Contrôle d'informatique

Exercice 1

a) Considérons tout d'abord la subdivision en $2n$ intervalles. Ces composantes $x_0 = a, x_1, \dots, x_{2n} = b$ sont définies par : $x_k = a + k\dfrac{b-a}{2n}$ et nous avons :

$$\mathrm{T}_{2n}(f) = \frac{b-a}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}.$$

La subdivision du segment $[a,b]$ en n intervalles correspond aux points $x_0, x_2, x_4, \dots, x_{2n}$ donc :

$$\mathrm{T}_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_{2k})+f(x_{2k+2})}{2}.$$

Notons enfin que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, x_{2k+1} est le milieu du segment $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ donc :

$$\mathrm{M}_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{2k+1}).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_n(f)+\mathrm{M}_n(f) &= \frac{b-a}{n}\Big(\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{2k}) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k}) + \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{2k+1})\Big) = \frac{b-a}{n}\Big(\sum_{k=0}^{n-1}\big(f(x_{2k})+f(x_{2k+1})\big) + \frac{f(b)-f(a)}{2}\Big)\\ &= \frac{b-a}{n}\Big(\sum_{k=0}^{2n-1} f(x_k) + \frac{f(b)-f(a)}{2}\Big) = 2\mathrm{T}_{2n}(f).\end{aligned}$$

De ceci il résulte que $\mathrm{T}_{2^{p+1}(f)} = \dfrac{\mathrm{T}_{2^p}(f)+\mathrm{M}_{2^p}(f)}{2}$.

b) On rédige une fonction qui calcule $\mathrm{M}_n(f)$:

```python
def milieu(f, a, b, n):
    s = 0
    h = (b - a) / n
    x = a + h / 2
    for k in range(n):
        s += f(x)
        x += h
    return h * s
```

c) On calcule les termes de la suite (T_{2^p}) à l'aide des formules :

$$\mathrm{T}_1 = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{T}_{2^{k+1}} = \frac{\mathrm{T}_{2^k}(f)+\mathrm{M}_{2^k}(f)}{2}.$$

```python
def trap_dicho(f, a, b, epsilon):
    n = 1
    t1 = (b - a) * (f(a) + f(b)) / 2
    t2 = (t1 + milieu(f, a, b, 1)) / 2
    while abs(t2 - t1) > epsilon:
        n *= 2
        t1, t2 = t2, (t2 + milieu(f, a, b, n)) / 2
    return t2
```

Exercice 2

Question 1.

a) On a $f(x) = f\alpha) + (x-\alpha)f'(\alpha) + \dfrac{(x-\alpha)^2}{2}f''(\alpha) + \mathrm{o}((x-\alpha)^2) = \dfrac{(x-\alpha)^2}{2}f''(\alpha) + \mathrm{o}((x-\alpha)^2)$ donc $h(x) = \dfrac{f''(\alpha)}{2} + \mathrm{o}(1)$. On prolonge h par continuité en posant $h(\alpha) = \dfrac{f''(\alpha)}{2}$.

b) On calcule pour $x \neq \alpha$: $h'(x) = \dfrac{f'(x)}{(x-\alpha)^2} - 2\dfrac{f(x)}{(x-\alpha)^3}$.

Sachant que f est de classe $\mathscr{C}^3$ on peut écrire au voisinage de α :

$$f(x) = \frac{(x-\alpha)^2}{2}f''(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^3}{6}f^{(3)}(\alpha) + \mathrm{o}((x-\alpha)^3) \qquad \text{et} \qquad f'(x) = (x-\alpha)f''(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2}{2}f^{(3)}(\alpha) + \mathrm{o}((x-\alpha)^2)$$

et en combinant ces deux développements on obtient $h'(x) = \dfrac{f^{(3)}(\alpha)}{6} + \mathrm{o}(1)$: h' possède une limite en α.

Ainsi, h est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\{\alpha\}$ et h' possède une limite en α donc h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Question 2.

a) La méthode de Newton-Raphson s'écrit : $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \dfrac{(x_n-\alpha)h(x_n)}{2h(x_n)+(x_n-\alpha)h'(x_n)}$ donc :

$$x_{n+1}-\alpha = \frac{(x_n-\alpha)h(x_n)+(x_n-\alpha)^2h'(x_n)}{2h(x_n)+(x_n-\alpha)h'(x_n)} \qquad \text{et} \qquad \frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{h(x_n)+(x_n-\alpha)h'(x_n)}{2h(x_n)+(x_n-\alpha)h'(x_n)}.$$

Sachant que $\lim x_n = \alpha$ et que h est de classe $\mathscr{C}^1$, $\lim h(x_n) = h(\alpha) = \dfrac{f''(\alpha)}{2} \neq 0$ et $\lim h'(x_n) = h'(\alpha)$ donc $\lim \dfrac{e_{n+1}}{e_n} = \dfrac{1}{2}$.

Alors qu'en général la méthode de Newton-Raphson est d'ordre 2, cette méthode n'est que d'ordre 1 dans ce cas particulier (lorsque le zéro de f est d'ordre 2).

b) Si l'on reprend ces calculs avec la nouvelle relation $x_{n+1} = x_n - p\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ on obtient cette fois :

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{(2-p)h(x_n)+(x_n-\alpha)h'(x_n)}{2h(x_n)+(x_n-\alpha)h'(x_n)}$$

ce qui montre que si $p \neq 2$ on a $\lim \dfrac{e_{n+1}}{e_n} = 1 - \dfrac{p}{2} \neq 0$. La méthode est toujours d'ordre 1.

Il reste à examiner le cas où $p = 2$:

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{(x_n-\alpha)h'(x_n)}{2h(x_n)+(x_n-\alpha)h'(x_n)} \qquad \text{donc} \qquad \frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \frac{h'(x_n)}{2h(x_n)+(x_n-\alpha)h'(x_n)}.$$

Ainsi, $\lim \dfrac{e_{n+1}}{e_n^2} = \dfrac{h'(\alpha)}{2h(\alpha)} = \dfrac{f^{(3)}(\alpha)}{6f''(\alpha)}$ et la méthode est donc au moins d'ordre 2 (et d'ordre 2 lorsque $f^{(3)}(\alpha) \neq 0$).