CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE D'INFORMATIQUE DES ENSI - 2001

Partie I - Logique et calcul des propositions

La notation $\overline{p}$ signifie $\neg p$.

Question I.1 $\underline{E = (I_1 \wedge I_2 \wedge I_3) \vee (\overline{I_1} \wedge \overline{I_2} \wedge \overline{I_3})}$.

Question I.2 $\underline{I_1 = (C_1 \wedge C_3)}$, $\quad \underline{I_2 = (C_2 \Longrightarrow \overline{C_3}) \equiv (\overline{C_2} \vee \overline{C_3})}$, $\quad \underline{I_3 = (C_1 \wedge \overline{C_2})}$.

Question I.3

C_1	C_2	C_3	I_1	I_2	I_3	$I_1 \wedge I_2 \wedge I_3$	$\overline{I_1} \wedge \overline{I_2} \wedge \overline{I_3}$	E
0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0

$E \equiv (\overline{C_1} \wedge C_2 \wedge C_3) \vee (C_1 \wedge \overline{C_2} \wedge C_3) \equiv (C_1 \oplus C_2) \wedge C_3$.

Ainsi $(E \Longrightarrow C_3)$: <u>Socrate doit donc prendre le troisième couloir</u>.

Question I.4 Si Cerbère a menti, c'est que $\overline{I_1} \wedge \overline{I_2} \wedge \overline{I_3}$ est vrai, ce qui a lieu si $\overline{C_1} \wedge C_2 \wedge C_3 = 1$, donc $C_2 = 1$ et $C_3 = 1$. Socrate a donc le choix entre le second et le troisième couloir.

Partie II - Algorithmique et programmation en CaML

L'énoncé définit l'enveloppe convexe $\mathcal{E}_C(\mathcal{P})$ de $\mathcal{P}$ comme étant un polygone "plein" alors que dans la suite du problème, $\mathcal{E}_C(\mathcal{P})$ désigne plutôt son contour.

Question II.1

Posons $a = \|\overrightarrow{qp}\|$ et $b = \|\overrightarrow{qr}\|$. a et b sont non nuls car $p,\ q,\ r$ sont distincts.

Posons $\overrightarrow{u} = \dfrac{1}{a}.\overrightarrow{qp}$. Ainsi $\overrightarrow{u}$ est normé et $\overrightarrow{qp} = a.\overrightarrow{u}$. Notons $\overrightarrow{v}$ le vecteur normé directement orthogonal à $\overrightarrow{u}$.

Alors $\overrightarrow{qr}$ se décompose en : $\overrightarrow{qr} = b.(\cos\theta.\overrightarrow{u} + \sin\theta.\overrightarrow{v})$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$.

Le calcul du produit mixte $[p,q,r]$ ne dépend pas de la base orthonormée directe dans laquelle on se place,

donc $[p,q,r] = \begin{vmatrix} a & b\cos\theta \\ 0 & b\sin\theta \end{vmatrix} = ab\sin\theta$, d'où la conclusion :

- . $[p,q,r] > 0 \iff \sin\theta > 0 \iff \theta \in]0,\pi[$.
- . $[p,q,r] < 0 \iff \sin\theta < 0 \iff \theta \in]\pi, 2\pi[$.
- . $[p,q,r] = 0 \iff \sin\theta = 0 \iff \theta = 0 \text{ ou } \pi \iff p,\ q,\ r$ alignés.

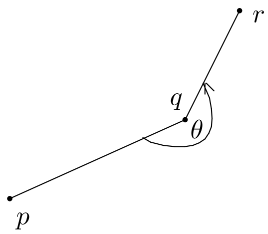
Question II.2

```
let croise (p:point) (q:point) (r:point) =
     let (p1,p2) = p and (q1,q2) = q and (r1,r2) = r
     in (p1 - q1) * (r2 -  q2) - (p2 - q2) * (r1 - q1) ;;
```

Question II.3

```
let a_gauche (p:point) (q:point) (e:suite) =
     let rec aux liste (accu:suite) =
         match liste with
              |     []  -> accu
              |r::queue -> if (croise p q r) < 0 then aux queue (r::accu)
                                                  else aux queue accu
     in aux e [] ;;
```

