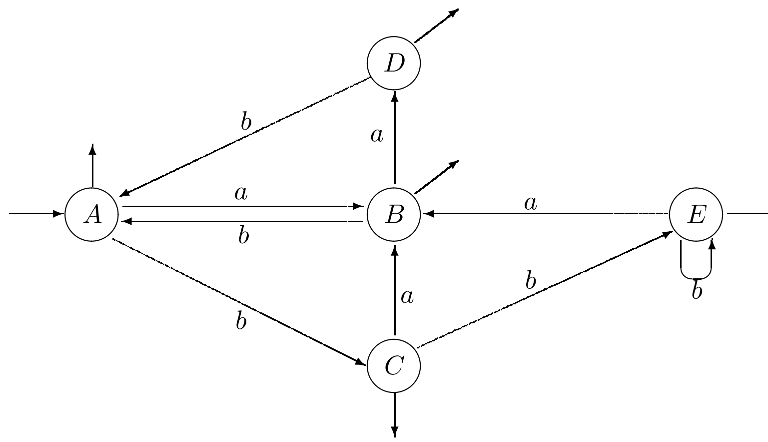
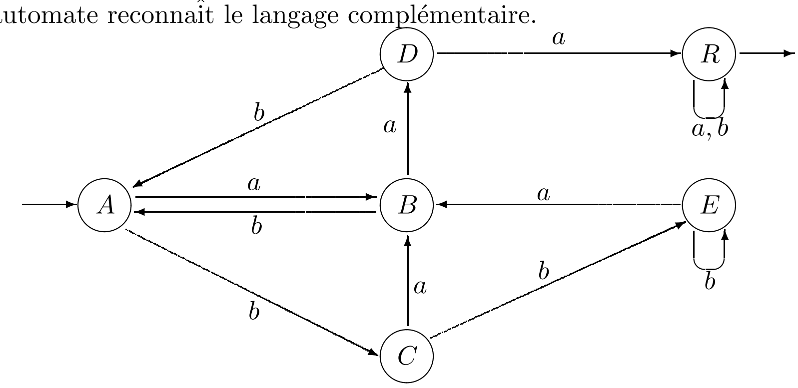
# 1 Exercice sur les automates

**1.** Déterminisation

| | a | b |
|---|---|---|
| $A=\{p,r\}$ | $\{q,r\}$ | $\{p,q\}$ |
| $B=\{q,r\}$ | $\{q\}$ | $\{p,r\}$ |
| $C=\{p,q\}$ | $\{q,r\}$ | $\{p,q,r\}$ |
| $D=\{q\}$ | | $\{p,r\}$ |
| $E=\{p,q,r\}$ | $\{q,r\}$ | $\{p,q,r\}$ |




**2.** Complétons l'auromate déterministe précédent en ajoutant un état rebut $R$ et considérons l'automate "complémentaire" qui s'en déduit en rendant terminal l'état $R$ et non terminal les autres états. On sait que ce nouvel automate reconnaît le langage complémentaire.




On constate que lorsqu'on arrive en l'état final $R$ pour la première fois si et seulement si on vient de lire un mot se terminant par $aaa$. Ainsi le langage complémentaire de $L(\mathcal{A})$ est égal à l'ensemble des mots contenant $aaa$, d'où la conclusion pour $L(\mathcal{A})$.

