CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE D'INFORMATIQUE DES MINES - 2001

1 Problème sur les automates finis

1 - Le langagage choisi ici est Caml.

2 - Le graphe G est représenté par un tableau à 3 dimensions de booléens.
Nous utiliserons le fait qu'en Caml, les indices des tableaux commencent à 0,; ainsi pour avoir des indices de 1 à n, nous déclareront un tableau de taille $n+1$ dont la première case ne sera pas utilisée.

Ainsi, pour $\boxed{(i,k,j) \in [1;N_E] \times [1,N_L] \times [1,N_E],\ G[i,k,j] = \texttt{true} \iff e_i \xrightarrow{\ell_k} e_j.}$

```
let initialise_graphe ne nl  =
   let m =  make_vect (ne+1) (make_matrix (nl+1) (ne+1) false)
       in
         for i = 1 to ne do m.(i) <- (make_matrix (nl+1) (ne+1) false) done;
       m ;;
```

Remarque :
l'objectif de la boucle est de créer un nouveau tableau à deux dimensions pour chaque indice i, sans quoi tous les $m.(i)$ "pointent" sur le même tableau et alors, toute modification d'un élément $m.(i)$ se répercute sur tous les autres.

3 - Implémentation du graphe correspondant au schéma de l'énoncé.

```
let ne = 5;;
let nl = 2;;

let G = let m = initialise_graphe 5 2 in
                m.(1).(1).(2) <- true;
                m.(2).(2).(3) <- true;
                m.(3).(1).(1) <- true;
                m.(3).(2).(5) <- true;
                m.(3).(1).(4) <- true;
                m.(5).(1).(4) <- true;
m ;;
```

4 - La matrice d'adjacence est un tableau de type `bool vect vect` à N_E+1 lignes et N_E+1 colonnes, la première ligne et la première colonne n'étant pas utilisées.

5 - La matrice est initialisée avec `false`. Si $i \neq j$, alors $C[i,j] = \texttt{true} \iff \exists k \in [1,N_E]\ /\ G[i,k,j] = \texttt{true}$.

```
let initialise_matrice_adjacence a =
     let m = make_matrix (ne + 1) (ne + 1) false in
        for i = 1 to ne  do
           for j = 1 to ne  do
               if i = j then m.(i).(j) <- true
                        else for k = 1 to nl do
                                 if a.(i).(k).(j) then m.(i).(j) <- true
                             done
           done
        done;
      m;;

let C = initialise_matrice_adjacence G;;
```

Remarque : on pourrait remplacer la boucle `for` *portant sur* `k` *par une boucle* `while` *et s'arrêter dès que* $C[i,j] =$ `true`. *La complexité est alors la même dans le pire des cas.*

6 - On parcourt entièrement le tableau G, d'où une complexité temporelle en $\boxed{O\big((N_E)^2\, N_L\big)}$.

7 - Notons $\mathcal{P}$ la *propriété* de l'énoncé.
Dans la matrice C_0, les calculs relient directement l'origine et l'extrémité sans traverser d'autres états, donc C_0 vérifie $\mathcal{P}$ au rang 0.

8 - Supposons que C_{N_E} vérifie la propriété $\mathcal{P}$ au rang N_E.
Montrons que $C_{N_E} = C$, c'est à dire $\forall (i,j),\ \big(C_{N_E}[i,j] = \texttt{true} \Longleftrightarrow C[i,j] = \texttt{true}\big)$.
$*$ il est évident d'abord que $(C_{N_E}[i,j] = \texttt{true} \Longrightarrow C[i,j] = \texttt{true})$.
$*$ Réciproquement, si $C[i,j] = \texttt{true}$, alors il existe un calcul d'origine e_i et d'extrémité e_j.
Ce calcul traverse des états qui sont dans l'automate, donc ont tous un numéro $\leq N_E$, donc $C_{N_E}[i,j] = \texttt{true}$.

9 - On suppose que C_k vérifie $\mathcal{P}$ au rang k et que C_{k+1} vérifie $\mathcal{P}$ au rang $k+1$.