Question II.4



Les points situés à gauche de la droite (p, q) orientée de p vers q sont tels que l'angle $\theta = \widehat{pqr} \in]\pi, 2\pi[$.
On parcours la liste `e` (grâce à l'instruction `match` et à la récursivité) en ajoutant dans la variable `accu` (initialisée avec la liste vide) tous les points r rencontrés qui sont situés à gauche de la droite (p, q). Les appels récursifs s'arrêtent lorsqu'on arrive à une liste vide.
La fonction auxiliaire `aux` *est à récursivité terminale.*

Question II.5 La complexité est évidemment proportionnelle à la taille de la liste `e`.

Question II.6

```
let separation (p:point) (q:point) (e:suite) =
   let rec aux liste (g:suite) (d:suite) (a:suite) =
       match liste with
            |     [] -> (g,d,a)
            |r::queue -> let s = croise p q r in
                  if s < 0
                          then aux queue (r::g) d a
                          else if s > 0
                               then aux queue g (r::d) a
                               else if (r=p) || (r=q)
                                    then aux queue g d a
                                    else aux queue g d (r::a)
   in aux e [] [] [] ;;
```

Question II.7

```
let ordre_polaire (o:point) (p:point) (q:point) =
     let s = croise p o q in
         if s = 0
         then let (o1,o2) = o  and  (p1,p2) = p and (q1,q2) = q in
              let a1 = p1-o1 and a2 = p2-o2 and b1 = q1-o1 and b2 = q2-o2
              in b1 * b1 + b2 * b2 <= a1 * a1 + a2 * a2
         else (s > 0) ;;
```

Question II.8

```
let extreme (p1:point) (p2:point) =
    let (x1,y1) = p1 and (x2,y2) = p2 in
        if y1 < y2 then (p1,p2)
                   else if y2 < y1 then (p2,p1)
                                   else if x1 < x2 then (p1,p2)
                                                   else (p2,p1) ;;
```

Question II.9

```
let extremes (e:suite) =
    let rec aux liste b h =
        match liste with
        |       []  -> (b,h)
        | p::queue -> aux queue (fst (extreme b p)) (snd (extreme h p))
    in aux (tl e) (hd e) (hd e) ;;
```

Question II.10 On suppose la liste `e` non vide et on choisit pour initialiser les variables b et h de la fonction auxiliaire `aux` le couple (t,t) où t désigne l'élément de tête de la liste `e`.
Après chaque appel récursif, les variables b et h contiennent les deux points extrêmes de la sous-liste déjà traitée.
Chaque fois qu'on examine un point p de la liste `e`, on met à jour b et h en utilisant la formule d'associativité :

$$extremes\big(\{p\}\cup L\big) = extreme\big(p, extremes(L)\big).$$

Question II.11 Raisonnons par l'absurde. Supposons que B par exemple ne soit pas sur $\mathcal{E}_C(\mathcal{P})$ (considéré comme étant le polygone frontière). B se trouve donc soit à "l'intérieur" du polygone, soit éventuellement sur un des cotés $[p,q]$ (comme le point $(5,3)$ de l'exemple **II.1**).
. S'il est à l'intérieur, c'est qu'il existe un point de $\mathcal{P}$ plus bas que B, ce qui contredit que $y_B = \min\{y_M,\ M\in\mathcal{P}\}$.
. S'il est sur un des cotés $[p,q]$, alors une des extrémités p ou q est située plus bas à gauche que B, ce qui contredit que $y_B = \min\{y_M,\ M\in\mathcal{P}\}$.
Ainsi B et H sont des sommets de $\mathcal{E}_C(\mathcal{P})$.

Question II.12 On suppose bien sûr que $\text{Card}(\mathcal{P})\geq 2$.