**3.** Posons $E=b^*(aa^*bb^*)^*a^*$ et montrons que $A^*=L(E)$, c'est à dire en fait $A^*\subset L(E)$.
Montrons par récurrence sur la longueur $n$ d'un mot $m\in A^*$ qu'il est dans $L(E)$.
. C'est immédiat si $n=0$ et $n=1$.
. Supposons que tous les mots de longueur $n-1$ sont dans $L(E)$.
Soit $u$ un mot de longueur $n$.
$*$ S'il se termine par $a$, alors il s'écrit $u=v.a$ avec $v$ de longueur $n-1$.
D'après l'hypothèse de récurrence, $v\in L\big(b^*(aa^*bb^*)^*a^*\big)$, donc $u=v.c$ aussi.
$*$ S'il se termine par $b$, alors il s'écrit $u=v.b$ avec $v$ de longueur $n-1$.
Si $v$ se termine par $a$, alors $v\in L\big(b^*(aa^*bb^*)^*aa^*\big)$, donc $u\in L\big(b^*(aa^*bb^*)^*aa^*b\big)\subset L\big(b^*(aa^*bb^*)^*aa^*bb^*\big)\subset L(E)$.
Si $v$ se termine par $b$, alors $v\in L\big(b^*(aa^*bb^*)^*aa^*bb^*\big)$, donc $u\in L\big(b^*(aa^*bb^*)^*aa^*bb^*\big)\subset L(E)$.

**4.** Les mots ne contenant pas $aaa$ sont tels que $aa^*$ ne peut prendre que les valeurs $\varepsilon$, $a$ et $aa$.
Une expression rationnelle du langage $L(\mathcal{A}$ est donc : $\boxed{b^*\big((a+aa)bb^*\big)^*(\varepsilon+a+aa).}$

## 2 Problème de logique

On notera $\mathcal{V}$ l'ensemble des valuations (applications de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$).

**1.** $\underline{\forall i \in \mathcal{V},\ I_i(F \Rightarrow G) = 1} \iff \forall i \in \mathcal{V},\ \overline{I_i(F)} + I_i(G) = 1 \iff \forall i \in \mathcal{V},\ \big(\overline{I_i(F)} = 1\ \vee\ I_i(G) = 1\big)$

$\iff \forall i \in \mathcal{V},\ \big(I_i(F) = 0\ \vee\ I_i(G) = 1\big)$

$\iff \underline{\forall i \in \mathcal{V},\ \big(I_i(F) = 1 \Rightarrow I_i(G) = 1\big)}$ car $A \Rightarrow B\ \equiv\ (\neg A \vee B)$.

Ainsi $F \Rightarrow G$ est une tautologie si et seulement si chaque fois que $I_1(F) = 1$, alors $I_i(G) = 1$.

**2** Supposons que $F \Rightarrow G$ soit une implication élémentaire.

. Si **f** figure dans $F$, alors $\forall i \in \mathcal{V},\ I_i(F) = 0$, donc $I_i(F \Rightarrow G) = 1$.

. Si **v** figure dans $G$, alors $\forall i \in \mathcal{V},\ I_i(G) = 1$, donc $I_i(F \Rightarrow G) = 1$.

. Sinon, si $F$ et $G$ n'ont pas de variables en commun, alors pour toute valuation $i$ mettant à 1 les variables de $F$ et à 0 celles de $G$, alors $I_i(F) = 1$ et $I_i(G) = 0$, donc $I_i(F \Rightarrow G) = 0$.

Par contre, si $F$ et $G$ ont au moins une variable $x$ en commun, pour toute valuation $i$ :

- si $i(x) = 0$, alors $I_i(F) = 0$, donc $I_i(F \Rightarrow G) = 1$.
- si $i(x) = 1$, alors $I_i(G) = 1$, donc $I_i(F \Rightarrow G) = 1$.

Bilan : $F \Rightarrow G$ est une tautologie dans trois cas :

- ou bien **f** figure dans $F$
- ou bien **v** figure dans $G$
- ou bien **f** ne figure pas dans $F$ et **v** ne figure pas dans $G$ et $F$ et $G$ ont au moins une variable commune.

Ainsi, dans les 4 implications proposées par l'énoncé, seule la $(b)$ n'est pas une tautologie.

**3.** Supposons $A \equiv B$. Alors $\forall i \in \mathcal{V},\ I_i(A) = I_i(B)$, d'où $I_i(A \Rightarrow G) = \overline{I_i(A)} + I_i(G) = \overline{I_i(B)} + I_i(G) = I_i(B \Rightarrow G)$, donc $(A \Rightarrow G)\ \equiv\ (B \Rightarrow G)$.