- Supposons que $C_{k+1}[i,j] = \texttt{true}$.
$*$ si $i = j$, alors $C_k[i,j] = \texttt{true}$.
$*$ si $i \neq j$, alors il existe un calcul d'origine e_i et d'extrémité e_j. ne traversant que des états de numéro $\leq k+1$ (puisque C_{k+1} vérifie $\mathcal{P}$ au rang $k+1$).
- s'il ne traverse que des états de numéro $\leq k$, alors $C_k[i,j] = \texttt{true}$ (puisque C_k vérifie $\mathcal{P}$ au rang k).
- sinon, il traverse au moins une fois e_{k+1}. Si ce calcul traverse plusieurs fois e_{k+1}, on peut se ramener, en supprimant toutes les boucles d'origine et d'extrémité e_{k+1}, au cas d'un calcul ne traversant qu'une seule fois e_{k1}.
Ce calcul est donc constitué de la juxtaposition de deux calculs, l'un joignant e_i à e_{k+1}, l'autre joignant e_{k+1} à e_j, tous deux ne traversant que des états de numéro $\leq k$, donc $C_k[i,k+1] = \texttt{true}$ et $C_k[k+1,j] = \texttt{true}$.
- La réciproque est immédiate.

10 - On suppose que C_k vérifie $\mathcal{P}$ au rang k et que C_{k+1} vérifie $\mathcal{P}$ au rang $k+1$.

a - L'implication $\big(C_k[i,k+1]) = \texttt{true} \Longrightarrow C_{k+1}[i,k+1]) = \texttt{true}\big)$ est évidente car C_k vérifie $\mathcal{P}$ au rang k et C_{k+1} vérifie $\mathcal{P}$ au rang $k+1$.

Supposons que $C_{k+1}[i,k+1]) = \texttt{true}$. Il existe donc un calcul joignant e_i à e_{k+1} ne traversant que des états de numéro $\leq k+1$ car C_{k+1} vérifie $\mathcal{P}$ au rang $k+1$. En supprimant de ce calcul les boucles énentuelles passant par e_{k+1}, on se ramène à un calcul joignant e_i à e_{k+1} dans lequel tous les états traversés ont un numéro $\leq k$, donc $C_k[i,k+1]) = \texttt{true}$.

b - Analogue

11 - On suppose connaître la matrice C_k vérifiant $\mathcal{P}$ à l'ordre k.
D'après **9**, pour obtenir C_{k+1}, il suffit de mettre à `true` tous les $C_k[i,j]$ tels que $C_k[i,j] =$ `false`, $C_k[i,k+1] =$ `true` et $C_k[k+1,j] =$ `true`. D'après **10**, ce sont les seuls cas à considérer.

12 - L'algorithme précédent nécessite de parcourir toute la matrice, d'où une complexité en $O\big((N_E)^2\big)$.

13 -

```
let matrice_accessible a =
  let m = initialise_matrice_adjacence a in
     for k = 1 to ne  do
        for i = 1 to ne  do
           for j=1 to ne  do
              if (not m.(i).(j)) && m.(i).(k) && m.(k).(j)
              then m.(i).(j) <- true
           done
        done
     done;
   m;;

let C =  matrice_accessible G ;;
```

14 - Le calcul de C_0 a une complexité en $O\big((N_L\,(N_E)^2\big)$ et chaque boucle portant sur `k` en $O\big((N_E)^2$, d'où une complexité totale en $\boxed{O\big((N_L\,(N_E)^2 + (N_E)^3\big).}$

15 - Dans le cas de l'exemple proposé, cela donne en initialisant tous les éléments de U avec `true` :

```
let I = [|true; true;false;false;false;false|];;  (* le premier true ne compte pas *)
let F = [|true; false;false;true;true|];;
let U = [|true; true;true;true;true;true|];;
```

16 -

```
let etats_inutiles a init final =
   let m = matrice_accessible a in
     for k = 1 to ne do
        let i_acces = ref(false) and f_acces = ref(false) in
        let i = ref 1 in
          while (not ! i_acces) && (!i <= ne) do
             if init.(!i) && m.(!i).(k) then i_acces := true;
             i := !i + 1;
          done;
        let j = ref 1 in
          while (not ! f_acces) && (!j <= ne) do
             if final.(!j) && m.(k).(!j) then f_acces := true;
             j := !j + 1;
          done;
        if !i_acces && !f_acces then U.(k) <- false;
      done;
    U;;

 etats_inutiles G I F ;;
```

17 - En plus du calcul de la matrice d'accessibilité qui a une complexité en $O\big((N_L\,(N_E)^2 + (N_E)^3\big)$, chaque boucle sur k parcourt dans le pire des cas les deux vecteurs `I` et `F` , d'où une complexité en $O(N_E)$ pour chaque boucle, donc en $O\big((N_E)^2\big)$ pour l'ensemble des boucles, négligeable devant $O\big((N_E)^3\big)$.

