

Banque filière PT

Epreuve de Sciences Industrielles I

Durée 5 h

Document Réponse IV.A à rendre non plié avec les copies.

Le sujet comprend quatre parties indépendantes.

Les parties I, II et III sont des études mécaniques qui portent de façon générale sur des phénomènes relatifs au processus de coupe sur tour à commande numérique à 3 axes. Il convient donc de présenter un certain nombre de définitions qui seront largement utilisées dans la suite. Notons que les études proposées ne font pas appel à des connaissances particulières sur la modélisation du processus de coupe.

La partie IV concerne l'étude des asservissements de vitesse et de position de la broche.

La durée conseillée pour les différentes parties est de 1h30 pour les parties I et II, 1h30 pour la partie III et 2h pour la partie IV.

Vous trouverez dans le dossier, outre les pages du texte de l'énoncé :

- 5 pages de figures,
- 1 document réponse **à rendre avec la copie.**

Convention de notations

Par souci de précision, on note, en l'absence d'indication complémentaire :

- (P, \vec{u}) l'axe passant par le point P, et de direction \vec{u} (vecteur unitaire), ce qui permet de noter (Q, \vec{u}) l'axe de même direction qui passe par un point différent Q,
- (P, \vec{u}, \vec{v}) le plan passant par P et contenant les vecteurs \vec{u} et \vec{v} ,
- $(P, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ le trièdre d'origine P,
- \mathcal{F}_{S_i/S_j} le torseur des actions mécaniques du solide S_i sur le solide S_j , ayant pour composantes :

$$\mathcal{F}_{S_i/S_j} : \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(S_i/S_j) \\ \vec{M}(D, S_i/S_j) \end{array} \right\}_D$$

où $\vec{R}(S_i/S_j)$ désigne la résultante des efforts et $\vec{M}(D, S_i/S_j)$, le moment des efforts au point D,

- \mathcal{V}_{S_i/S_j} le torseur cinématique du solide S_i dans son mouvement par rapport au solide S_j , ayant pour composantes :

$$\mathcal{V}_{S_i/S_j} : \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(S_i/S_j) \\ \vec{V}(D, S_i/S_j) \end{array} \right\}_D$$

où $\vec{\Omega}(S_i/S_j)$ désigne la vitesse de rotation de S_i dans son mouvement par rapport à S_j et $\vec{V}(D, S_i/S_j)$, la vitesse de D dans le mouvement de S_i par rapport à S_j .

Présentation générale du sujet

Le thème de ce sujet est la broche d'un tour à commande numérique à 3 axes.

Outre les deux axes de déplacement linéaire : axe Z parallèle à l'axe de broche et axe X transversal, un tour à trois axes dispose également d'un axe C angulaire de rotation autour de l'axe de broche.

Ce troisième axe permet de réaliser un asservissement de vitesse pour des opérations de tournage classiques et un asservissement de position angulaire de la broche pour des opérations de perçage désaxées ou de fraisage avec des outils tournants montés en lieu et place d'un outil classique. Dans cette configuration, le mouvement de coupe est assuré par une motorisation spécifique sur la tourelle porte-outils, la broche est alors soit positionnée angulairement pour une opération de perçage soit soumise à un mouvement qui participe au mouvement d'avance pour une opération de fraisage.

Pour des prises de pièces cylindriques en mors à serrage concentrique, on utilise presque exclusivement des mandrins dits à serrage automatique.

Les mandrins à serrage automatique permettent de maîtriser "précisément" l'effort de serrage appliqué à la pièce par le réglage de la pression hydraulique. Ceci permet d'assurer, d'une part, le serrage nécessaire à l'entraînement de la pièce, et d'autre part, de limiter les déformations de celle-ci pour les pièces creuses. Pour vérifier le serrage effectif d'une pièce montée dans le mandrin, un capteur de fin de course ou un détecteur de proximité est utilisé.

L'effort de commande est fourni au mandrin par un vérin le plus souvent hydraulique placé à l'arrière de la broche. Sur le type de mandrin étudié, cet effort est transmis simultanément aux trois mors de base par un système de talons coniques. Le mouvement axial du piston du mandrin est ainsi transformé en un mouvement radial des trois mors. Pour assurer la mise et le maintien en position de la pièce des mors rapportés adaptés à la géométrie de la pièce sont fixés sur les mors de base.

Pour certaines applications étudiées dans ce sujet, on utilise des mandrins équipés de contrepoids. Un contrepoids est affecté à chaque mors de base et transmet au mors un effort de compensation par l'intermédiaire d'un levier de renvoi qui s'appuie sur le corps du mandrin.

Etude mécanique : définitions préliminaires

Dans toute la suite du sujet, le bâti représente la partie fixe de la machine-outil. On lui associe un repère R_0 ($O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{z}$), supposé galiléen, pour lequel \vec{z} est parallèle à l'axe de la broche, \vec{e}_1 est parallèle à la direction du mouvement transversal du chariot porte-tourelle, et O est un point fixe de l'axe de la broche (figure 1).

Les actions de pesanteur sont négligées dans tout le problème.

Grandeurs cinématiques :

Le mouvement de l'outil par rapport à la pièce résulte de la composition d'un mouvement dit *d'avance* et d'un mouvement dit de *coupe* (figure 1) :

- \vec{V}_c , représente la vitesse de coupe de l'outil par rapport à la pièce,
- \vec{V}_f , représente la vitesse d'avance de l'outil par rapport à la pièce.

La vitesse résultante \vec{V}_e , appelée vitesse résultante de coupe, est tangente à la trajectoire de l'outil dans son mouvement par rapport à la pièce.