**4.** Analogue car $I_i(F \Rightarrow A) = \overline{I_i(F)} + I_i(A) = \overline{I_i(F)} + I_i(B) = I_i(F \Rightarrow B)$.

<u>Conséquence</u> : si $A \equiv B$ et $A' \equiv B'$, alors $A \Rightarrow B \equiv A' \Rightarrow B'$, ce qui exprime que la relation d'équivalence $\equiv$ est compatible avec le connecteur $\Rightarrow$.

**5.** $\forall i \in \mathcal{V},\ I_i\big((A \wedge \mathbf{v}) \Rightarrow B\big) = \overline{I_i(A \wedge \mathbf{v})} + I_i(B) = \overline{I_i(A).I_i(\mathbf{v})} + I_i(B) = \overline{I_i(A).1} + I_i(B) = \overline{I_i(A)} + I_i(B) = I_i(A \Rightarrow B)$.

Ainsi $(A \wedge \mathbf{v}) \Rightarrow B\ \equiv\ A \Rightarrow B$.

**6.** $\forall i \in \mathcal{V},\ I_i\big(A \Rightarrow (B \vee \mathbf{f})\big) = \overline{I_i(A)} + I_i(B \vee \mathbf{f}) = \overline{I_i(A)} + I_i(B) + 0 = \overline{I_i(A)} + I_i(B) = I_i(A \Rightarrow B)$.

Ainsi $(A \wedge \mathbf{f}) \Rightarrow B\ \equiv\ A \Rightarrow B$.

**7.** $\forall i \in \mathcal{V},\ I_i\big(F \Rightarrow (G \vee \neg A)\big) = \overline{I_i(F)} + I_i(G \vee \neg A) = \overline{I_i(F)} + I_i(G) + I_i(\neg A) = \overline{I_i(F)} + I_i(G) + \overline{I_i(A)}$

$= \overline{I_i(F).I_i(A)} + I_i(G) = \overline{I_i(F \wedge A)} + I_i(G) = I_i\big((F \wedge A) \Rightarrow G\big)$,

donc $F \Rightarrow (G \vee \neg A)\ \equiv\ (F \wedge A) \Rightarrow G$.

Pour $G = \mathbf{f}$, on obtient : $F \Rightarrow \neg A\ \equiv\ F \Rightarrow (\mathbf{f} \vee \neg A)\ \equiv\ (F \wedge A) \Rightarrow \mathbf{f}$.

**8.** En remplaçant $A$ par $\neg A$ dans **7**, on obtient : $(F \wedge \neg A) \Rightarrow G\ \equiv\ F \Rightarrow \big(G \vee \neg(\neg A)\big)\ \equiv\ F \Rightarrow (G \vee A)$ puisque la relation $\equiv$ est compatible avec les connecteurs.

Pour $F = \mathbf{v}$ et avec le résultat de **5**, on obtient : $\neg A \Rightarrow G\ \equiv\ (\mathbf{v} \wedge \neg A) \Rightarrow G\ \equiv\ \mathbf{v} \Rightarrow (G \vee A)$.

**9.** $\forall i \in \mathcal{V},\ I_i\Big(\big(F \wedge (A \cup B)\big) \Rightarrow G\Big) = I_i(G) + \overline{I_i(F).\big(I_i(A) + I_i(B)\big)} = I_i(G) + \overline{I_i(F \wedge A) + I_i(F \wedge B)}$

$= I_i(G) + \overline{I_i(F \wedge A)}.\overline{I_i(F \wedge B)}$.

$I_i\Big(\big(F \wedge (A \cup B)\big) \Rightarrow G\Big) = 1 \iff I_i(G) = 1$ ou $\big(\overline{I_i(F \wedge A)} = 1$ et $\overline{I_i(F \wedge B)} = 1\big)$

$\iff \big(I_i(G) = 1$ ou $\overline{I_i(F \wedge A)} = 1\big)$ et $\big(I_i(G) = 1$ ou $\overline{I_i(F \wedge B)} = 1\big)$

$\iff I_i\big((F \wedge A) \Rightarrow G\big) = 1$ et $I_i\big((F \wedge B) \Rightarrow G\big) = 1$.