18 - Chaque case contient un booléen, donc son traitement a un coût constant. (Ce ne serait pas le cas si le contenu était un entier long ou une chaîne alphanumérique de longueur variable).

$$*+*+*+*+*+*$$

2 Problème de complexité algorithmique

1 - Le langagage choisi ici est Caml.

2 - *La méthode élémentaire*

a - `let rec es x n = if n=1 then x else x * (es x (n-1)) ;;`

b - Le nombre de multiplications est égal à $\boxed{n-1.}$

2 - *La méthode dichotomique*

a - Supposons que $n = \overline{a_p \ldots a_0}^2$ avec $a_p = 1$. Posons $n_p = 1$ et $n_k = \overline{a_p \ldots a_k}^2$ pour $0 \leq k \leq p-1$.

Au départ, on initialise la variable y avec la valeur x.
Montrons qu'à la fin de chaque boucle portant sur k, la variable y contient x^{n_k}.
A l'entrée de la première boucle, y contient $x^{n_p} = x$.
Supposons qu'à l'entrée de la boucle indexée par k, y contienne $x^{n_{k+1}}$.
Or $n_k = 2\,n_{k+1} + a_k$, donc $x^{n_k} = x^{2\,n_{k+1}+a_k} = \left(x^{n_{k+1}}\right)^2 x^{a_k} = y^2\,x^{a_k}$. Donc pour avoir x^{n_k}, il faut bien d'abord élever y au carré (c'est à dire remplacer y par $y * y$), puis remplacer y par $y * x$ lorsque $a_k = 1$. C'est justement ce que propose l'algorithme de Legendre, donc à la sortie de la boucle, y contient bien x^{n_k}.

b - Avec les notations précédentes, $\lambda(n) = p + 1$. La boucle sur k est effectuée p fois (k variant de $p-1$ à 0), ce qui donne $p = \lambda(n) - 1$ élévations au carré. Le nombre de multiplications de y par x est égal au nombre de a_k égaux à 1 pour $0 \le k \le p-1$, c'est donc $\nu(n) - 1$.
Le nombre de multiplications est donc égal à $\boxed{\lambda(n) + \nu(n) - 2.}$

3 - *La méthode dichotomique*

```
let rec ed x n = if n =1 then x
                         else if pair n then ed (x*x) (n/2)
                                        else x * (ed x (n-1)) ;;

let rec cd n = if  n = 1 then 0
                         else if pair n then 1 + cd(n/2)
                                        else 1 + cd (n-1) ;;
```

c - $\lambda(1) = 1$.
$\underline{\lambda(2k) = 1 + \lambda(k)}$ car on rajoute un 0 à droite de la r.b.m. de k pour obtenir celle de $2k$.
$\underline{\lambda(2k+1) = \lambda(2k)}$ car la r.b.m. de $2k$ se termine par 0 qu'on remplace par 1 pour obtenir celle de $2k+1$.

```
let rec lambda n = if n = 1 then 1
                      else if pair n then 1 + (lambda (n/2))
                                     else lambda (n-1)  ;;
```

d - $\underline{\nu(1) = 1}$, $\underline{\nu(2k) = \nu(k)}$, $\underline{\nu(2k+1) = 1 + \nu(k)}$.

```
let rec mu n = if n = 1 then 1
                        else if pair n then mu (n/2)
                                       else 1 + mu (n-1) ;;
```

e - $\pi(1) = 1 + 1 - 2 = 0$
$\underline{\pi(2k)} = \lambda(2k) + \nu(2k) - 2 = 1 + \lambda(k) + \mu(k) - 2 = \underline{1 + \pi(k)}$
$\underline{\pi(2k+1)} = \lambda(2k+1) + \nu(2k+1) - 2 = \lambda(2k) + 1 + \underline{\mu(2k)} - 2 = \underline{1 + \pi(2k)}$

```
let rec pi n = if n = 1 then 0
                        else if pair n then 1 + pi (n/2)
                                       else 1 + pi (n-1) ;;
```

f - On observe en comparant les fonctions `cd` et `pi` qu'elles sont égales.
Donc le nombre de multiplications effectuées par `ed` est aussi égal à $\boxed{\pi(n) = \lambda(n) + \nu(n) - 2.}$