Grandeurs mécaniques :

Concernant les actions mécaniques, nous reprenons les hypothèses classiques selon lesquelles, le torseur des actions mécaniques de l'outil sur la pièce est modélisable par un glisseur qui passe par le point P, milieu de l'arête utile de coupe contenu dans le plan (O, \vec{z}, \vec{e}_1).

Ce glisseur est caractérisé à l'aide de 3 composantes (figure 1) :

$$\mathcal{F}_{\text{outil/pièce}} : \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}(\text{outil/pièce}) = \vec{F}_a + \vec{F}_c + \vec{F}_n \\ \vec{0} \end{array} \right\}_P$$

- \vec{F}_a , composante d'avance, dans la direction du mouvement d'avance,
- \vec{F}_c , composante tangentielle, dans la direction de coupe,
- \vec{F}_n , composante normale, ou effort de pénétration.

I - Etude cinématique

L'étude cinématique concerne la réalisation d'une opération de dressage d'une face de la pièce. L'avance exprimée en mm/tr étant supposée constante, on se propose de déterminer les conditions cinématiques de la machine pour lesquelles il est possible de travailler à vitesse de coupe constante.

La pièce est assimilée à un cylindre de révolution de rayon initial r_p , de longueur L_p , et d'axe (O, \vec{z}). Elle est en rotation par rapport au bâti à la vitesse $\vec{\omega} = \Omega(t) \cdot \vec{z}$ où Ω est la vitesse de rotation de la broche par rapport au bâti. On associe à la pièce le repère R_p ($O_L, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{z}$), tel que $(\vec{e}_1, \vec{u}_1) = \theta$ et $\vec{OO}_L = L \cdot \vec{z}$ (figure I.1).

On considère l'opération de dressage de la face définie par $z = L$. Compte tenu des hypothèses, le problème est un problème plan, et l'outil se déplace en translation par rapport à R_0 à la vitesse : $\vec{V}(\text{outil} / R_0) = V_f \cdot \vec{e}_1$. A l'instant initial, $t = 0$, le point P de l'outil se trouve au point d'approche défini par $r_0 = r_p + 3 \text{ mm}$ et $\theta = \pi$.

I.1 Exprimer la vitesse de glissement au point P entre l'outil et la pièce, en fonction de V_f , r et Ω , où r est le rayon en cours d'usinage. Donner la relation liant la vitesse de coupe V_c à Ω .

I.2 On se place à vitesse de coupe constante. La trajectoire de l'outil par rapport à la pièce est une spirale, dont l'équation est donnée par :

$$r_0 - r = p \cdot (\theta - \pi) \quad (1)$$

I.2.a - Rappeler la relation liant $\Omega(t)$ et $\theta(t)$. En tenant compte de la relation établie en I.1 et de l'équation (1), établir la loi d'évolution du rayon au cours de l'usinage, $r(t)$.

I.2.b - Dédurre la loi d'évolution $\Omega(t)$. Montrer qu'elle s'exprime en fonction de V_c , p et r_0 .

Si N désigne le taux de rotation de la broche exprimé en tr/min, et si f désigne l'avance en mm/tr, exprimer la relation précédente en fonction de f , N , V_c et r_0 .

I.3 La motorisation de la broche de la machine-outil impose que la vitesse de rotation de broche reste inférieure à une valeur limite : $N \leq N_{\max}$

I.3.a - Calculer le temps t_{\max} pour lequel Ω_{\max} est atteint puis calculer la valeur minimale du rayon en dessous de laquelle il n'est plus possible de travailler à vitesse de coupe constante.

Applications numériques :

$N_{\max} = 5000 \text{ tr/min}$; $V_c = 280 \text{ m/min}$; $r_0 = 70 \text{ mm}$; $f = 0,1 \text{ mm/tr}$

I.3.b - Tracer le graphe $N(r)$ pour l'opération de dressage complète.

II - Etude des actions mécaniques

Cette partie est consacrée à la détermination des actions mécaniques liées au phénomène de coupe en fonction de paramètres géométriques de l'outil, de conditions cinématiques et des conditions de coupe. On s'intéressera plus particulièrement à la détermination des paramètres influant sur la composante tangentielle d'effort, appelée *effort de coupe*. La connaissance de l'effort de coupe est un élément essentiel pour le calcul de la puissance associée au phénomène de coupe et dans la détermination de l'effort de serrage.

La modélisation adoptée, volontairement simplifiée, du phénomène de coupe en tournage est la suivante :

- l'arête de coupe est rectiligne et perpendiculaire au mouvement d'avance de l'outil,
- la formation du copeau se fait par glissement suivant des plans de cisaillement; l'épaisseur de copeau reste faible devant sa largeur.

Le problème est bidimensionnel, c'est-à-dire que vitesses et actions mécaniques sont contenues dans un plan $(P, \vec{e}_a, \vec{e}_t)$ du repère galiléen. Les actions mécaniques sont modélisables par des glisseurs au point P.

On adopte la modélisation géométrique proposée **figure II.1**. Dans cette modélisation, le mouvement du copeau par rapport à l'outil est envisagé de façon spécifique.

La vitesse de coupe est supposée constante, et prépondérante devant la vitesse d'avance. Ainsi, le mouvement d'avance de l'outil peut être négligé en première approximation et on définit : $\vec{V}(P, \text{outil} / \text{pièce}) = V_c \cdot \vec{e}_t$. Dans le plan, on associe à l'outil le repère $(P, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$ tel que $(\vec{u}_1, \vec{e}_a) = \gamma$ (γ , angle de coupe).

Le copeau, délimité par la largeur de cisaillement (PA), glisse le long de la face de coupe de l'outil à la vitesse constante : $\vec{V}(P, \text{copeau} / \text{outil}) = V_g \cdot \vec{u}_1$ ($V_g > 0$). Dans le plan, on associe au copeau le repère $(P, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$ tel que $(\vec{v}_1, \vec{e}_t) = \phi$ (ϕ , angle de cisaillement). Le copeau est supposé de masse négligeable.

