

CONCOURS D'ADMISSION 2002

COMPOSITION D'INFORMATIQUE

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices **n'est pas autorisée** pour cette épreuve.

Le langage de programmation choisi par le candidat doit être spécifié en tête de la copie.

On attachera une grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Dans tout le problème un *système monétaire* est un ensemble de n entiers naturels non-nuls distincts $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$, avec $n > 0$ et $d_n = 1$. Les d_i sont les *dénominations* du système. Par convention, les dénominations sont présentées par ordre *décroissant*. Par exemple, le système de l'euro est l'ensemble $\{500, 200, 100, 50, 20, 10, 5, 2, 1\}$.

Une *somme* (d'argent) est une suite finie $\langle e_1, e_2, \dots, e_m \rangle$ d'entiers appartenant à D . Les éléments de cette suite sont des *espèces*. On remarquera bien que deux espèces d'une somme peuvent porter la même dénomination, qu'une somme peut être vide, et qu'il n'y a pas nécessairement d'espèces de dénomination 1 dans une somme. Par convention, les espèces sont présentées par ordre de dénominations décroissantes.

La *valeur* d'une somme S , notée $\mathcal{V}(S)$, est tout simplement la somme arithmétique de ses espèces, tandis que sa *taille*, notée $|S|$, est le nombre de ses éléments (l'entier m ci-dessus). Étant donné un entier naturel v , une somme de valeur v est un *représentant* de v . Par exemple, le portefeuille d'un citoyen européen peut contenir 3 billets de 10 euros, deux billets de 5 euros et une pièce de 1 euro. Cette somme est notée $\langle 10, 10, 10, 5, 5, 1 \rangle$, sa valeur est 41 et sa taille 6.

Une somme S est *extraite* d'une autre P dite portefeuille, si et seulement si S est une suite extraite de P . Intuitivement, « la somme S est extraite de P » signifie que l'on paye sa valeur à l'aide d'espèces prises dans le portefeuille P . Par exemple, notre citoyen européen peut payer exactement 15 euros en extrayant un billet de 10 euros et un autre de 5 euros de son portefeuille.

PROGRAMMATION. Dans les deux premières parties du problème, les systèmes monétaires et les sommes sont représentés en machine par des listes d'entiers.

(* Caml *)	<div style="text-align: center; margin-bottom: 5px;">{ Pascal }</div> <pre> type liste = ^cellule ; cellule = record contenu : integer ; suivant : liste ; end ; systeme = liste ; somme = liste ; </pre>
<pre> type systeme == int list ;; type somme == int list ;; </pre>	

En outre, on supposera (pour les arguments) et on garantira (pour les résultats) les propriétés suivantes :

- tous les entiers présents dans les listes sont strictement positifs ;
- toutes les listes sont triées en ordre décroissant ;
- les listes de type `systeme` contiennent des entiers distincts ; leur dernier élément est 1.

En Pascal, la liste vide est `nil` et l'on pourra pour construire les listes utiliser la fonction suivante :

```
function cons(contenu : integer ; suivant : liste) : liste ;
var r : liste ;
begin
  new(r) ;
  r^.contenu := contenu ;
  r^.suivant := suivant ;
  cons := r
end ;
```

Cette fonction est applicable pour construire les listes des deux types `somme` et `systeme`.

Question 1. Écrire la fonction `valeur` qui prend une somme en argument et renvoie sa valeur.

(* Caml *)	{ Pascal }
valeur : somme -> int	function valeur(s:somme) : integer ;

I. Payer le compte exact.

Dans cette partie on considère le problème du paiement exact. Dans les termes du préambule, cela revient, étant donné un entier naturel p , à trouver un représentant de p .

Une démarche possible pour payer exactement le prix p est la démarche dite gloutonne, que l'on peut décrire informellement ainsi :

- donner l'espèce la plus élevée possible — c'est à dire de la plus grande dénomination d disponible et telle que $d \leq p$;
- recommencer en enlevant l'espèce donnée au prix à payer — c'est dire poser p égal à $p - d$.

Évidemment, le processus s'arrête lorsque le prix initial est entièrement payé.

Question 2. Dans cette question, on suppose que l'acheteur dispose toujours des espèces dont il a besoin.

- a) Montrer que la démarche gloutonne réussit toujours.
- b) Écrire une fonction `glouton` qui prend en argument un système monétaire `sys` et un prix à payer `p` et renvoie la liste des espèces à utiliser pour payer. La somme renvoyée sera calculée en suivant la démarche gloutonne.

