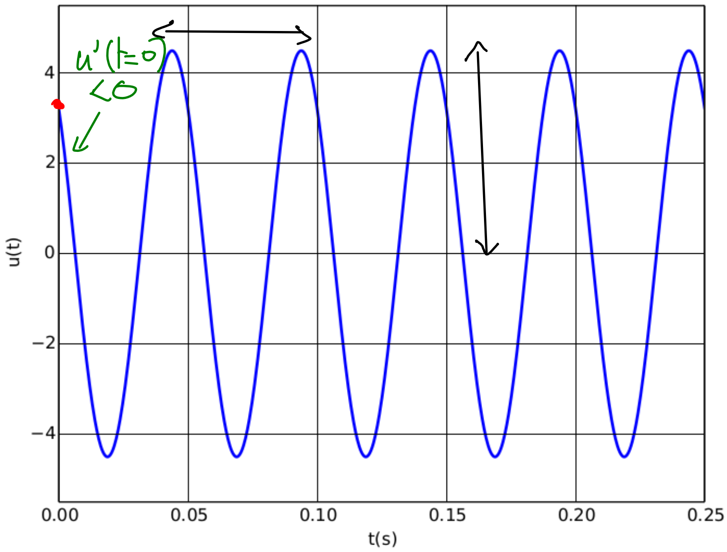
TD S2 - Corrigé

S1 - Signal sinusoïdal

$u(t) = u_0 \cos(\omega t + \phi)$



Période $T = 0{,}05\,s$

Fréquence $f = \frac{1}{T} = 20\,Hz$

Pulsation : $\omega = 2\pi f$

$= 125\ rad.s^{-1}$

Amplitude : $u_0 = 4{,}5$ S.I.

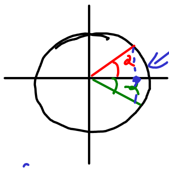
Phase à l'origine ϕ ?

$u(t=0) = u_0 \cos\phi$

$\Rightarrow \cos\phi = \frac{u(t=0)}{u_0}$

avec $u(t=0) = 3{,}2$ S.I.

$\longrightarrow \cos\phi = \frac{3{,}2}{4{,}5}$



$\cos\alpha = \cos(-\alpha)$

$\Rightarrow \phi = \pm\, 0{,}8\ rad.$

Signe de ϕ : $u'(t) = -\omega u_0 \sin(\omega t + \phi)$

à $t=0$ $\underbrace{u'(t=0)}_{<0} = \underbrace{-\omega u_0 \sin\phi}_{<0} \Rightarrow \sin\phi > 0$

$\longrightarrow \phi \in [0, \pi] \Rightarrow \phi = 0{,}8\ rad.$

S2 - Signal sinusoïdal mono-redressé

1/ $\langle i(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)\,dt = \frac{1}{T}\left[\underbrace{\int_0^{T/2} i_0 \sin(\omega t)\,dt}_{J} + \underbrace{\int_{T/2}^{T} 0\,dt}_{0}\right]$

$T = \frac{2\pi}{\omega} \Leftrightarrow \omega T = 2\pi$

avec $J = i_0 \times \int_0^{T/2} \sin(\omega t) = i_0 \times \left[-\frac{\cos(\omega t)}{\omega}\right]_0^{T/2} = -\frac{i_0}{\omega}\left[\underbrace{\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)}_{\underbrace{\cos\pi}_{-1}} - \underbrace{\cos(0)}_{1}\right]$

$\Leftrightarrow J = \frac{2i_0}{\omega}$

D'où : $\langle i(t)\rangle = \frac{2i_0}{\omega T} \Leftrightarrow \boxed{\langle i(t)\rangle = \frac{i_0}{\pi}}$

pour un signal sinusoïdal : $\langle i(t)\rangle = 0$.

2/ $i_{eff} = \sqrt{\langle i(t)^2\rangle}$

$i_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt = \frac{1}{T}\left[\underbrace{\int_0^{T/2} i^2(t)\,dt}_{I} + \underbrace{\int_{T/2}^{T} i^2(t)\,dt}_{J}\right]$

avec

$J = \int_{T/2}^{T} 0^2\,dt = 0$

$I = \int_0^{T/2} i_0^2 \sin^2(\omega t)\,dt$ avec $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

$= \frac{i_0^2}{2}\left(\underbrace{\int_0^{T/2} dt}_{\frac{T}{2}} - \underbrace{\int_0^{T/2} \cos(2\omega t)\,dt}_{=0}\right) = \frac{i_0^2}{4} \times T$

$\frac{T}{2}$ - périodique

D'où : $i_{eff}^2 = \frac{i_0^2}{4} \Leftrightarrow \boxed{i_{eff} = \frac{i_0}{2}}$

