On repère sa position au cours de son mouvement par l'angle θ (voir figure).

1. Établir l'expression de l'énergie potentielle de M en fonction de θ.
2. Tracer la courbe $E_p(\theta)$ et déterminer les positions d'équilibre de M.
3. On cherche à déterminer le mouvement possible de M selon la vitesse initiale.
a) Montrer que l'énergie mécanique de M se conserve et donner sa valeur.
b) En déduire, à partir d'un raisonnement graphique, qu'il y a deux types de mouvement possibles en fonction de la valeur de v_0. Préciser la valeur critique de v_0 séparant ces deux cas.

Exercice 4 - Point sur un cerceau



Un point matériel M de masse m glisse sans frottements sur un cerceau vertical de rayon R. Le point M est fixé à un ressort dont l'autre extrémité glisse sans frottement sur un axe vertical tangent au cerceau, de sorte que le ressort reste vertical (voir figure ci-contre). On note θ l'angle que fait (OM) avec la verticale.
On note k la raideur du ressort ; sa longueur à vide est égale au rayon du cerceau $\ell_0 = R$.

1. Montrer que le problème est conservatif (l'énergie mécanique se conserve). Montrer que l'énergie potentielle associée au point M a pour expression :

$$E_p = mgR(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}kR^2 \sin^2\theta$$

2. Montrer que le système présente des positions d'équilibre :
- deux existent toujours ;
- deux n'existent qu'à une condition à préciser
On pourra utiliser la notation $\alpha = \dfrac{mg}{kR}$.
3. Étudier la stabilité de ces positions d'équilibre.
4. Pour de petites oscillations autour de la seule position d'équilibre stable, déterminer l'équation différentielle du mouvement, puis en déduire la période du mouvement.
Données : En $\theta \simeq 0$, $\sin\theta \simeq \theta$ et $\cos\theta \simeq 1 - \dfrac{\theta^2}{2}$

2 Résolution de problèmes

Amélioration d'un temps de parcours

Les améliorations techniques permettant aux sportifs d'améliorer leurs performances sont devenues un véritable enjeu dans le monde du sport. On s'intéresse ici à la masse des chaussures des coureurs du 100 m. Ceux-ci font en moyenne une quarantaine de foulées sur cette distance, et ce paramètre doit être pris en compte.

Déterminer un ordre de grandeur de l'amélioration du temps de parcours du 100 m d'un coureur qui utilise des chaussures plus légères de 100 g.