- Montrons que $\leq_B$ est une relation d'ordre sur $E = \mathcal{P}_D \cup \mathcal{P}_{BH} \cup \{H\}$.
  - ⋆ Elle est <u>réflexive</u> car $\forall M\in E,\ \widehat{MBM}=0$ et $\|\overrightarrow{BM}\| \geq \|\overrightarrow{BM}\|$, donc $M \leq_B M$.
  - ⋆ Si $M\leq_B N$ et $N \leq_B M$, alors $B,\ M,\ N$ sont alignés car on ne peut pas avoir à la fois $\widehat{MBN}\in]0,\pi[$ et $\widehat{NBM}\in]0,\pi[$.
  Mais alors $\|\overrightarrow{BM}\|\geq\|\overrightarrow{BN}\|$ et $\|\overrightarrow{BN}\|\geq\|\overrightarrow{BM}\|$, donc $\|\overrightarrow{BM}\|=\|\overrightarrow{BN}\|$.
  $M,\ B,\ N$ étant alignés, il reste deux possibilités. Mais on ne peut pas avoir M et N symétriques par rapport à B car B est le point le plus bas à gauche de $\mathcal{P}$. Donc nécessairement $M=N$, ce qui prouve que la relation $\leq_B$ est <u>antisymétrique</u>.
  - ⋆ Si $M\leq_B N$ et $N\leq_B P$, alors $\widehat{MBP}=\widehat{MBN}+\widehat{NBP}$ est ≥ 0 (comme somme de deux mesures d'angles ≥ 0) et est $\leq \pi$ du fait que les points M et P sont dans E.
  Le cas où $\widehat{MBP}=\pi$ est impossible car B serait entre M et P, donc B ne serait pas le point le plus bas de $\mathcal{P}$.
  Le cas particulier où $\widehat{MBP}=0$ ne pose pas de problème car alors les points sont alignés dans l'ordre $B,\ P,\ N,\ M$.
  On a donc $M\leq_B P$ dans tous les cas de figures, ce qui prouve que la relation $\leq_B$ est <u>transitive</u>.
- Montrons maintenant que $\leq_B$ est une <u>relation d'ordre total</u> sur E.
  Considérons deux points distincts M et N de E.
  . S'ils sont alignés avec B, alors ils sont du même coté de B et alors $M\leq_B N$ ou $N\leq_B M$ selon que $\|\overrightarrow{BM}\|>\|\overrightarrow{BN}\|$ ou $\|\overrightarrow{BN}\|>\|\overrightarrow{BM}\|$.
  . S'ils ne sont pas alignés, alors $M\leq_B N$ si $\widehat{MBN}\in]0,\pi[$, ou $N\leq_B M$ si $\widehat{MBN}\in]\pi,2\pi[$ car alors $\widehat{NBM}\in]0,\pi[$.
  En résumé M et N sont <u>comparables</u> pour la relation d'ordre $\leq_B$.
  <u>Conséquence</u> : toute partie de E admet un minimum (car E est fini).

Question II.13
Notons $(s_1,\dots,s_n)$ les sommets consécutifs du contour positif de $\mathcal{E}_C\big(\{B,H\}\cup\mathcal{P}_D\big)$ avec $s_1=B$ et $s_n=H$.
Soit p le minimum de $\mathcal{P}_D\cup\{H\}$ selon $\le_B$.
Montrons par l'absurde que $\underline{p=s_2}$.
Sinon, d'après le théorème $\overline{\text{II.2,}}$ p serait situé à gauche de l'arête $[s_1,s_2]$: on aurait donc $\widehat{s_1s_2p}\in\,]\pi,2\pi[$, d'où $\det\big(\overrightarrow{s_2s_1},\overrightarrow{s_2p}\big)<0$.
Alors $\det\big(\overrightarrow{s_1s_2},\overrightarrow{s_1p}\big)=-\det\big(\overrightarrow{s_2s_1},\overrightarrow{s_1s_2}+\overrightarrow{s_2p}\big)=-\det\big(\overrightarrow{s_2s_1},\overrightarrow{s_2p}\big)>0$, donc $\widehat{s_2s_1p}\in\,]0,\pi[$, d'où $s_2\le_B p$ et $s_2\ne p$, ce qui contredit que p est le minimum de $\mathcal{P}_D\cup\{H\}$ selon $\le_B$.

Question II.14
En raisonnant de même, on montrerait que s_{i+1} est égal au minimum de $\mathcal{P}_D\cup\{H\}\setminus\{s_1,\dots,s_i\}$ selon $\le_{s_i}$.