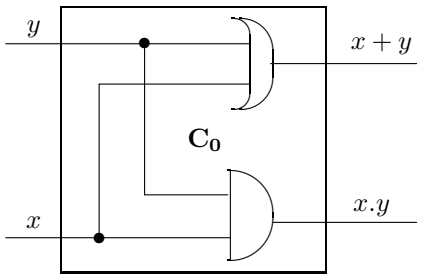
g - Lorsque $n = 2^k$, on trouve que `ed` nécessite exactement k multiplications.
(Deux façons : $\pi(n) = (k+1) + 1 - 2 = k$ ou bien parce que $p = k$ et que l'algorithme de Legendre n'effectue que des élévations au carré dans ce cas).

5 - *La méthode des facteurs*
Lorsque $n = 33 = 3 \times 11$, elle consiste à calculer :
. $x^2 = x * x$, $\quad y = x^3 = x * x^2$
. $y^2 = y * y$, $\quad y^4 = y^2 * y^2$, $\quad y^5 = y * y^4$, $\quad y^{10} = y^5 * y^5$, $\quad y^{11} = y * y^{10}$.
On a donc effectué $\pi(3) + \pi(11) = 2 + 5 = 7$ multiplications, alors que par la méthode dichotomique nécessite seulement $\pi(33) = 6 + 2 - 2 = 6$ multiplications car $33 = \overline{100001}^2$.

3 Problème de logique des propositions

Dans ce corrigé, j'utiliserai les notations suivantes : $\underline{x+y=x\vee y,\quad x.y=x\wedge y}$ et $\underline{\overline{x}=\neg x}$.

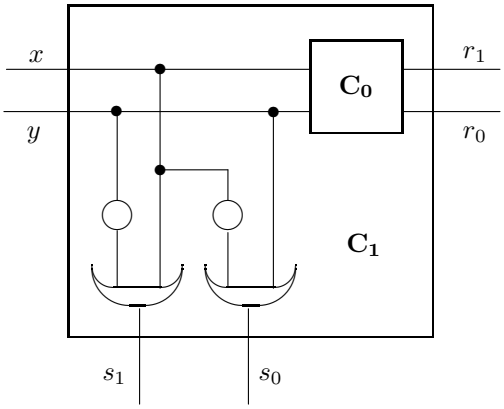
1 - On utilise que $\underline{\max(x,y)=x\vee y=x+y}$ et $\underline{\min(x,y)=x\wedge y=x.y}$.



2 - On a immédiatement $\underline{r_1=\max(x,y)=x+y}$ et $\underline{r_0=\min(x,y)=x.y}$.

x	y	s_1	s_0
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	1	1

donc, $\begin{cases}\overline{s_1}=\overline{x}\wedge y & \text{d'où } s_1=\overline{\overline{x}\wedge y}=x\vee\overline{y}\\ \overline{s_0}=x\wedge\overline{y} & \text{d'où } s_0=\overline{x\wedge\overline{y}}=\overline{x}\vee y\end{cases}$.