La résultante des actions mécaniques de l'outil sur le copeau est définie par :

$$\vec{F}(\text{outil}/\text{copeau}) = \vec{F}_c + \vec{F}_a = F_c \cdot \vec{e}_t + F_a \cdot \vec{e}_a = F \cdot \vec{u}_1 + N \cdot \vec{u}_2.$$

On adopte le modèle de Coulomb pour les lois de frottement au contact outil/copeau et on note $f = \tan \lambda$, le coefficient de frottement (λ est l'angle de frottement).

La résultante des actions mécaniques de la pièce sur le copeau, s'appliquant le long de (PA) est définie par :

$$\vec{F}(\text{pièce}/\text{copeau}) = -(F_s \cdot \vec{v}_1 + N_s \cdot \vec{v}_2), \text{ où } F_s \text{ est la composante de cisaillement.}$$

On rappelle que les actions de pesanteur sont négligées.

II.1 Énoncer les lois de Coulomb. En déduire la relation entre F et N .

II.2 Exprimer F_c et F_a en fonction de N , γ et λ .

II.3 Déterminer F_s en fonction de N , λ , ϕ et γ . En déduire la relation entre l'effort de coupe F_c et l'effort de cisaillement F_s .

II.4 On note τ la contrainte de cisaillement du matériau usiné.

II.4.a - Après avoir calculé la section de cisaillement, exprimer F_s en fonction de τ , b , h et ϕ .

II.4.b - Montrer que l'effort de coupe diminue en augmentant l'angle de coupe.

II.4.c - Calculer la puissance P des actions mécaniques s'exerçant sur la pièce le long de (AP), dans le mouvement de la pièce par rapport à l'outil en fonction de τ et V_c .

II.5 On se place dans la situation dite de puissance minimale définie par $\frac{\partial P}{\partial \phi} = 0$.

II.5.a - Montrer que l'angle de cisaillement correspondant ϕ est donné par :

$$2. \phi = \gamma - \lambda + \pi/2.$$

II.5.b - Calculer F_c et P dans ces conditions.

Applications numériques : $\tau = 450$ MPa ; $h = 0,3$ mm/tr ; $b = 5$ mm ; $\lambda = 30^\circ$; $\gamma = 5^\circ$;
 $V_c = 280$ m/min

III - Etude du maintien en position de la pièce

On s'intéresse dans cette partie au dispositif de serrage du mandrin, et en particulier à la détermination de l'effort de serrage nécessaire en fonction de l'effort de coupe. L'objectif est ici de montrer l'influence des effets centrifuges sur le serrage et l'intérêt d'utiliser un mandrin dit à compensation inertielle. Ainsi, il ne sera pas question de l'étude du dispositif de transmission de l'effort du piston de commande à l'effort dit de serrage des mors sur la pièce. De même, on se place dans des conditions de prise de pièce telles que les effets de basculement soient négligeables.

Quel que soit le type de mandrin à serrage automatique utilisé, on suppose que le serrage est transmis à la pièce par l'intermédiaire des mors. Ainsi, on adopte pour les actions mécaniques de serrage le modèle proposé figure III.1, pour lequel le serrage est modélisé par l'action résultante de chacun des mors sur la pièce.

Les actions mécaniques du système (CM) composé du corps du mandrin et du piston de commande sur un mors (M_i) sont modélisées par un torseur en O_s où O_s est un point de l'axe de broche défini par $\overrightarrow{OO_s} = L_s \cdot \vec{z}$:

$$\mathcal{F}_{CM/M_i} : \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{CM/M_i} \\ \vec{C}_{CM/M_i} \end{array} \right\}_{O_s}$$

avec $\vec{n}_i \cdot \vec{F}_{CM/M_i} = -\frac{R_s}{3}$, où R_s ($R_s > 0$) est la force de serrage totale sur les trois mors.

L'action d'un mors ($i=1,2,3$) sur la pièce est modélisée par un glisseur défini au centre de section C_{pi} ($\overrightarrow{O_s C_{pi}} = r \cdot \vec{n}_i$) par (figure III.1) :

$$\mathcal{F}_{M_i/pièce} : \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}(M_i/pièce) = \vec{F}_i + \vec{R}_{ii} + \vec{R}_{ai} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{C_{pi}}$$

$\vec{F}_i = -F_i \cdot \vec{n}_i$, ($F_i > 0$), est la composante normale de serrage d'un mors sur la pièce,

\vec{R}_{ii} est la composante tangentielle et \vec{R}_{ai} est la composante dite de soutien.

On suppose de plus qu'il y a adhérence au contact mors/pièce et ainsi : $\|\vec{R}_i\| \leq \mu \cdot \|\vec{F}_i\|$, où μ est le coefficient d'adhérence.

Les trois mors sont supposés identiques. Chaque mors est constitué d'un mors de base et d'un mors rapporté et on définit pour chaque mors sa masse m , et son centre de masse G_{Mi} , tel que $\vec{O_s G_{Mi}} = r_G \cdot \vec{n}_i + L_{zi} \cdot \vec{z}$. On associe à chaque mors le repère $R_{Mi}(C_{pi}, \vec{n}_i, \vec{t}_i, \vec{z})$.

La pièce, assimilée à un solide de révolution d'axe (O, \vec{z}) est liée au mandrin par l'intermédiaire des mors. Elle est en rotation uniforme autour de l'axe (O, \vec{z}) , à la vitesse constante $\vec{\Omega} = \omega \cdot \vec{z}$. Les actions de l'outil sur la pièce sont celles proposées figure 1.