Question II.15 Évident. On s'arrête lorsque $s_i=H$.

Question II.16

```
let min_polaire (o:point) (e:suite) =
    let rec aux liste m (accu:suite) =
        match liste with
           |       [] -> (m,accu)
           | p::queue -> if ordre_polaire o p m
                         then aux queue p (m::accu)
                         else aux queue m (p::accu)
    in aux (tl e) (hd e) [] ;;
```

Question II.17 Les variables `m, liste, accu` sont initialisées respectivement avec le premier élément de la liste `e`, la liste `e` amputée de son premier élément et la liste vide.
Après chaque appel récursif, la variable `m` contient le minimum selon $\le_o$ de la sous-liste déjà traitée et la variable `accu` tous les éléments de cette sous-liste sauf `m`.
Lors de chaque appel récursif, on compare p avec m :
- si $p\le_o m$, alors la valeur de m est rajoutée dans `accu` et p remplace m.
- sinon on conserve m et on rajoute p à `accu`.

Question II.18 Le nombre d'appels récursifs est égal à $\underline{|e|-1}$.

Question II.19

```
let demi_jarvis b h (e:suite) =
    let rec aux liste (accu:suite) si =
                if si = h then accu
                else let (suivant,sousliste) = min_polaire si liste
                     in aux sousliste (suivant::accu) suivant
    in let (s:suite) = b::(rev (aux (h::e) [] b)) in s;;
```

Question II.20 On applique l'algorithme mis en évidence à la question **II.14** selon lequel s_{i+1} est égal au minimum de $\mathcal{P}_D\cup\{H\}\setminus\{s_1,\dots,s_i\}$ selon $\le_{s_i}$.
On s'arrête lorsque $s_i=h$. La variable `accu` contient alors la suite inversée $(s_n,\dots,s_2)$. On la retourne et on ajoute b en tête pour obtenir la liste voulue $(s_1,s_2,\dots,s_n)$.
Remarquons que cette fonction est encore correcte dans le cas où e est vide car elle renvoie alors (b,h).

Question II.21 Notons $N=|e|$.
Il y a $n-1$ appels de la fonction récursive `aux`, chacun appelant la fonction `min_polaire`.
. le premier appel de `min_polaire` porte sur une liste de $N+1$ éléments a pour complexité N.
. le deuxième appel de `min_polaire` porte sur une liste de N éléments a pour complexité $N-1$.
. le dernier appel de `min_polaire` porte sur une liste de $N-n+3$ éléments a pour complexité $N-n+2$.
La complexité totale est donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(N+1-k)=(n-1)(N+1)-\frac{n\,(n-1)}{2}\le n\,N$.

Question II.22

```
let jarvis (e:suite) =
   let (b,h) = extremes e
   in let (g,d,a) = separation b h e
   in let s1 = demi_jarvis b h d and s2 = demi_jarvis h b g
   in  let (s:suite) = (tl s1)@(tl s2) in s ;;
```

Question II.23 On commence par déterminer les deux points extrêmes b et h de e, puis on sépare e avec la droite (b, h) pour obtenir la partition (g, d, a). Les points de a autres que b et h n'interviennent pas dans la détermination de l'enveloppe convexe de e.
On calcule la suite S_1 donnant l'enveloppe convexe de $g \cup \{b, h\}$ en partant de b et la suite S_2 donnant l'enveloppe convexe de $d \cup \{h, b\}$ en partant de h conformément à une remarque de l'énoncé.
Enfin, on réunit ces deux listes en tenant compte du fait que S_1 se termine par h et que S_2 commence aussi avec h qu'on supprime donc de S_2 (et S_2 se termine par b et que S_1 commence aussi avec b qu'on supprime donc de S_1).
La liste finale donne le contour positif de $\mathcal{E}_C(\mathcal{P})$ se terminant par b.

