Contrôle d'informatique

Durée : 1 heure

Soient y une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $t_{\min}$ et $t_{\max}$ deux réels tels que $t_{\min} < t_{\max}$. On note I l'intervalle $[t_{\min}, t_{\max}]$. On s'intéresse à une équation différentielle de la forme :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \qquad y''(t) = f(y(t)) \tag{1}$$

où f est une fonction donnée, continue sur $\mathbb{R}$. On suppose de plus connues les valeurs $y_0 = y(t_{\min})$ et $z_0 = y'(t_{\min})$.

De nombreux systèmes physiques peuvent être décrits par une équation de ce type. On supposera que le système physique étudié est *conservatif*, ce qui entraîne l'existence d'une quantité indépendante du temps (énergie, quantité de mouvement, ...), notée E, qui vérifie l'équation (2), où $g' = -f$:

$$\forall t \in \mathrm{I}, \qquad \frac{1}{2}y'(t)^2 + g(y(t)) = \mathrm{E} \tag{2}$$

Pour résoudre numériquement l'équation différentielle 1, on introduit la fonction $z : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall t \in \mathrm{I}$, $z(t) = y'(t)$.

Question 1.

a) Montrer que l'équation (1) peut se mettre sous la forme d'un système différentiel du premier ordre d'inconnues z et y, système noté (S).

b) Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et $\mathrm{J}_n = [\![0, n-1]\!]$. On pose $h = \dfrac{t_{\max} - t_{\min}}{n-1}$ et $\forall i \in \mathrm{J}_n$, $t_i = t_{\min} + ih$. Montrer que, pour tout entier $i \in [\![0, n-2]\!]$,

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} z(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad z(t_{i+1}) = z(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(y(t))\,\mathrm{d}t \tag{3}$$

Question 2. Dans le schéma d'Euler explicite, chaque teme sous le signe intégrale est remplacé par sa valeur prise en la borne inférieure.

a) Montrer que dans ce schéma, les équations (3) permettent de définir deux suite $(y_i)_{i\in \mathrm{J}_n}$ et $(z_i)_{i\in \mathrm{J}_n}$, où y_i et z_i sont des valeurs approchées de $y(t_i)$ et $z(t_i)$. Donner les relations de récurrence permettant de déterminer les valeurs de y_i et z_i connaissant y_0 et z_0.

b) Écrire en Python une fonction `euler` qui reçoit en arguments les paramètres qui vous semblent pertinents et qui renvoie deux listes de nombres correspondant aux valeurs associées aux suites $(y_i)_{i\in \mathrm{J}_n}$ et $(z_i)_{i\in \mathrm{J}_n}$.

Question 3. Pour illustrer cette méthode, on considère l'équation différentielle : $\forall t \in \mathrm{I}$, $y''(t) = -\omega^2 y(t)$ dans laquelle ω est un nombre réel.

a) Montrer qu'on peut définir une quantité E, indépendante du temps, vérifiant une équation de la forme (2).

b) On note E_i la valeur approchée de E à l'instant t_i, calculée en utilisant les valeurs approchées y_i et z_i de $y(t_i)$ et de $z(t_i)$. Montrer que $\mathrm{E}_{i+1} - \mathrm{E}_i = h^2\omega^2\mathrm{E}_i$.

c) La mise en œuvre de la méthode d'Euler explicite génère le résultat graphique donné figure 1 au verso de ce document. Dans un système d'unités adapté, les calculs ont été menés en prenant $y_0 = 3$, $z_0 = 0$, $t_{\min} = 0$, $t_{\max} = 3$, $\omega = 2\pi$ et $n = 100$. En quoi ce graphe confirme-t-il que le schéma numérique ne conserve par E ? Pouvez-vous justifier son allure ?

Question 4. Le physicien français Verlet a proposé en 1967 un schéma numérique d'intégration d'une équation de la forme (1) dans lequel, en notant $f_i = f(y_i)$ et $f_{i+1} = f(y_{i+1})$, les relations de récurrence s'écrivent :

$$y_{i+1} = y_i + hz_i + \frac{h^2}{2}f_i \qquad \text{et} \qquad z_{i+1} = z_i + \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1}).$$

a) Ecrire en Python une fonction **`verlet`** qui reçoit en arguments les paramètres qui vous semblent pertinents et qui renvoie deux listes de nombres correspondant aux valeurs associées aux suite $(y_i)_{i\in \mathrm{J}_n}$ et $(z_i)_{i\in \mathrm{J}_n}$.

b) On reprend l'exemple de l'oscillateur harmonique de la question 3c. La mise en œuvre du schéma de Verlet avec les mêmes paramètres que ceux utilisés pour le schéma d'Euler donne le résultat présenté figure 2. Interpréter l'allure de ce graphe.

c) Toujours dans lc cas particulier, montrer que pour le schéma de Verlet on a $\mathrm{E}_{i+1} - \mathrm{E}_i = \mathrm{O}(h^3)$.

d) En quoi ce calcul confirme-t-il les observations faites à la question 4.b ?

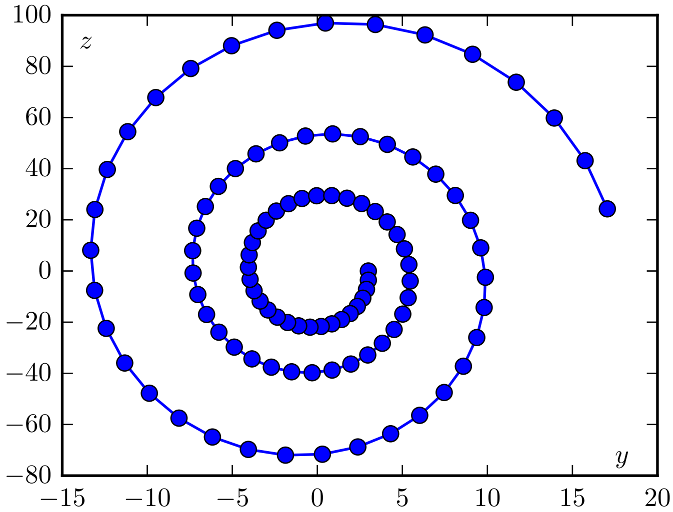

FIGURE 1 – Une illustration de la méthode d'EULER.

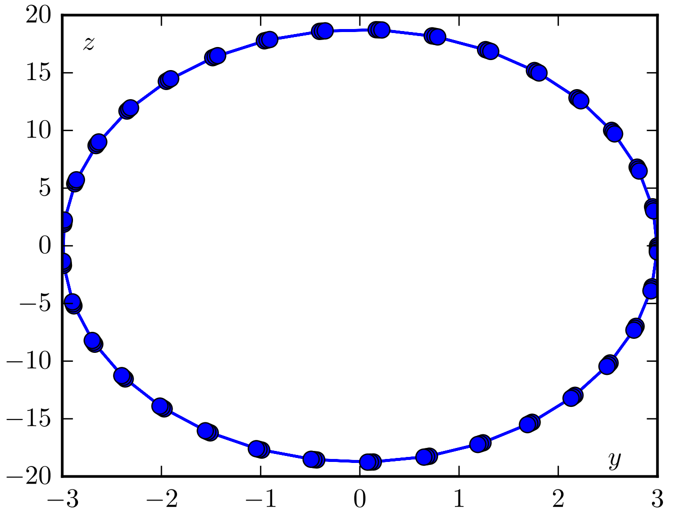

FIGURE 2 – Une illustration de la méthode de VERLET.