III.1 Mandrin à serrage automatique

Cette question est consacrée à l'étude du mandrin BH-M-210 présenté figure III.2 pour lequel le dispositif de serrage ne présente pas de compensation inertielle.

III.1.a - En statique, calculer F_i en fonction de R_s .

III.1.b - Calculer le couple transmissible maximal C , par l'action des trois mors sur la pièce ramenée sur l'axe de broche, à la limite du glissement. Montrer en particulier que C s'exprime en fonction de μ , r et R_s .

III.1.c - Calculer la vitesse, puis l'accélération du centre de masse G_{Mi} de chaque mors dans son mouvement par rapport à R_0 .

III.1.d - Compte tenu des effets centrifuges associés à la rotation des mors, le couple transmissible noté C' est diminué.

Après avoir isolé un mors et appliqué le théorème de la résultante dynamique en projection sur \vec{n}_i , calculer la valeur de la composante normale de serrage, F'_r .

Montrer que, à la limite du glissement : $R'_u = \mu \cdot \left(\frac{R_s}{3} - m \cdot \omega^2 \cdot r_G \right)$. En déduire C' .

III 1.e - Tracer le graphe d'évolution du couple transmissible en fonction de la vitesse de rotation de broche.

Application numérique : $R_s = 110 \text{ kN}$; $r = 35 \text{ mm}$; $r_G = 70 \text{ mm}$; $m = 1,3 \text{ kg}$; $\mu = 0,2$

Remarque : On pourra considérer des valeurs de rotation de broche comprise entre 0 et 5000 tr/min.

III.1.f - A partir du graphe précédent, montrer qu'il existe une vitesse limite à partir de laquelle il convient de ne pas négliger les effets centrifuges (chute de couple supérieure à 20%).

III.1.g - Soit C^* , le couple effectivement transmis à la pièce. Par application du théorème du moment dynamique à la pièce en projection sur (O_s, \vec{z}) , déterminer la relation entre C^* et F'_c .

III.1.h – Justifier la relation $C' > k \cdot C^*$, où k est un coefficient dont on précisera la signification.

III.2 Mandrin à serrage automatique à compensation inertielle

Cette question est consacrée à l'étude du mandrin BHM-FC210 présenté figure III.3 pour lequel le dispositif de serrage présente un système de compensation inertielle. Par raison de symétrie, il est possible de limiter l'étude du système de compensation inertielle à un mors. La modélisation du système de compensation est celle proposée **figure III.4**. Le système additionnel est composé d'un contrepoids et d'un levier de renvoi, en liaison avec le corps du mandrin et les mors de base. Le schéma cinématique du système de compensation inertielle est présenté **figure III.5**.

Le corps du mandrin, ou solide S_1 , est en rotation uniforme autour de l'axe (O, \vec{z}) , à la vitesse $\vec{\Omega} = \omega \cdot \vec{z}$. On associe au mandrin le repère $(O_m, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ tel que $\overrightarrow{OO_m} = L_m \cdot \vec{z}$ et $\vec{u} = \vec{n}_1$.

Le levier de renvoi, ou solide S_2 , est en liaison rotule de centre O_1 avec le mandrin, tel que $\overrightarrow{O_m O_1} = r_L \cdot \vec{u}$. Le point de contact entre le levier et le mandrin est défini par P_1 tel que : $\overrightarrow{O_1 P_1} = r_1 \cdot \vec{u}$. Le levier est supposé de masse négligeable. Il peut être assimilé à un cylindre de révolution d'axe \vec{z}_1 , tel que $(\vec{z}, \vec{z}_1) = \beta$.

Le contrepoids, ou solide S_3 , est en liaison glissière d'axe \vec{u} avec le mandrin. Il est de plus en liaison sphère-cylindre d'axe (O_3, \vec{z}) avec le levier, avec $\overrightarrow{O_1 O_3} = -z_3 \cdot \vec{z}_1$. Le point d'application de la résultante des actions de liaison entre le levier et le contrepoids, P_3 , est défini par : $\overrightarrow{O_3 P_3} = r_3 \cdot \vec{u}$. Le contrepoids est supposé de masse m_3 , de centre de masse G_3 tel que : $\overrightarrow{O_m G_3} = -z_{G3} \cdot \vec{z} + r_{G3} \cdot \vec{u}$.

Le mors de base, ou solide S_4 , est en liaison glissière d'axe \vec{u} avec le mandrin. Il est en liaison sphère-cylindre avec le levier d'axe (O_4, \vec{z}) , avec $\overrightarrow{O_1 O_4} = z_4 \cdot \vec{z}_1$. Le point de d'application de la résultante des actions de liaison entre le levier et le mors de base, P_4 , est défini par : $\overrightarrow{O_4 P_4} = -r_4 \cdot \vec{u}$. Le mors de base est supposé de masse m_4 , de centre de masse G_4 tel que : $\overrightarrow{O_m G_4} = z_{G4} \cdot \vec{z} + r_{G4} \cdot \vec{u}$.

Le mors rapporté, ou solide S_5 , de masse m_5 , de centre de masse, G_5 , défini par : $\overrightarrow{O_m G_5} = z_{G5} \cdot \vec{z} + r_{G5} \cdot \vec{u}$ est en liaison complète avec le mors de base. Ainsi, on définit le solide S_{45} , constitué de la réunion des solides S_4 et S_5 .

La liaison entre le mors de base et le piston de commande est modélisable par un contact ponctuel en P_2 . Le piston est en liaison pivot glissant avec le corps du mandrin.

Les liaisons entre les solides sont supposées parfaites.

III.2.a – On s'intéresse uniquement au système Σ constitué des solides S_1 , S_2 , S_3 et S_{45} . Pour des raisons de simplicité, les liaisons entre le mors de base S_4 et le piston de commande ne sont pas considérées dans cette question.