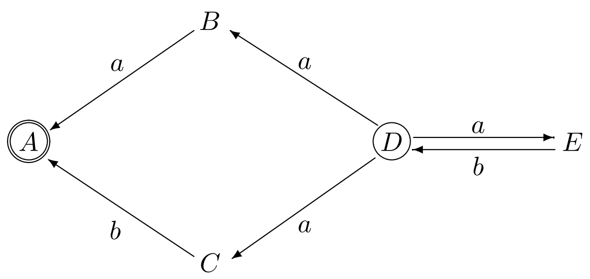
Question II.24 Notons $N = |\mathcal{P}|$ et $n = \left| \ \mathcal{E}_C(\mathcal{P}) \ \right|$.
Le calcul des points extrêmes et la séparation ont une complexité en $O(N)$.
Dans le pire des cas où tous les points de $\mathcal{P}$ sont sur $\mathcal{E}_C(\mathcal{P})$, alors $N = n$.
La complexité de la fonction `jarvis` est donc en $O(N^2)$.

Partie III - Automates et langages

Question III.1 $\boxed{E_1 = (a + b)a(ba)^* \equiv (a + b)(ab)^*a \equiv a(ab)^*a + b(ab)^*a.}$

Question III.2

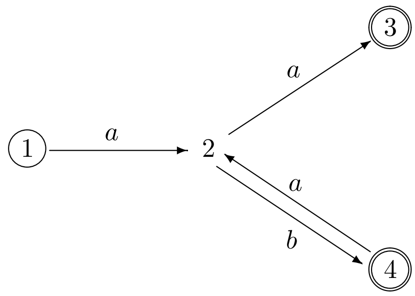
$\mathcal{E}^{-1}$:



Question III.3 L'automate $\mathcal{E}^{-1}$ est non déterministe car de D partent plusieurs transitions étiquetées par a.
Construisons la table de transition de l'automate déterminisé et émondé $\widehat{\mathcal{E}^{-1}}$ équivalent à $\mathcal{E}^{-1}$.

	a	b
$1 = \{D\}$	$\{B, C, E\}$	
$2 = \{B, C, E\}$	$\{A\}$	$\{A, D\}$
$3 = \{A\}$		
$4 = \{A, D\}$	$\{B, C, E\}$	

$\widehat{\mathcal{E}^{-1}}$:



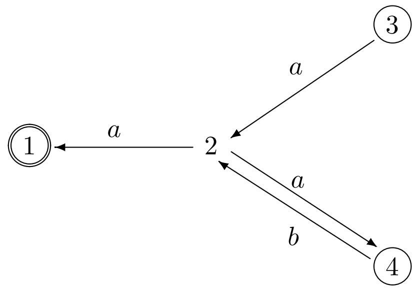
Question III.4 Le langage reconnu est la réunion de deux langages :
- celui formé des mots qui conduisent à l'état final 3 décrit par l'expression rationnelle $a(ba)^*a$.
- celui formé des mots qui conduisent à l'état final 4 décrit par l'expression rationnelle $a(ba)^*b$.

Donc $\boxed{E_2 = a(ba)^*a + a(ba)^*b \equiv a(ba)^*(a+b).}$

On constate qu'il s'agit du langage miroir : $\boxed{a_1 \dots a_n \in L(\mathcal{E}) \Longleftrightarrow a_n \dots a_1 \in L\big(\widehat{\mathcal{E}^{-1}}\big).}$

Question III.5

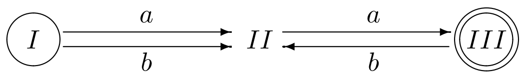
$\big(\widehat{\mathcal{E}^{-1}}\big)^{-1}$:



Question III.6 L'automate $\big(\widehat{\mathcal{E}^{-1}}\big)^{-1}$ n'est pas déterministe car il a deux états initiaux 3 et 4. De plus, de l'état 2 partent deux transitions étiquetées par a.

	a	b
$I = \{3,4\}$	$\{2\}$	$\{2\}$
$II = \{2\}$	$\{1,4\}$	
$III = \{1,4\}$		$\{2\}$

$\big(\widehat{\mathcal{E}^{-1}}\big)^{-1}$:



Question III.7

Une expression rationnelle du langage reconnu par ce dernier automate est : $E_3 = (a+b)a(ba)^* = E_1$.
C'est normal, car le langage miroir de $L(E_2)$ est E_1.