(* Caml *)	{ Pascal }
glouton : systeme -> int -> somme	function glouton (sys:systeme ; p:integer):somme ;

Question 3. On tient cette fois compte des ressources de l'acheteur. Dans les termes du préambule cela revient à trouver une somme ayant pour valeur le prix à payer et extraite d'une somme donnée, dite portefeuille.

- a) Montrer, à l'aide d'un exemple utilisant le système européen, que la stratégie gloutonne peut échouer pour un prix donné, même si il est possible de payer compte tenu des ressources disponibles.
- b) Écrire une fonction `paye_glouton` qui prend en argument une somme `pf`, représentant le contenu du portefeuille, ainsi qu'un prix `p`; et qui renvoie une somme extraite de `pf` et dont la valeur est `p`. La somme renvoyée sera calculée en suivant la démarche gloutonne, si cette démarche échoue, la fonction `paye_glouton` doit renvoyer la liste vide.

<pre>(* Caml *) paye_glouton : somme -> int -> somme</pre>		<pre>{ Pascal } function paye_glouton (pf:somme ; p:integer):somme ;</pre>
--	--	--

Question 4. Écrire une fonction `compte_paiements` qui prend en arguments un portefeuille `pf` et un prix `p`; et qui renvoie le nombre de façons de payer `p` à l'aide des espèces de `pf`. Autrement dit cette fonction renvoie le cardinal de l'ensemble des représentants de `p` extraits de `pf`.

<pre>(* Caml *) compte_paiements : somme -> int -> int</pre>		<pre>{ Pascal } function compte_paiements (pf:somme ; p:integer):integer ;</pre>
--	--	--

REMARQUE. Deux espèces de même dénomination sont distinguées. Ainsi, si le portefeuille est $\langle 2, 2, 2 \rangle$ et le prix 2, alors il y a trois façons de payer.

II. Payer le compte exact et optimal.

Une somme est *optimale* lorsque sa taille est minimale parmi un ensemble de sommes de valeur donnée. Par exemple, la somme $S = \langle 20, 20, 1 \rangle$ montre que le portefeuille de notre citoyen européen ($P = \langle 10, 10, 10, 5, 5, 1 \rangle$) n'est pas optimal parmi les sommes de valeur 41. En effet, la taille de S est 3 et elle est strictement inférieure à la taille de P .

Dans cette partie un portefeuille P est fixé. Pour tout entier naturel p , on pose $M(p)$ égal à un représentant de p optimal parmi les représentants de p extraits de P , si une telle somme existe; ou la somme vide, si une telle somme n'existe pas. Le but de cette partie est la détermination de $M(p)$.

Question 5. Le but de cette question préalable est de préciser quelques opérations sur les sommes.

a) Soit une somme S comprenant k espèces de dénomination d , on définit l'ajout de d à S , noté $S + \langle d \rangle$, comme la somme qui comprend $k + 1$ espèces de dénomination d et qui est inchangée autrement. Écrire la fonction `ajoute` qui prend en arguments une somme `s` et une dénomination `d` et qui renvoie la liste représentant l'ajout de `d` à `s`.

<pre>(* Caml *) ajoute : somme -> int -> somme</pre>		<pre>{ Pascal } function ajoute (s:somme ; d:integer):somme ;</pre>
--	--	---

b) On définit la différence de deux sommes S et S' , notée $S - S'$, comme suit. Pour toute dénomination d , soit k le nombre d'espèces de dénomination d comprises dans S et k' le nombre d'espèces de dénominations d comprises dans S' :

- si $k > k'$, alors $S - S'$ comprend $k - k'$ espèces de dénomination d ;
- sinon, $S - S'$ ne comprend aucune espèce de dénomination d .

Écrire la fonction `diff` qui prend deux sommes en arguments et renvoie leur différence.

<pre>(* Caml *) diff : somme -> somme -> somme</pre>		<pre>{ Pascal } function diff(s,t:somme):somme ;</pre>
--	--	--

Question 6. Soit i un entier naturel. On note $T(i)$ l'ensemble des entiers naturels p , tels que la somme $M(p)$ est de taille i . On définit également une suite de fonctions M_0, M_1, \dots où la fonction M_i est la restriction à $\bigcup_{0 \leq j \leq i} T(j)$ de la fonction M .