Identifier le nombre d'inconnues cinématiques.

Identifier le nombre de chaînes fermées indépendantes.

Expliciter les relations de fermeture de chaîne. Après avoir identifié le nombre d'équations indépendantes, déterminer le degré de mobilité du système.

III.2.b – Par application du principe fondamental de la dynamique au contrepoids déterminer en fonction de m_3 , ω et des paramètres géométriques, la résultante des actions mécaniques du levier sur le contrepoids en projection sur \vec{u} .

III.2.c – Par application du théorème du moment dynamique au levier en projection sur (O_1, \vec{v}) , déterminer la projection sur \vec{u} de la résultante des actions mécaniques de S_{45} sur le levier S_2 .

III.2.d – Par application du théorème de la résultante au solide S_{45} en projection sur \vec{u} , déterminer alors la nouvelle expression de la composante normale de serrage, F^* , du mors sur la pièce, et montrer qu'elle s'exprime en fonction de R_s , m_3 , ω , m et r_G et des paramètres géométriques. Comparer cette expression à l'expression obtenue à la question III.1.d. Conclure quant à l'intérêt du système à compensation inertielle.

IV - Etude du comportement de la broche

Comme il a déjà été précisé, un tour à 3 axes est caractérisé par la présence, au niveau de la broche, de deux asservissements, un en vitesse et un en position. On se propose dans cette partie d'étudier quelques aspects relatifs à chacun de ces asservissements, essentiellement :

- définition d'un modèle équivalent d'une motorisation électrique,
- limite d'utilisation d'un tel modèle pour l'étude du comportement de l'asservissement de vitesse,
- influence de la structure de l'asservissement de position sur la qualité des performances.

Nota : Les dernières évolutions technologiques se traduisent aujourd'hui par l'utilisation de moteurs autosynchrones (ou synchrones auto-pilotés) associés à des variateurs numériques. Le modèle retenu sera toutefois celui du moteur à courant continu à excitation indépendante. Si ce modèle n'est qu'une approximation moyenne, il n'en sera pas moins suffisant dans le cadre de l'étude réalisée ici. De plus, on se placera dans l'hypothèse d'un modèle continu de systèmes linéaires ; la commande numérique n'introduisant pas de différences significatives de comportement pour l'étude réalisée ici.

La modélisation de la motorisation est donc la suivante :

- équation de commande $u(t) = R.i(t) + L.\frac{di}{dt}(t) + e(t)$
avec respectivement R et L, la résistance et l'inductance de l'induit,
- relation de couple moteur $c_m(t) = K_c.i(t)$
- relation de force contre-électromotrice $e(t) = K_e.\omega_m(t)$
- équation mécanique $J.\frac{d\omega_m}{dt}(t) = c_m(t) - c_r(t)$
avec $c_m(t)$ le couple moteur, $c_r(t)$ le couple résistant dû aux actions mécaniques pièce/outil et $\omega_m(t)$ la vitesse de rotation de la broche. J représente l'inertie globale, ramenée sur l'arbre moteur, du système broche = {broche + moteur + mandrin + vérin de commande + pièce}. A noter également que la cinématique d'entraînement est telle que la broche et le moteur tournent à la même vitesse.

Nota : La variable de Laplace sera notée "p". Autant que possible, les lettres minuscules seront utilisées pour désigner les fonctions temporelles et les lettres majuscules pour désigner les transformées de Laplace. Ainsi, on écrira $\omega_m(t)$ et $\Omega_m(p)$.

Nota : Les résultats seront présentés sous forme littérale, puis le cas échéant sous forme numérique. Les fonctions de transfert devront être écrites sous forme canonique.

IV.1 - Modèle de la motorisation de la broche

Nota : Par convention, pour l'étude de la motorisation et de l'asservissement de vitesse, les fonctions de transfert relatives à l'étude des modèles du premier ordre seront notées avec une étoile "" en exposant.*

IV.1.a - Ecrire la relation de transfert de la commande en vitesse de la motorisation sous la forme :

$$\Omega_m(p) = F_1(p).U(p) - F_2(p).C_r(p)$$

IV.1.b - Faire l'application numérique pour $R = 0,28 \Omega$, $L = 0,25 \text{ mH}$, $J = 2,3 \text{ kg.m}^2$, $K_e = 120 \text{ V/(1000 tr/min)}$ et $K_c = 1,146 \text{ Nm/A}$.

Pour le modèle d'une motorisation électrique, on définit classiquement deux constantes de temps : la constante de temps mécanique $T_m = \frac{R.J}{K_e.K_c}$ et la constante de temps électrique $T_e = \frac{L}{R}$.

IV.1.c - Montrer que le dénominateur des fonctions $F_1(p)$ et de $F_2(p)$ s'écrit sous la forme : $1+T_m p+T_e T_m p^2$. En déduire l'expression de la pulsation propre ω_{nF} et du coefficient d'amortissement ξ_F de $F_1(p)$ en fonction de T_m et de T_e .

Pour un tel système du deuxième ordre, si le coefficient d'amortissement est supérieur à une certaine valeur notée ξ_0 , on peut admettre un modèle équivalent du premier ordre de la forme :

$$F_1^*(p) = \frac{K_1}{1+T_m p} \text{ et } F_2^*(p) = \frac{K_2}{1+T_m p}$$

IV.1.d - En déduire la contrainte portant sur T_m et T_e pour adopter un tel modèle du premier ordre. Application numérique pour $\xi_0 = \sqrt{5}$. Conclure.

