Partie I

Remarque : mauvais parenthésage pour A_2 (sortir le $\forall j$).

D1) On a $M_1 \wedge M_2 \wedge M_3 \equiv (\overline{M_1} \Longrightarrow M_2 \wedge M_3)$, c'est-à dire : « si le candidat C_i n'est pas affecté à l'école E_j alors il est affecté à une école qu'il préfère à E_j ou E_j a fait le plein avec N_j candidats qu'elle préfère à C_i ».

D2) Non. Contre-exemple : il y a deux écoles E_1 et E_2 offrant chacune une place et deux candidats, C_1 candidat à E_1 et E_2 dans cet ordre, C_2 candidat seulement à E_1. Si E_1 préfère C_1 à C_2 alors l'unique affectation méritoire consiste à placer C_1 dans E_1 et C_2 n'est pas affecté, E_2 n'est pas remplie.

Par contre si l'on ajoute l'hypothèse que tout candidat est candidat à toutes les écoles alors toute affectation méritoire est totale car si $\mathcal{A}$ est une affectation méritoire qui ne place pas un candidat C_i alors toutes les écoles E_j sont remplies (de candidats préférés à C_i).

E1) (C_i, E_j) est inutile s'il y a au moins N_j autres candidats plaçant E_j en tête de leurs préférences et qui sont préférés à C_i par E_j. Soit $\mathcal{G}$ un graphe comportant un nœud inutile (C_k, E_ℓ), $\mathcal{G}'$ le graphe obtenu en supprimant ce nœud et en reconstituant les ordres de préférence entre les nœuds restants par transitivité. Soit $\mathcal{A}$ une affectation de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{A}'$ une affectation de $\mathcal{G}'$, méritoires. Il s'agit de montrer que $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}'$, que $\mathcal{A}$ est méritoire pour $\mathcal{G}'$, et que $\mathcal{A}'$ est méritoire pour $\mathcal{G}$. La propriété de conservation des affectations méritoires après suppression des nœuds inutiles dans un graphe s'ensuivra par récurrence sur le nombre de nœuds inutiles, car il est clair que tout nœud autre que (C_k, E_ℓ) qui est inutile dans $\mathcal{G}$ est aussi inutile dans $\mathcal{G}'$.

– $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}'$: sinon $(C_k, E_\ell) \in \mathcal{A}$. Il y a au moins N_ℓ candidats ayant placé E_ℓ en tête de leurs préférences et préférés à C_k par E_ℓ, donc l'un d'entre eux au moins n'est pas affecté à E_ℓ. Si C_i est un tel candidat alors le nœud (C_i, E_ℓ) ne vérifie ni M_1, ni M_2, ni M_3, ce qui contredit le caractère méritoire de $\mathcal{A}$ vis-à vis de $\mathcal{G}$.

– $\mathcal{A}$ est méritoire pour $\mathcal{G}'$: car les propriétés M_1, M_2 et M_3 ne font intervenir, outre le nœud (C_i, E_j) considéré, que des nœuds appartenant à $\mathcal{A}$ et l'on a $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}'$.

– $\mathcal{A}'$ est méritoire pour $\mathcal{G}$: il faut juste vérifier que le nœud (C_k, E_ℓ) supprimé vérifie l'une des propriétés M_1, M_2 ou M_3 vis à vis de $\mathcal{A}'$. Soient $C_{i_1}, \ldots, C_{i_n}$ les candidats autres que C_k ayant placé E_ℓ en tête de leurs préférences et préférés à C_k par E_ℓ. Si $\mathcal{A}'$ affecte tous ces candidats à E_ℓ alors $n = N_\ell$ et E_ℓ est complète avec des candidats qu'elle préfère à C_k, donc M_3 est vérifié. Sinon l'un d'entre eux, C_{i_p}, n'est pas affecté à E_ℓ qui est son école préférée, donc E_ℓ est complète avec des candidats qu'elle préfère à C_{i_p} et à fortiori à C_k ; M_3 est encore vérifiée dans ce cas.

E2) *Tant qu'il reste des nœuds inutiles :*
en choisir un (C_i, E_j) et le supprimer ;
s'il ne reste plus de nœud (C_i, E_k), supprimer la colonne C_i.
Fin tant que.
Affecter chaque candidat restant à l'école qu'il préfère.