3 -

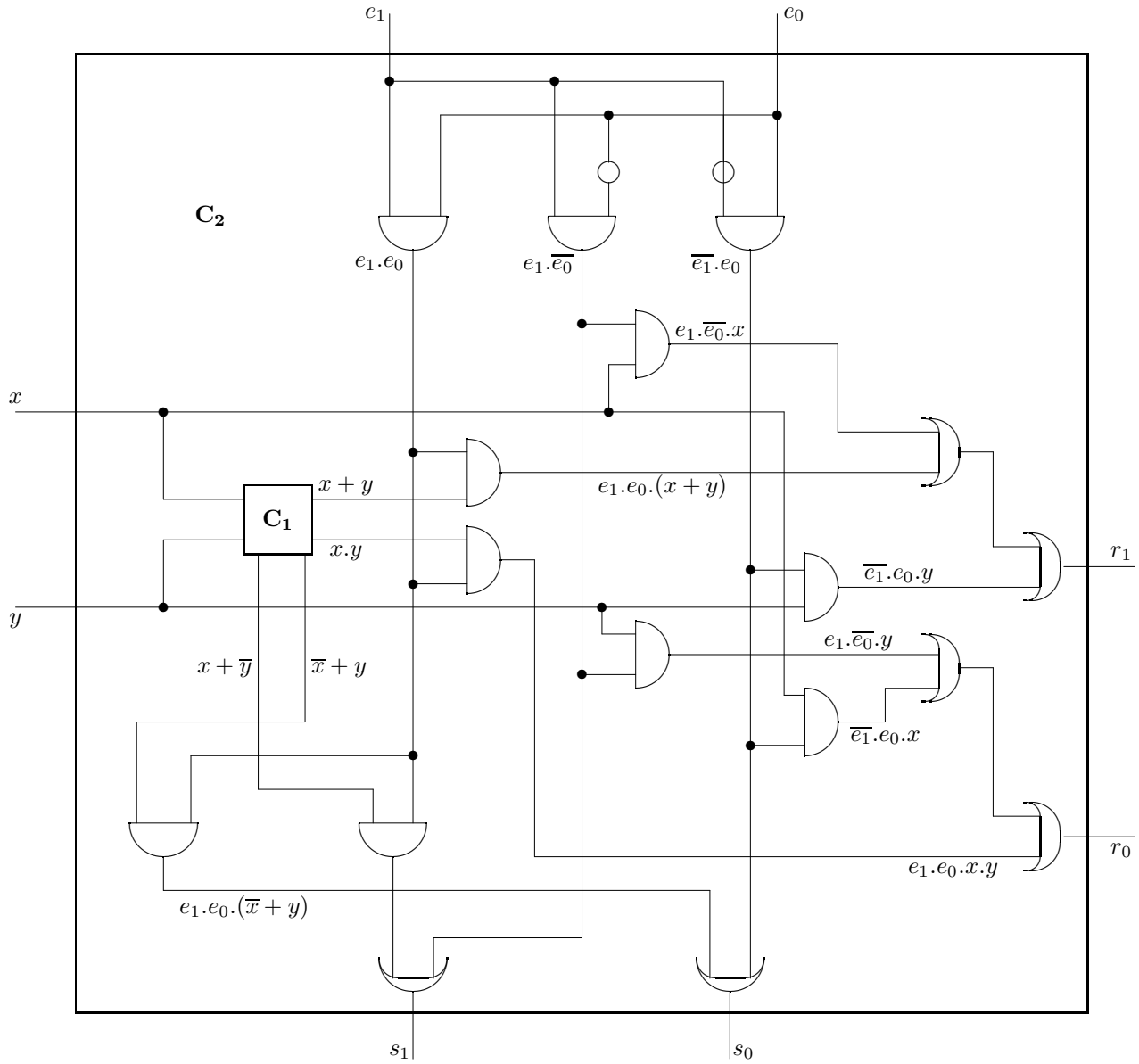
e_1	e_0	x	y	r_1	r_0	s_1	s_0
1	0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0	1
1	1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1

$$r_1=e_1.\overline{e_0}.x+\overline{e_1}.e_0.y+e_1.e_0.(x+y)$$

$$r_0=e_1.\overline{e_0}.y+\overline{e_1}.e_0.x+e_1.e_0.(x.y)$$

$$s_1=e_1.\overline{e_0}+e_1.e_0.(x+\overline{y})$$

$$s_0=\overline{e_1}.e_0+e_1.e_0.(\overline{x}+y)$$



4 - On applique d'abord le circuit C_1 au couple (a_7, b_7).
On récupère en particulier en sortie le couple (s'_7, s_7) qui indique le résultat de la comparaison de a_7 et b_7.
$(s'_7, s_7) = (0,1)$ si $a_7 < b_7$, $(s'_7, s_7) = (1,1)$ si $a_7 = b_7$, $(s'_7, s_7) = (1,0)$ si $a_7 > b_7$.
De plus $c_7 = \max(a_7, b_7)$ et $d_7 = \min(a_7, b_7)$.