Déterminer $T(i)$ et M_i dans le cas du portefeuille européen $\langle 10, 10, 10, 5, 5, 1 \rangle$ et pour i égal à 0, 1 et 2.

Question 7. On suppose donné un tableau global de sommes, **tab**, de taille suffisante (cette condition est précisée par la suite) et dont chaque case vaut initialement la liste vide.

<pre>(* Caml *) tab : somme vect</pre>	<pre>{ Pascal } tab : array [0..QMAX] of somme</pre>
--	--

Pour un entier i donné, on encode simultanément l'ensemble $T(i)$ et la fonction M_i de la façon suivante :

- une liste d'entiers représente $T(i)$;
- si $M_i(p)$ est défini, alors la case d'indice p de **tab** contient $M_i(p) = M(p)$. Sinon, la case d'indice p de **tab** n'existe pas ou contient la liste vide.

a) Écrire la fonction **etape** qui prend en arguments, un portefeuille **pf**, un prix à payer **p** et une liste d'entiers représentant l'ensemble $T(i)$, et qui renvoie une liste d'entiers représentant $T(i+1)$. On supposera en outre que le tableau **tab** encode M_i avant l'appel de la fonction **etape** et on demande que le tableau **tab** encode M_{i+1} au retour de la fonction **etape**.

<pre>(* Caml *) etape : somme -> int -> int list -> int list</pre>	<pre>{ Pascal } function etape (pf:somme ; p:integer ; ti:liste):liste ;</pre>
---	--

On notera :

- les listes représentant $T(i)$ et $T(i+1)$ ne sont pas nécessairement triées;
- la condition « **tab** est de taille suffisante » est précisée : le tableau **tab** est supposé tel qu'il existe bien des cases d'indice q , pour q inférieur ou égal à **p**.

b) En déduire une fonction **optimal** qui prend en argument un portefeuille **pf** et un prix **p** et qui renvoie une somme optimale de valeur **p** et dont les espèces sont extraites de **pf**. Si il n'est pas possible de faire l'appoint, la fonction **optimal** renverra la liste vide.

<pre>(* Caml *) optimal : somme -> int -> somme</pre>	<pre>{ Pascal } function optimal(pf:somme ; p:integer):somme ;</pre>
---	--

III. Étude des systèmes monétaires.

Un système monétaire est dit *canonique*, lorsque la stratégie gloutonne sans limitation de ressources (cf. question ??) appliquée à tout prix p produit une somme optimale parmi les représentants de p .

Question 8. Montrer que l'ancien système britannique $\langle 240, 60, 30, 24, 12, 6, 3, 1 \rangle$ n'est pas canonique.

Le but de cette partie est de produire un programme qui décide si un système monétaire est canonique. Dans cette étude on fixe un système monétaire D de n dénominations, représenté cette fois par le vecteur

de n entiers naturels $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$. Une somme S sera également représentée par un vecteur de n entiers naturels, $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, mais s_i est cette fois le nombre d'espèces de dénomination d_i présentes dans la somme S .

Ainsi le système européen est le vecteur $(500, 200, 100, 50, 20, 10, 5, 2, 1)$ et le portefeuille du citoyen est le vecteur $(0, 0, 0, 0, 0, 3, 2, 0, 1)$. Les définitions (et les notations) de la valeur et de la taille sont inchangées :

$$\mathcal{V}(S) = \sum_{i=1}^n s_i \cdot d_i, \quad |S| = \sum_{i=1}^n s_i$$

Par ailleurs les sommes sont ordonnées (totalement) selon l'ordre lexicographique, noté $<_\ell$ et défini ainsi : pour tous vecteurs U et V , on a $U <_\ell V$ si et seulement si :

1. il existe i , $1 \leq i \leq n$, tel que $u_i < v_i$;
2. et, pour tout j , $1 \leq j < i$, on a $u_j = v_j$.

Ainsi on a par exemple $(0, 1) <_\ell (0, 2)$ ($i = 2$) et $(0, 4) <_\ell (1, 0)$ ($i = 1$). On note \leq_ℓ la relation d'ordre définie par $U \leq_\ell V$, si et seulement si $U <_\ell V$ ou $U = V$.