Validité : il faut juste prouver que si un graphe ne comporte pas de nœud inutile, alors l'affectation $\mathcal{A}$ de chaque candidat à l'école qu'il préfère respecte les capacités des écoles et est méritoire. Le respect des capacités des écoles résulte directement du fait qu'il n'y a pas de nœud inutile. L'affectation est méritoire car tout nœud vérifie l'une des propriétés M_1 ou M_2.

E3) En supprimant les nœuds inutiles (C_2, E_3), (C_3, E_3) on obtient l'affectation $\{(C_1, E_3), (C_2, E_2), (C_3, E_2), (C_4, E_1)\}$.

F1) On convient qu'un nœud (C_i, E_j) est inutile pour le candidat C_i s'il est sûr de pouvoir intégrer une école qu'il préfère à E_j, c'est-à dire s'il existe E_k, $k \neq j$ telle que (C_i, E_k) appartient au graphe et C_i est classé au plus N_k-ème dans la liste de préférence de E_k.

F2) Même principe de démonstration que pour la question **E1**. Soit $\mathcal{G}$ un graphe comportant un nœud (C_k, E_ℓ) inutile pour les candidats, $\mathcal{G}'$ le graphe obtenu en supprimant ce nœud et en reconstituant les ordres de préférence entre les nœuds restants par transitivité. Soit $\mathcal{A}$ une affectation de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{A}'$ une affectation de $\mathcal{G}'$, méritoires. La suppression de (C_k, E_ℓ) améliore les classements des autres candidats pour l'école E_ℓ donc tout nœud autre que (C_k, E_ℓ) qui est inutile pour les candidats dans $\mathcal{G}$ est aussi inutile pour les candidats dans $\mathcal{G}'$.

– $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}'$: sinon $(C_k, E_\ell) \in \mathcal{A}$ ce qui implique d'après la propriété M_3 que toutes les écoles que C_k préférait à E_ℓ ont fait le plein avec des candidats mieux classés que C_k, en contradiction avec le caractère inutile du nœud (C_k, E_ℓ).

– $\mathcal{A}$ est méritoire pour $\mathcal{G}'$: même raison qu'en **E1**.

– $\mathcal{A}'$ est méritoire pour $\mathcal{G}$: car C_k est nécessairement affecté par $\mathcal{A}'$ à une école qu'il préfère à E_ℓ.

F3) *Tant qu'il reste des nœuds inutiles pour les candidats :*
en choisir un (C_i, E_j) et le supprimer ;
s'il ne reste plus de nœud (C_k, E_j), supprimer la ligne E_j.
Fin tant que.
Affecter à chaque école E_j les N_j premiers candidats restant pour l'ordre de préférence de E_j ou tous les candidats à cette école s'il en reste moins de N_j.

Validité : il faut juste prouver que si un graphe ne comporte pas de nœud inutile pour les candidats, alors l'affectation $\mathcal{A}$ obtenue ne conduit pas à affecter un candidat à plusieurs écoles et est méritoire. L'affectation d'un candidat à au plus une école résulte directement du fait qu'il n'y a pas de nœud inutile pour les candidats. L'affectation est méritoire car tout nœud vérifie l'une des propriétés M_1 ou M_3.

F4) En supprimant les nœuds inutiles (C_1, E_2), (C_3, E_3) on obtient l'affectation $\{(C_1, E_3), (C_2, E_1), (C_3, E_2), (C_4, E_2)\}$.

G1) Si $\mathcal{G}$ est un graphe sans nœud inutile pour une école et $\mathcal{G}'$ est déduit de $\mathcal{G}$ par suppression d'un nœud inutile pour un candidat, alors $\mathcal{G}'$ ne contient pas non plus de nœud inutile pour une école car aucun candidat n'a reculé dans un classement à la suite de cette suppression. De même, si $\mathcal{G}$ ne contient pas de nœud inutile pour un candidat et $\mathcal{G}'$ est déduit de $\mathcal{G}$ par suppression d'un nœud inutile pour une école alors $\mathcal{G}'$ ne contient pas de nœud inutile pour un candidat. On obtient donc un graphe sans nœud inutile associé à un graphe par l'un des trois algorithmes suivants :

– Supprimer tous les nœuds inutiles pour les écoles, puis tous les nœuds inutiles pour les candidats.
– Supprimer tous les nœuds inutiles pour les candidats, puis tous les nœuds inutiles pour les écoles.
– Supprimer un à un tous les nœuds inutiles.