Sachant qu'on peut "distribuer" $\forall$ sur un "et", on en déduit que :

$F \wedge (A \cup B)) \Rightarrow G$ est une tautologie si et seulement si $(F \wedge A) \Rightarrow G$ et $(F \wedge B) \Rightarrow G$ sont des tautologies.

En prenant $F = \mathbf{v}$ et en utilisant le résultat du **5**, on obtient immédiatement que :
$(A \cup B) \Rightarrow G$ est une tautologie si et seulement si $A \Rightarrow G$ et $B \Rightarrow G$ sont des tautologies.

**10.** $F \Rightarrow \big(G \vee (A \wedge B)\big) \;\equiv\; F \Rightarrow \big(G \vee \neg(\neg A \vee \neg B)\big) \;\equiv\; \big(F \wedge (\neg A \vee \neg B)\big) \Rightarrow G$ (d'après **7.**).

Ainsi $F \Rightarrow \big(G \vee (A \wedge B)\big)$ est une tautologie si et seulement si $\big(F \wedge (\neg A \vee \neg B)\big) \Rightarrow G$ en est une, ce qui équivaut, d'après **9**, au fait que $(F \wedge \neg A) \Rightarrow G$ et $(F \wedge \neg B) \Rightarrow G$ sont des tautologies, c'est à dire, d'après **8**, que $(F \Rightarrow (G \vee A)$ et $(F \Rightarrow (G \vee A)$ sont des tautologies.

En particulier, pour $G = \mathbf{f}$ et en utilisant **6**, on obtient immédiatement que :
$F \Rightarrow (A \wedge B)$ est une tautologie si et seulement $F \Rightarrow A$ et $F \Rightarrow G$ sont des tautologies.

**11.** $F \Rightarrow \big(G \vee (A \Rightarrow B)\big) \;\equiv\; F \Rightarrow \big(G \vee (\neg A \vee B)\big) \;\equiv\; F \Rightarrow \big((G \vee B) \vee \neg A\big) \;\equiv\; (F \wedge A) \Rightarrow (G \vee B)$ d'après **7.**

En particulier, pour $G = \mathbf{f}$ et en utilisant **6**, on obtient immédiatement que :
$F \Rightarrow (A \Rightarrow B) \;\equiv\; (F \wedge A) \Rightarrow B.$

**12.** $F \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow G \;\equiv\; \big(F \wedge (\neg A \vee B)\big) \Rightarrow G$ est une tautologie d'après **9.** si et seulement si $(F \wedge \neg A) \Rightarrow G$ et $(F \wedge B) \Rightarrow G$ sont des tautologies, c'est à dire d'après **8.** $F \Rightarrow (G \vee A)$ et $(F \wedge B) \Rightarrow G$ sont des tautologies.

En particulier, pour $F = \mathbf{v}$ et en utilisant **5**, on obtient immédiatement que :
$(A \Rightarrow B) \Rightarrow G$ est une tautologie si et seulement si $B \Rightarrow G$ et $\mathbf{v} \Rightarrow (G \vee A)$ sont des tautologies.