On a donc obtenu ainsi un automate "minimal" équivalent à $\mathcal{E}$.

Question III.8 Montrons la propriété par récurrence sur $k = |m|$.

. Si $m = 0$, alors $m = \Lambda$ et l'équivalence est vérifiée pour $q'' = q$.
. Supposons la propriété vraie pour tout mot u de longueur k.
Soit m un mot de longueur $k+1$: il s'écrit $m = y.u$ avec $|u| = k$ et $y \in X$.

C.N. : supposons que $(m.x, q, q') \in \gamma^*$, c'est à dire $(y.u.x, q, q') \in \gamma^*$.
Par définition, $\exists\, p \in Q \ / \ (y, q, p) \in \gamma \ \wedge \ (u.x, p, q') \in \gamma^*$.
D'après l'hypothèse de récurrence, $\exists\, q'' \in Q \ / \ (u, p, q'') \in \gamma^* \ \wedge \ (x, q'', q') \in \gamma$.
Or par définition, comme $(y, q, p) \in \gamma \ \wedge \ (u, p, q'') \in \gamma^*$, on a $(y.u, q, q'') \in \gamma^*$. Ainsi $(m, q, q'') \in \gamma^* \ \wedge \ (x, q'', q') \in \gamma$.

C.S. : supposons que $\exists\, q'' \in Q \ / \ (m, q, q'') \in \gamma^* \ \wedge \ (x, q'', q') \in \gamma$. Alors, par définition de γ^* appliquée à m, on a : $\exists\, p \in Q \ / \ (y, q, p) \in \gamma \ \wedge \ (u, p, q'') \in \gamma^*$, donc, d'après l'hypothèse de récurrence, $(u.x, p, q') \in \gamma^*$ et enfin, par définition, $(y.u.x, q, q') \in \gamma^*$, c'est à dire $(m.x, q, q') \in \gamma^*$.

Question III.9 Montrons de même la propriété par récurrence sur $k = |m|$.

. Si $m = 0$, alors $m = \Lambda$ et on a : $\Lambda^{-1} = \Lambda$, $(\Lambda, q, q) \in \gamma^*$ et $(\Lambda^{-1}, q, q) \in (\gamma^{-1})^*$.
. Supposons la propriété vraie pour tout mot u de longueur k.
Soit m un mot de longueur $k+1$: il s'écrit $m = y.u$ avec $|u| = k$ et $y \in X$.

C.N. : supposons que $(m, q, q') \in \gamma^*$. Par définition, $\exists\, q'' \in Q \ / \ (y, q, q'') \in \gamma \ \wedge \ (u, q'', q') \in \gamma^*$.
D'après l'hypothèse de récurrence, $(u^{-1}, q', q'') \in (\gamma^{-1})^*$. De plus, par définition, $(y, q'', q) \in \gamma^{-1}$.
Or $m^{-1} = u^{-1}.y$: il résulte de **III.8** que $(m{-}1, q', q) \in (\gamma^{-1})^*$.

C.S. : supposons que $(m{-}1, q', q) \in (\gamma^{-1})^*$ avec $m^{-1} = u^{-1}.y$. D'après **III.8**, $\exists\, q'' \in Q \ / \ (u^{-1}, q', q'') \in (\gamma^{-1})^*$ et $(y, q'', q) \in \gamma^{-1}$, donc, par définition, $(u, q'', q') \in \gamma^*$ et $(y, q, q'') \in \gamma$.
Finalement, $(y.u, q, q') \in \gamma^*$, c'est à dire $(m, q, q') \in \gamma^*$.

Question III.10 Montrons que $L(\mathcal{A}^{-1}$ est le langage "miroir" de $L(A)$.

$\underline{m \in L(\mathcal{A})} \iff \exists\, q_I \in I,\ \exists\, q_T \in T \ / \ (m, q_I, q_T) \in \gamma^* \iff (m^{-1}, q_T, q_I) \in (\gamma^{-1})^* \iff \underline{m^{-1} \in L(\mathcal{A}^{-1})}.$

Fin du corrigé