On définit un second ordre total sur l'ensemble des sommes, noté \sqsubseteq , de la façon suivante :

$$U \sqsubseteq V, \quad \text{si et seulement si} \quad |U| > |V| \text{ ou } (|U| = |V| \text{ et } U \leq_\ell V)$$

Les relations d'ordre introduites permettent les *définitions* suivantes des représentants gloutons et optimaux (il n'est pas demandé de comparer ces nouvelles définitions aux anciennes). Étant donné un entier naturel p , le représentant glouton de p , noté $G(p)$ est le plus grand selon l'ordre lexicographique \leq_ℓ des représentants de p . Tandis que le représentant optimal de p , noté $M(p)$, est le plus grand selon l'ordre \sqsubseteq des représentants de p .

Dès lors le système D est canonique, si et seulement si on a $G(p) = M(p)$ pour tout entier naturel p . En revanche, D n'est pas canonique, si et seulement si il existe un ou des entiers naturels w , dits *contre-exemples*, tels que $M(w) \neq G(w)$, c'est à dire tels que $M(w) <_\ell G(w)$.

PROGRAMMATION. Dans cette partie on considère l'entier n (nombre de dénominations du système monétaire) fixé. Les systèmes monétaires et les sommes sont représentées en machine par des tableaux d'entiers.

<pre>(* Caml *) let n = ... (* n:int *) ;; type tsysteme == int vect ;; type tsomme == int vect ;;</pre>		<pre>{ Pascal } const n = ... ; type tsysteme = array [1..n] of integer ; tsomme = array [1..n] of integer ;</pre>
---	--	---

(En Caml, on supposera ces tableaux de taille $n + 1$, de sorte que les indices des tableaux correspondent à ceux des vecteurs.)

Question 9. Écrire la fonction `tglouton` qui prend en argument un système monétaire `sys` selon le nouveau type et un prix `p` et qui renvoie le représentant glouton de ce prix. Le coût de `tglouton` (c'est-à-dire le nombre maximum d'instructions élémentaires utilisées lors d'un appel à `tglouton`) doit être linéaire en n .

<pre>(* Caml *) tglouton : tsysteme -> int -> tsomme</pre>		<pre>{ Pascal } function tglouton (sys:tsysteme ; p:integer) : tsomme;</pre>
---	--	---

Question 10.

a) Montrer que $p < q$ entraîne $G(p) <_{\ell} G(q)$.

Soit k , indice, avec $1 \leq k \leq n$. On pose I_k égal à la somme composée d'une seule espèce de dénomination d_k . Soit encore p , entier naturel.

b) On suppose que $G(p)$ comprend au moins une espèce de dénomination d_k . Montrer qu'alors on a $G(p - d_k) = G(p) - I_k$. (Le deuxième « - » ci-dessus est la différence des sommes, que l'on peut simplement voir comme la soustraction appliquée aux vecteurs et définie composante par composante.)

c) De même, si p est tel que $M(p)$ comprend au moins une espèce de dénomination d_k , montrer que l'on a alors $M(p - d_k) = M(p) - I_k$.

Question 11. Dans cette question on suppose le système monétaire D non-canonique et on considère le contre-exemple minimal w , c'est à dire l'entier w tel que :

- $M(w) \neq G(w)$ (et donc $M(w) <_{\ell} G(w)$);
- et, pour tout entier $w' < w$, $M(w') = G(w')$.

On note $M(w) = (m_1, m_2, \dots, m_n)$. Soient encore i l'indice minimal tel que $m_i > 0$ et j l'indice maximal tel que $m_j > 0$.

- a) On note $G(w) = (g_1, g_2, \dots, g_n)$. Montrer qu'il n'existe pas d'indice k , tel que $m_k > 0$ et $g_k > 0$.
- b) Montrer que l'on a $i > 1$.
- c) Montrer que l'on a $d_{i-1} < w < d_{i-1} + d_j$.

Question 12. Toujours en supposant le système D non-canonique et en conservant les définitions et notations de la question précédente, on admet l'encadrement suivant (qui cette fois s'applique aux sommes) :

$$M(w) - I_j \leq_{\ell} G(d_{i-1} - 1) <_{\ell} M(w).$$

a) Montrer que cet encadrement permet de connaître les composantes de $M(w)$ en fonction de celles de $G(d_{i-1} - 1)$, en supposant i et j connus.

b) Écrire une fonction **canonique**, qui prend en argument un système monétaire **sys** et décide si ce système est canonique.

<i>(* Caml *)</i>		{ <i>Pascal</i> }
canonique : <code>tsysteme</code> -> bool		fonction canonique(<code>sys:tsysteme</code>) : boolean

Le coût de **canonique** doit être en $O(n^3)$.

- c) Montrer que le système européen est canonique.

* *
*