**13.** Récapitulons les règles obtenues dans les questions pécédentes.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $R_1$ | $(\neg A) \Rightarrow G$ | $\mathbf{v} \Rightarrow (G \vee A)$ | $R_7$ | $F \Rightarrow \neg A$ | $(F \wedge A) \Rightarrow \mathbf{f}$ |
| $R_2$ | $(F \wedge \neg A) \Rightarrow G$ | $F \Rightarrow (G \vee A)$ | $R_8$ | $F \Rightarrow (G \vee \neg A)$ | $(F \wedge A) \Rightarrow G$ |
| $R_3$ | $(A \vee B) \Rightarrow G$ | $\begin{cases} A \Rightarrow G \\ B \Rightarrow G \end{cases}$ | $R_9$ | $F \Rightarrow (A \wedge B)$ | $\begin{cases} F \Rightarrow A \\ F \Rightarrow B \end{cases}$ |
| $R_4$ | $\big(F \wedge (A \vee B)\big) \Rightarrow G$ | $\begin{cases} (F \wedge A) \Rightarrow G \\ (F \wedge B) \Rightarrow G \end{cases}$ | $R_{10}$ | $F \Rightarrow \big(G \vee (A \wedge B)\big)$ | $\begin{cases} F \Rightarrow (G \vee A) \\ F \Rightarrow (G \vee B) \end{cases}$ |
| $R_5$ | $(A \Rightarrow B) \Rightarrow G$ | $\begin{cases} B \Rightarrow G \\ \mathbf{v} \Rightarrow (G \vee A) \end{cases}$ | $R_{11}$ | $F \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ | $(F \wedge A) \Rightarrow B$ |
| $R_6$ | $\big(F \wedge (A \Rightarrow B)\big) \Rightarrow G$ | $\begin{cases} (F \wedge B) \Rightarrow G \\ F \Rightarrow (G \vee A) \end{cases}$ | $R_{12}$ | $F \Rightarrow \big(G \vee (A \Rightarrow B)\big)$ | $(F \wedge A) \Rightarrow (G \vee B)$ |

On veut déterminer si $(F \Rightarrow G)$ est une tautologie.
Pour cela on considère la liste $L_1 = (F_1, \ldots, F_m)$ des formules atomiques ou non de sorte que $F = F_1 \wedge \ldots \wedge F_m$ et la liste $L_1 = (G_1, \ldots, G_n)$ des formules atomiques ou non de sorte que $G = G_1 \vee \ldots \wedge G_n$.

- Si $L_1$ contient au moins une formule non atomique $F_i$

. si $F_i$ est de la forme $A \wedge B$, on enlève $F_i$ et on rajoute les formules $A$ et $B$ à $L_1$.
. si $F_i$ est de la forme $\neg A$, on applique la règle $R_1$ si $F_i$ est la seule formule non atomique de $L_1$ ou la règle $R_2$ sinon.
. si $F_i$ est de la forme $A \vee B$, on applique la règle $R_4$, ce qui ramène à l'étude de deux tautologies sous forme d'une implication.
. si $F_i$ est de la forme $A \Rightarrow B$, on applique la règle $R_5$ si $F_i$ est la seule formule non atomique de $L_1$ ou la règle $R_6$ sinon, ce qui ramène à l'étude de deux tautologies sous forme d'une implication.

- Si $L_2$ contient au moins une formule non atomique $G_j$

. si $G_j$ est de la forme $A \vee B$, on enlève $G_j$ et on rajoute les formules $A$ et $B$ à $L_2$.
. si $G_j$ est de la forme $\neg A$, on applique la règle $R_7$ si $G_j$ est la seule formule non atomique de $L_2$ ou la règle $R_8$ sinon.
. si $G_j$ est de la forme $A \wedge B$, on applique la règle $R_{10}$, ce qui ramène à l'étude de deux tautologies sous forme d'une implication.
. si $G_j$ est de la forme $A \Rightarrow B$, on applique la règle $R_{11}$ si $G_j$ est la seule formule non atomique de $L_2$ ou la règle $R_{12}$ sinon, ce qui ramène à l'étude de deux tautologies sous forme d'une implication.

Chaque application d'une des 12 règles supprime un des trois connecteurs "indésirables" de l'une des listes $L_1$ et $L_2$, et cela, sans en faire réapparaître dans l'autre liste
On recommence tant que l'une des deux listes $L_1$ et $L_2$ contiennent au moins une formule non atomique.
On verra plus loin que l'algorithme se termine.
On est alors ramené à une ou plusieurs implications élémentaires dont on sait vérifier si ce sont des tautologies (cf. **2.**)

**14.** Comme $F \equiv \mathbf{f} \vee F \equiv \mathbf{v} \Rightarrow F$, il suffit donc d'appliquer l'algorithme de la question **13** à $\mathbf{v} \Rightarrow F$.