IV.2 - Limite d'utilisation de la motorisation

La figure IV.1 représente la courbe limite d'utilisation du moteur en charge : puissance mécanique disponible en fonction de la vitesse de rotation de la broche. Pour toutes les questions IV.2.i, l'étude est réalisée en considérant la motorisation en régime permanent.

IV.2.a - Donner l'expression de la vitesse de broche pour une tension de commande U donnée et un couple résistant C_r constant.

IV.2.b - Calculer la valeur de la chute de vitesse consécutive à une opération d'usinage avec un couple résistant de 100 Nm .

IV.2.c - Calculer la tension de commande ainsi que la puissance électrique consommée par le moteur pour les vitesses 850 tr/min et 5000 tr/min pour une utilisation limite du moteur.

Asservissement de vitesse

La structure de l'asservissement de vitesse est telle que : la tension de commande $u(t)$, en l'absence de correcteur, est proportionnelle à la fonction d'écart $\varepsilon(t)$: $u(t) = K_V \cdot \varepsilon(t)$, la mesure de vitesse est réalisée par un capteur modélisé par un gain pur K_{RV} , la consigne de vitesse est notée $u_{réf}(t)$ avec $u_{réf}(t) = K_{cons} \cdot \omega_{réf}(t)$. K_{cons} représente le gain d'adaptation de la consigne tel que $\omega_{réf}(t)$ soit homogène à $\omega_m(t)$, i.e., tel que les plages de variation de $\omega_m(t)$ et $\omega_{réf}(t)$ soient idéalement identiques. On en déduit le schéma fonctionnel de l'asservissement de vitesse de la broche représenté figure IV.2.

IV.3 - Modèles de l'asservissement de vitesse

IV.3.a - Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) notée $G_V(p)$, avec le modèle de la motorisation du **deuxième ordre**.

IV.3.b - Après avoir déterminé l'expression du gain noté K_{cons} , déterminer l'expression de K_a qui permet d'aboutir au modèle équivalent à retour unitaire représenté figure IV.3. Donner la nouvelle expression de la fonction de transfert en boucle ouverte $G_V(p)$. On notera K_{BO} le gain statique de la FTBO.

IV.4 - Réponse fréquentielle

Tracer sur le document réponse le diagramme asymptotique de Bode correspondant à $G_V(j\omega)$ ainsi que l'allure des courbes réelles de module et de phase pour $K_{BO} = 20$. On admettra pour cette question que le modèle du deuxième ordre pour $F_1(p)$ peut s'écrire sous la forme :

$$F_1(p) = \frac{K_1}{(1 + T_m p) \cdot (1 + T_e p)}$$

IV.5 - Caractérisation de l'asservissement de vitesse

IV.5.a - Donner l'expression de la relation de transfert de l'asservissement de vitesse sous la forme :

$$\Omega_m(p) = H_1(p) \cdot \Omega_{réf}(p) - H_2(p) \cdot C_r(p)$$

IV.5.b - Exprimer les pulsation propre, ω_{nH} , et coefficient d'amortissement, ξ_H , de $H_1(p)$ en fonction des constantes de temps T_m et T_e , puis des paramètres (ω_{nF} et ξ_F) de $F_1(p)$.

IV.5.c - En déduire la condition portant sur K_{BO} pour que l'on puisse adopter également un modèle équivalent du premier ordre pour l'asservissement de vitesse, en adoptant le même critère que celui déjà utilisé en IV.1, c'est-à-dire, $\xi_H \geq \xi_0$ avec $\xi_0 = \sqrt{5}$.

IV.5.d - Si on écrit $H_1(p)$ sous la forme :

$$H_1(p) = \frac{K_{HI}}{1 + T_1 p + T_1 T_2 p^2}$$

Déterminer les relations entre T_1 et T_2 , et T_m et T_e . Conclure quant à l'évolution du rapport des constantes de temps T_1 et T_2 , en fonction des paramètres de la FTBO.

IV.5.e - Donner l'expression des fonctions de transfert $H_1^*(p)$ et $H_2^*(p)$ qui correspondent au modèle équivalent du **premier ordre** pour l'asservissement de vitesse.

IV.6 - Confrontation des modèles en boucle ouverte

IV.6.a - Donner l'expression de la FTBO $G_V^*(p)$, avec le modèle équivalent du premier ordre pour la motorisation.

IV.6.b - Tracer, également sur le document réponse, le diagramme asymptotique de Bode correspondant, ainsi que l'allure des courbes réelles pour la même valeur de K_{BO} qu'à la question IV.4 ($K_{BO} = 20$).

IV.6.c - Après avoir déterminé la pulsation au gain unité, donner la valeur de la marge de phase et ce pour les deux modèles. Conclure.

IV.7 - Précision statique

IV.7.a - Donner l'expression de la fonction d'écart $\varepsilon(p)$ (cf. figure IV.3).

IV.7.b - Déterminer l'erreur statique pour une consigne en échelon $\omega_{réf}(t) = \omega_0 \cdot u(t)$ et un couple résistant constant, soit $c_r(t) = C_{r0} \cdot u(t)$, avec $u(t)$ la fonction de Heaviside. Application numérique pour $K_{BO} = 20$, $\omega_0 = 300$ rad/s et $C_{r0} = 90$ Nm.

IV.8 - Correction

On envisage d'intégrer dans la chaîne d'action, en aval du comparateur, un correcteur de fonction de transfert $C_V(p)$ de la forme :

$$C_V(p) = K_{CV} \cdot \left(1 + \frac{1}{\tau_i p}\right)$$

IV.8.a - Tracer, sur feuille de copie, le diagramme asymptotique de Bode correspondant à la réponse fréquentielle du correcteur pour $K_{CV} > 1$ et $\tau_i < 1$ s.

On suppose l'asservissement de vitesse réglé avec $K_{BO} = 20$ et dans la configuration modèle du deuxième ordre pour la motorisation.