Signal sinusoïdal : $i_{eff} = \frac{i_0}{\sqrt{2}} > \frac{i_0}{2}$

S3 - Addition & multiplication de deux signaux

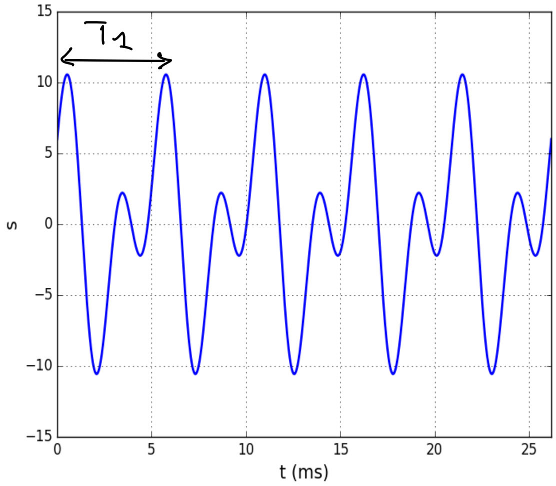
$s_1(t) = S_m \cos(\omega t)$

$T_1 = \frac{2\pi}{\omega}$

$s_2(t) = S_m \sin(2\omega t)$

$T_2 = \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{\omega} = \frac{T_1}{2}$

1/

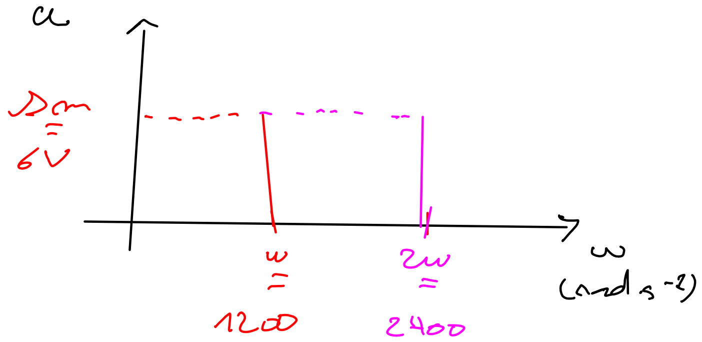


1.1./ $s(t)$ périodique de période T_1 (trivial)

on répond :

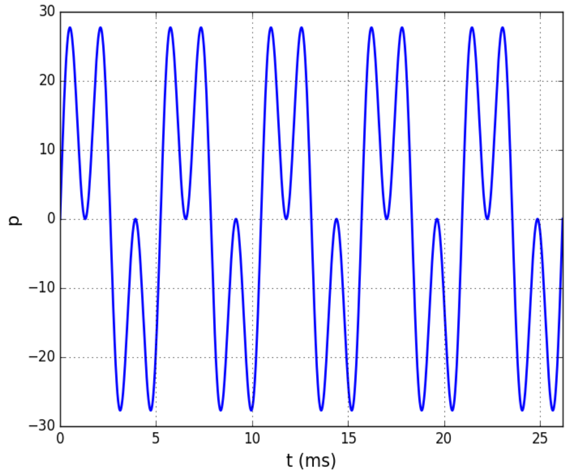
$\forall t,\ s(t+T) = s(t)$

1.2./



$s(t) = S_m \cos(\omega t)$
$+ S_m \sin(2\omega t)$

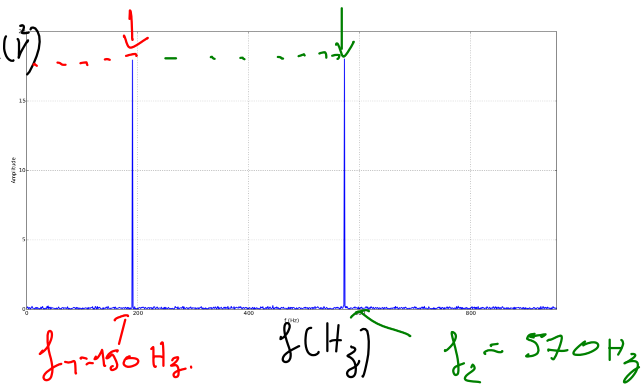
2/



2.1./ Périodique !

$p(t) = S_m^2 \cos(\omega t) \sin(2\omega t)$

2.2./



$p(t) = a_1 \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1)$
$+ a_2 \cos(2\pi f_2 t + \varphi_2)$

2.3./ Linéarisons $p(t)$.

$p(t) = S_m^2 \cos(\omega t) \sin(2\omega t)$

avec :

$\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

avec $\begin{cases} \frac{p-q}{2} = \omega \\ \frac{p+q}{2} = 2\omega \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p-q = 2\omega \\ p+q = 4\omega \end{cases}$

$\begin{cases} 2p = 6\omega \\ 2q = 2\omega \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 3\omega \\ q = \omega \end{cases}$

$\Rightarrow p(t) = \frac{1}{2} S_m^2 \sin(\omega t)$
$+ \frac{1}{2} S_m^2 \sin(3\omega t)$

S4- Température

1/ La température n'est pas périodique...

2/ ... mais une analyse spectrale mettrait en évidence les quasi-périodes suivantes :

$T = 24\,h$

$T' = 1$ an