**15.** Comme $\neg F \equiv \neg F \vee \mathbf{f} \equiv F \Rightarrow \mathbf{f}$, il suffit donc d'appliquer l'algorithme de la question **13** à $F \Rightarrow \mathbf{f}$.

**16.** $\mu_i(F \Rightarrow G) = \mu_g(F) + \mu_d(G)$.

**(a)** si les $y_i$ et $z_j$ sont des formules atomiques, alors :
$$\mu_i\big((y_1 \wedge \ldots \wedge y_m) \Rightarrow (z_1 \vee \ldots \vee z_m)\big) = \mu_g(y_1 \wedge \ldots \wedge y_m) + \mu_d(z_1 \vee \ldots \vee z_n) = \sum_{i=1}^{m} \mu_c(y_i) + \sum_{j=1}^{n} (z_j) = 0 + 0 = 0$$
(valable même si $m = 1$ ou $n = 1$).

**(b)** Si $F = F_1 \wedge \ldots \wedge F_m$ et $G = G_1 \wedge \ldots \wedge G_n$ avec éventuellement $m = 1$ ou $n = 1$, alors :
$$\mu_g(F \wedge G) = \sum_{i=1}^{m} \mu_c(F_i) + \sum_{j=1}^{n} \mu_c(G_j) = \mu_g(F) + \mu_g(G).$$
De plus $\mu_c(F) = (m-1) + \sum_{i=1}^{m} \mu_c(F_i) = m - 1 + \mu_g(F) \geq \mu_g(F)$.

**(c)** Si $F = F_1 \vee \ldots \vee F_m$ et $= G_1 \vee \ldots \vee G_n$ avec éventuellement $m = 1$ ou $n = 1$, alors :
$$\mu_d(F \vee G) = \sum_{i=1}^{m} \mu_c(F_i) + \sum_{j=1}^{n} \mu_c(G_j) = \mu_d(F) + \mu_d(G).$$
De plus $\mu_c(F) = (m-1) + \sum_{i=1}^{m} \mu_c(F_i) = m - 1 + \mu_d(F) \leq \mu_d(F)$.

**(d)** L'application à l'implication $F \Rightarrow G$ de chacune des 12 règles ramène à une ou deux implications dont la $i$-mesure est strictement inférieure. Vérifions-le pour quelques unes d'entre elles.
. $\mu_i\big((F \wedge \neg A) \Rightarrow G\big) = \mu_g(F) + \mu_g(\neg A) + \mu_d(G) = \mu_g(F) + \mu_d(G) + \mu_c(A) + 1$
$> \mu_g(F) + \mu_d(G) + \mu_d(A) = \mu_i\big((F \Rightarrow (G \vee A)\big)$.
. $\mu_i\Big(\big(F \wedge (A \vee B)\big) \Rightarrow G\Big) = \mu_g(F) + \mu_c(A \vee B) + \mu_d(G)$
$> \mu_g(F) + \mu_c(A) + \mu_d(G) \geq \mu_g(F) + \mu_g(A) + \mu_d(G) = \mu_i\big((F \wedge A) \Rightarrow G\big)$.
. $\mu_i\Big(F \Rightarrow \big(G \vee (A \Rightarrow B)\big)\Big) = \mu_g(F) + \mu_d(G) + \mu_c(A \Rightarrow B)$
$> \mu_g(F) + \mu_d(G) + \mu_c(A) + \mu_c(B) \geq \mu_g(F) + \mu_g(A) + \mu_d(G) + \mu_d(B) = \mu_i\big((F \wedge A) \Rightarrow (G \vee B)\big)$.
La suite des $i$-mesures étant à valeurs entières positives strictement décroissante est nécessairement finie.
Donc l'algorithme de la question **13.** s'arrête, ce qui se produit si et seulement si l'implication obtenue est atomique.