G2) On obtient le graphe réduit $\{(C_1, E_3), (C_2, E_1), (C_2, E_2), (C_3, E_2), (C_4, E_1), (C_4, E_2)\}$ qui a comme affectations méritoires celles trouvées en **E3** et en **F4**.

Partie II

A1-A2) On a les tables de vérités ci-contre pour s_0, s_1 qui donnent immédiatement :

$s_0 \equiv (x_0$ `OR` x_1 `OR` $x_2)$ `AND` $(x_3$ `OR` `NOT`$(x_2))$

$s_1 \equiv x_2$ `OR` x_3.

$x_3x_2x_1x_0$	X	$\lfloor\sqrt{X}\rfloor$	s_1s_0
0 0 0 0	0	0	0 0
0 0 0 1	1	1	0 1
0 0 1 0	2	1	0 1
0 0 1 1	3	1	0 1
0 1 0 0	4	2	1 0
0 1 0 1	5	2	1 0
0 1 1 0	6	2	1 0
0 1 1 1	7	2	1 0

$x_3x_2x_1x_0$	X	$\lfloor\sqrt{X}\rfloor$	s_1s_0
1 0 0 0	8	2	1 0
1 0 0 1	9	3	1 1
1 0 1 0	10	3	1 1
1 0 1 1	11	3	1 1
1 1 0 0	12	3	1 1
1 1 0 1	13	3	1 1
1 1 1 0	14	3	1 1
1 1 1 1	15	3	1 1

B1-B2) Immédiat.

B3) f est indépendante de x_i si et seulement si $f_{x_i} = f_{\bar{x}_i}$, soit si et seulement si $f_{x_i} \oplus f_{\bar{x}_i} = 0$. Par contraposée, si $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = 1$ alors f dépend de x_i (condition seulement suffisante).

B4) $\dfrac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} = \bar{f}_{x_i} \oplus \bar{f}_{\bar{x}_i} = \overline{f_{x_i}} \oplus \overline{f_{\bar{x}_i}} = f_{x_i} \oplus f_{\bar{x}_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

B5) Notons $A = \dfrac{\partial\,(f \wedge g)}{\partial x_i}$ et $B = (f \wedge \dfrac{\partial g}{\partial x_i}) \oplus (g \wedge \dfrac{\partial f}{\partial x_i}) \oplus (\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \wedge \dfrac{\partial g}{\partial x_i})$. Pour $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ donnés on a les tables de vérités suivantes qui prouvent l'égalité demandée :

f_{x_i}	$f_{\bar{x}_i}$	g_{x_i}	$g_{\bar{x}_i}$	f	g	$(f \wedge g)_{x_i}$	$(f \wedge g)_{\bar{x}_i}$	A	B
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	$\bar{x}_i$	0	0	0	0
0	0	1	0	0	x_i	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	$\bar{x}_i$	0	0	0	0	0
0	1	0	1	$\bar{x}_i$	$\bar{x}_i$	0	1	1	1
0	1	1	0	$\bar{x}_i$	x_i	0	0	0	0
0	1	1	1	$\bar{x}_i$	1	0	1	1	1

f_{x_i}	$f_{\bar{x}_i}$	g_{x_i}	$g_{\bar{x}_i}$	f	g	$(f \wedge g)_{x_i}$	$(f \wedge g)_{\bar{x}_i}$	A	B
1	0	0	0	x_i	0	0	0	0	0
1	0	0	1	x_i	$\bar{x}_i$	0	0	0	0
1	0	1	0	x_i	x_i	1	0	1	1
1	0	1	1	x_i	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	$\bar{x}_i$	0	1	1	1
1	1	1	0	1	x_i	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0

B6) Remplacer f et g par $\bar{f}$ et $\bar{g}$ dans la formule précédente et appliquer l'égalité vue en **B4**.