IV.8.b - Déterminer la valeur minimale de τ_i en deçà de laquelle l'asservissement de vitesse est toujours instable, et ce quel que soit le réglage de $K_{CV} \geq 1$. On pourra pour cela exprimer la condition pour laquelle la marge de phase ne peut être que négative.

On considérera pour la suite du problème que le modèle retenu pour la motorisation est du premier ordre.

Asservissement de position

On envisage pour la réalisation de l'asservissement de position une structure telle que celle modélisée par le schéma fonctionnel donné figure IV.4. Le correcteur à action proportionnelle est défini par $C_p(p) = K_{CP}$.

On considère dans un premier temps que l'asservissement est réalisé sans boucle interne de vitesse. Les fonctions $M_1(p)$ et $M_2(p)$ s'expriment alors sous la forme :

$$M_1(p) = K_P \cdot F_1^*(p) = K_P \cdot \frac{K_1}{1 + T_m p} \quad \text{et} \quad M_2(p) = F_2^*(p) = \frac{K_2}{1 + T_m p}$$

avec $K_1 = 0,87 \text{ rad/s/V}$, $K_2 = 0,21 \text{ rad/s/Nm}$ et $T_m = 0,5 \text{ s}$.

IV.9.a - Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte $G_p(p)$.

IV.9.b - Donner l'expression de la relation de transfert de l'asservissement de position sous la forme :

$$\Theta_m(p) = Q_1(p) \cdot \Theta_{\text{réf}}(p) - Q_2(p) \cdot C_r(p)$$

IV.9.c - Rappeler la condition sur le coefficient d'amortissement d'un système du deuxième ordre pour que le dépassement soit nul en réponse à une entrée en échelon. En déduire la limite de K_{CP} correspondante pour un gain K_P donné.

IV.10 - Raideur asservie

On se propose d'étudier l'influence sur la position angulaire de la broche d'une variation de couple résistant, et ce en considérant deux structures de la chaîne d'action de l'asservissement de position.

On définit la raideur de l'asservissement de position par la relation :

$$ra_{\theta} = - \frac{\Delta c_r}{\Delta \theta}$$

rapport d'une variation de couple Δc_r , supposée constante, à l'écart de position permanent qu'elle engendre $\Delta \theta$.

IV.10.a - Déterminer, en régime permanent (position angulaire atteinte), l'expression de la raideur asservie en fonction de K_{CP} .

IV.10.b - En déduire la valeur minimale du produit $K_{CP} \cdot K_P$ pour limiter la valeur maximale d'un défaut d'usinage de $6 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$ pour $\Delta c_r = 20 \text{ Nm}$.

IV.10.c - Déduire de la condition de dépassement indiciel nul, la limite admissible pour la raideur asservie. Confronter les résultats obtenus pour les deux conditions de réglage.

On envisage maintenant un asservissement de position avec boucle interne de vitesse et sans correcteur dans la boucle de vitesse. Les fonctions de transfert $M_1(p)$ et $M_2(p)$ ont alors pour expression :

$$M_1(p) = H_1^*(p) = \frac{K_{H1}}{1 + T_1 p} \text{ et } M_2(p) = H_2^*(p) = \frac{K_{H2}}{1 + T_1 p}$$

avec $K_{H1} = 0,95 \text{ rad/s/V}$, $K_{H2} = 0,01 \text{ rad/s/Nm}$ et $T_1 = 0,023 \text{ s}$.

IV.11 - Donner l'expression de la nouvelle relation de transfert :

$$\Theta_m(p) = W_1(p) \cdot \Theta_{\text{réf}}(p) - W_2(p) \cdot C_r(p)$$

IV.12.a - Déterminer la nouvelle expression de la raideur asservie.

IV.12.b - Déduire de la condition de dépassement indiciel nul, la nouvelle limite pour la raideur asservie.

IV.12.c - En déduire l'influence de la boucle interne de vitesse sur la raideur asservie.

IV.13 - Précision en poursuite

Pour certaines opérations de fraisage sur un tour à 3 axes, la vitesse d'avance est obtenue par combinaison des mouvements linéaires de la tourelle porte-outils et du mouvement de rotation de la broche. On considère une configuration avec une rotation de broche à vitesse constante, soit pour l'asservissement de position, une consigne de la forme :

$$\theta_{\text{réf}}(t) = \omega \cdot t \cdot u(t) \text{ (avec } u(t) \text{ la fonction de Heaviside)}$$

De plus, on se place dans la configuration avec boucle interne de vitesse sans correcteur dans cette boucle.

IV.13.a - Déterminer l'expression de l'erreur de poursuite angulaire en supposant que $c_r = 0$. Application numérique pour $\omega = 12 \text{ rad/min}$.