**17** $T1 = \big(x_1 \Rightarrow (x_2 \Rightarrow x_3)\big) \Rightarrow \big((x_1 \Rightarrow x_2) \Rightarrow (x_1 \Rightarrow x_3)\big)$.
L'application de la règle 5 donne $T_1 \equiv (T_2 \wedge T_3)$ avec :
$T_2 = (x_2 \Rightarrow x_3) \Rightarrow \big((x_1 \Rightarrow x_2) \Rightarrow (x_1 \Rightarrow x_3)\big)$ et $T_3 = \mathbf{v} \Rightarrow x_1 \vee \big((x_1 \Rightarrow x_2) \Rightarrow (x_1 \Rightarrow x_3)\big)$,
A son tour $T_2$ se décompose en $T_2 \equiv (T_4 \wedge T_5)$ avec :
$T_4 = x_3 \Rightarrow \big((x_1 \Rightarrow x_2) \Rightarrow (x_1 \Rightarrow x_3)\big)$ et $T_5 = \mathbf{v} \Rightarrow x_2 \vee \big((x_1 \Rightarrow x_2) \Rightarrow (x_1 \Rightarrow x_3)\big)$.
En utilisant $R_{12}$, $T_3 \equiv \big(\mathbf{v} \wedge (x_1 \Rightarrow x_2)\big) \Rightarrow \big(x_1 \vee (x_1 \Rightarrow x_3)$ qui se décompose d'après $R_6$ en $T_2 \equiv (T_6 \wedge T_7)$ avec :
$T_6 = (\mathbf{v} \wedge x_2) \Rightarrow \big(x_1 \vee (x_1 \Rightarrow x_3)\big)$ et $T_7 = \mathbf{v} \Rightarrow \big(x_1 \vee (x_1 \Rightarrow x_3)\big)$.

On a immédiatement, en utilisant $R_{12}$ : $T_6 \equiv (\mathbf{v} \wedge x_2 \wedge x_1) \Rightarrow (x_1 \vee x_3)$ qui est une implication élémentaire car la variable $x_1$ figure à la fois dans les deux membres, donc c'est une tautologie.

$T_7 \equiv (\mathbf{v} \wedge x_1) \Rightarrow (x_1 \vee x_3)$ qui est une tautologie.

D'après $R_{11}$, $T_4 \equiv \big(x_3 \wedge (x_1 \Rightarrow x_2)\big) \Rightarrow (x_1 \Rightarrow x_3)$ qui se décompose d'après $R_6$ en $T_2 \equiv (T_8 \wedge T_9)$ avec :

$T_8 = (x_3 \wedge x_2) \Rightarrow (x_1 \Rightarrow x_3)$ et $T_9 = x_3 \Rightarrow x_1 \vee (x_1 \Rightarrow x_3)$.

D'après $R_{11}$, $T_8 = (x_3 \wedge x_2 \wedge x_1) \Rightarrow x_3$ qui est est une tautologie.

D'après $R_{12}$, $T_9 = (x_3 \wedge x_1) \Rightarrow (x_1 \vee x_3)$ qui est est une tautologie.

D'après $R_{12}$, $T_5 \equiv \big(\mathbf{v} \wedge (x_1 \Rightarrow x_2)\big) \Rightarrow \big(x_2 \vee (x_1 \Rightarrow x_3)\big)$ qui se décompose d'après $R_6$ en en $T_{10} \wedge T_{11}$ avec :

$T_{10} = (\mathbf{v} \wedge x_2) \Rightarrow \big(x_2 \vee (x_1 \Rightarrow x_3)\big) \equiv (\mathbf{v} \wedge x_2 \wedge x_1) \Rightarrow (x_2 \vee x_3)$ (d'après $R_{12}$) : c'est une tautologie.