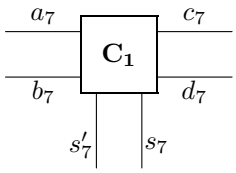
Supposons que :

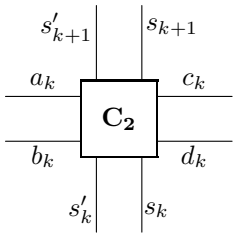
$$(s'_{k+1}, s_{k+1}) = \begin{cases} (0,1) & \text{si } \overline{a_7 \dots a_{k+1}}^2 < \overline{b_7 \dots b_{k+1}}^2 \\ (1,1) & \text{si } \overline{a_7 \dots a_{k+1}}^2 = \overline{b_7 \dots b_{k+1}}^2 \\ (1,0) & \text{si } \overline{a_7 \dots a_{k+1}}^2 > \overline{b_7 \dots b_{k+1}}^2 \end{cases} \text{ et que } \begin{cases} \overline{c_7 \dots c_{k+1}}^2 = \max(\overline{a_7 \dots a_{k+1}}^2, \overline{b_7 \dots b_{k+1}}^2 \\ \overline{d_7 \dots d_{k+1}}^2 = \min(\overline{a_7 \dots a_{k+1}}^2, \overline{b_7 \dots b_{k+1}}^2 \end{cases}$$

- Si $(s'_{k+1}, s_k) = (1,0)$, alors $\overline{a_7 \dots a_{k+1}}^2 > \overline{b_7 \dots b_{k+1}}^2$, donc a fortiori $\overline{a_7 \dots a_k}^2 > \overline{b_7 \dots b_k}^2$.
On doit alors renvoyer $c_k = a_k$, $d_k = b_k$ et $(s'_k, s_k) = (1,0)$, ce qui est bien le cas d'après la 1^e ligne définissant le circuit C_2.
- Si $(s'_{k+1}, s_k) = (0,1)$, alors $\overline{a_7 \dots a_{k+1}}^2 < \overline{b_7 \dots b_{k+1}}^2$, donc a fortiori $\overline{a_7 \dots a_k}^2 < \overline{b_7 \dots b_k}^2$.
On doit alors renvoyer $c_k = b_k$, $d_k = a_k$ et $(s'_k, s_k) = (0,1)$, ce qui est bien le cas d'après la 4^e ligne définissant le circuit C_2.
- Si $(s'_{k+1}, s_k) = (1,1)$, alors $\overline{a_7 \dots a_{k+1}}^2 = \overline{b_7 \dots b_{k+1}}^2$.

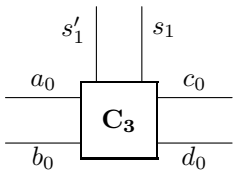
* Si $a_k > b_k$, alors $\overline{a_7 \dots a_k}^2 > \overline{b_7 \dots b_k}^2$.
  On doit alors renvoyer $c_k = a_k$, $d_k = b_k$ et $(s'_k, s_k) = (1, 0)$,
  ce qui est bien le cas d'après la 2^e ligne définissant le circuit C_2.
* Si $a_k < b_k$, alors $\overline{a_7 \dots a_k}^2 < \overline{b_7 \dots b_k}^2$.
  On doit alors renvoyer $c_k = b_k$, $d_k = a_k$ et $(s'_k, s_k) = (0, 1)$,
  ce qui est bien le cas d'après la 5^e ligne définissant le circuit C_2.
* Si $a_k = b_k$, alors alors $\overline{a_7 \dots a_k}^2 = \overline{b_7 \dots b_k}^2$.
  On doit alors renvoyer $c_k = a_k$, $d_k = b_k$ et $(s'_k, s_k) = (1, 1)$,
  ce qui est bien le cas d'après la 3^e ligne définissant le circuit C_2.

On vient de montrer par récurrence que le circuit "composé" suivant est correct.





$$k = \begin{cases} 6 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{cases}$$



$* + * + * + * + * + * + *$