$T_{11} = \mathbf{v} \Rightarrow \big(x_1 \vee x_2 \vee (x_1 \Rightarrow x_3)\big) \equiv (\mathbf{v} \wedge x_1) \Rightarrow (x_1 \vee x_2 \vee x_3$ (d'après $R_{12}$) : c'est une tautologie.

Au total, $T_1$ est bien une tautologie.

## 3 Problème de programmation en Caml

```
type formule = | vrai
               | faux
               | variable of int
               | et       of formule * formule
               | ou       of formule * formule
               | implique of formule * formule
               | non      of formule ;;

type  liste_de_formules == formule list ;;

let liste_vide () = let l = [vrai] in tl(l) ;;

let ajoute (f:formule) l =  f::l ;;

let est_vide  l = l = tl[vrai] ;;

let un_element (l:formule list) = match l with
         | [] -> failwith "Liste vide1"
         | t::q -> t ;;

let reste  (l:formule list) = match l with
         | [] -> failwith "Liste vide2"
         | t::q -> q ;;


type ensemble_de_formules =   { V   : bool;
                                F   : bool;
                                tbl : bool vect;
                                lf  : formule  list} ;;


let ensemble_vide () = { V = false;
                         F = false;
                         tbl = make_vect VMAX false;
                         lf = [] };;

let que_des_variables e = e.lf=[] ;;

let intersection e1 e2 =
   let rec aux i =
```

```
        if i = VMAX then false
        else (e1.tbl.(i) && e2.tbl.(i)) || aux (i+1)
   in aux 0 ;;

let ajouter_formule e f = match f with
     |       vrai  -> {V = true; F = e.F;  tbl = e.tbl; lf = e.lf}
     |       faux  -> {V = e.V ; F = true; tbl = e.tbl; lf = e.lf}
     | variable(i) -> let t = e.tbl in t.(i) <- true;
                      {V = e.V; F = e.F; tbl = t; lf = e.lf}
     |   _         -> {V = e.V; F = e.F; tbl = e.tbl; lf = ajoute f e.lf}
;;

let formule_suivante e  =
   ({V = e.V; F = e.F; tbl = e.tbl; lf = reste e.lf}, un_element e.lf) ;;

let rec verifier u v =
  if que_des_variables u && que_des_variables v
  then u.F || v.V || intersection u v
  else if not (que_des_variables u)
       then let (uu,f) = formule_suivante u in match f with

  | et(a,b) -> verifier (ajouter_formule (ajouter_formule uu a) b) v

  | non a   -> let w = if que_des_variables  uu
                       then (* R1 *) ajouter_formule uu vrai
                       else (* R2 *) uu
               in verifier w (ajouter_formule v a)

  | ou(a,b) -> (* R3 et R4 *)
                   verifier (ajouter_formule uu a) v
                && verifier (ajouter_formule uu b) v

  | implique(a,b) -> let w = if que_des_variables uu
                             then (* R5 *) ajouter_formule uu vrai
                             else (* R6 *) uu
                     in    verifier (ajouter_formule uu b) v
                        && verifier w (ajouter_formule v a)
  |  _  -> failwith "Erreur 1"

        else if not (que_des_variables v)
             then let (vv,g) = formule_suivante v in match g with

  | ou(a,b) -> verifier u (ajouter_formule (ajouter_formule vv a) b)

  | non a   -> let w = if que_des_variables  vv
                       then (* R7 *) ajouter_formule vv faux
                       else (* R8 *) vv
               in verifier (ajouter_formule  u a) w

  | et(a,b) -> (* R9 et R10 *)
                   verifier u (ajouter_formule vv a)
                && verifier u (ajouter_formule vv a)

  | implique(a,b) -> (* R11 et R12 *)
                     verifier(ajouter_formule u a)(ajouter_formule vv b)

 |  _  -> failwith "Erreur 2"
```

```
        else failwith "Erreur 3" ;;

let tautologie f =
    verifier (ajouter_formule (ensemble_vide()) vrai)
             (ajouter_formule (ensemble_vide()) f) ;;
```

**Fin du corrigé**