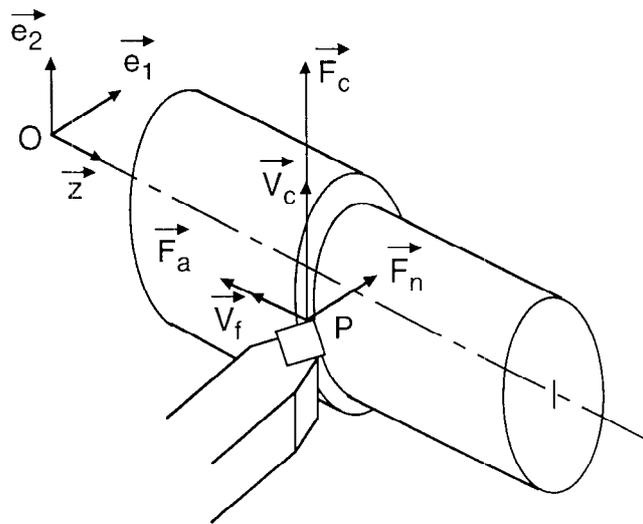


Figure 1 : Définitions préliminaires

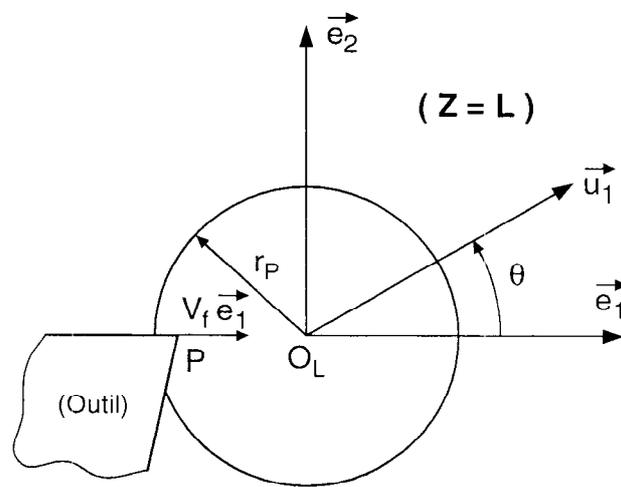


Figure I.1 : Etude cinématique

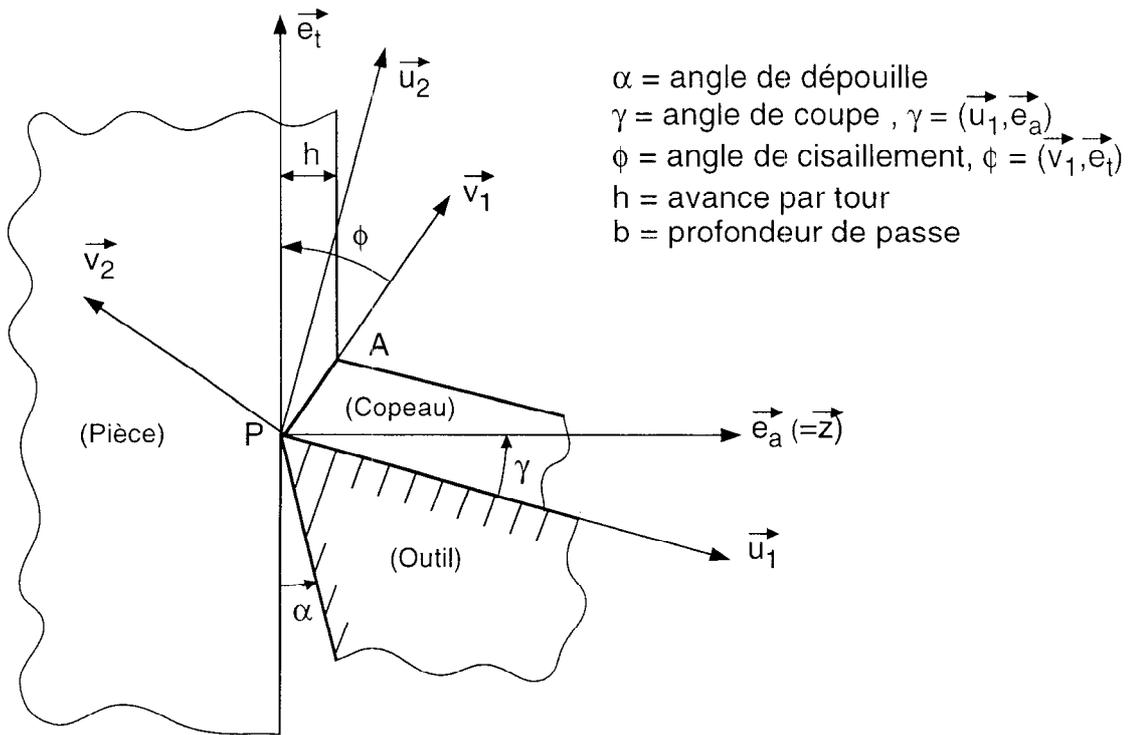


Figure II.1 : Etude des actions mécaniques = paramétrage

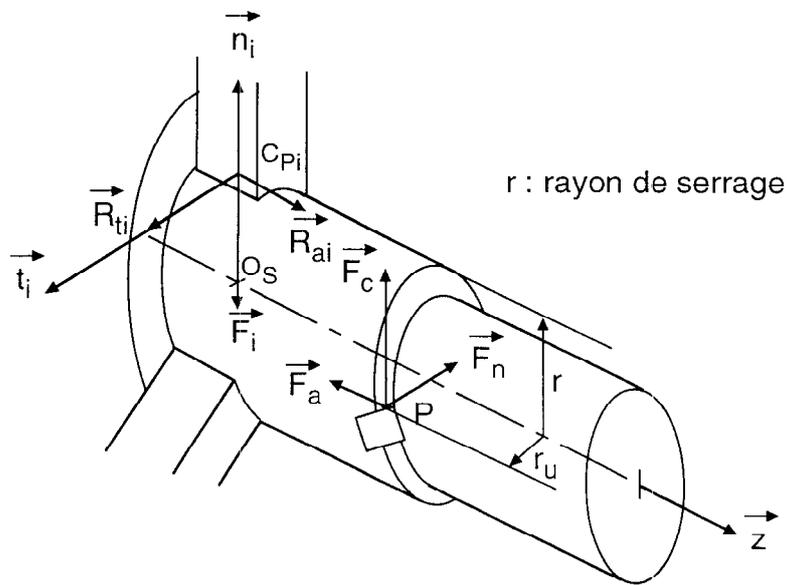


Figure III.1 : Etude du serrage = modélisation des actions mécaniques

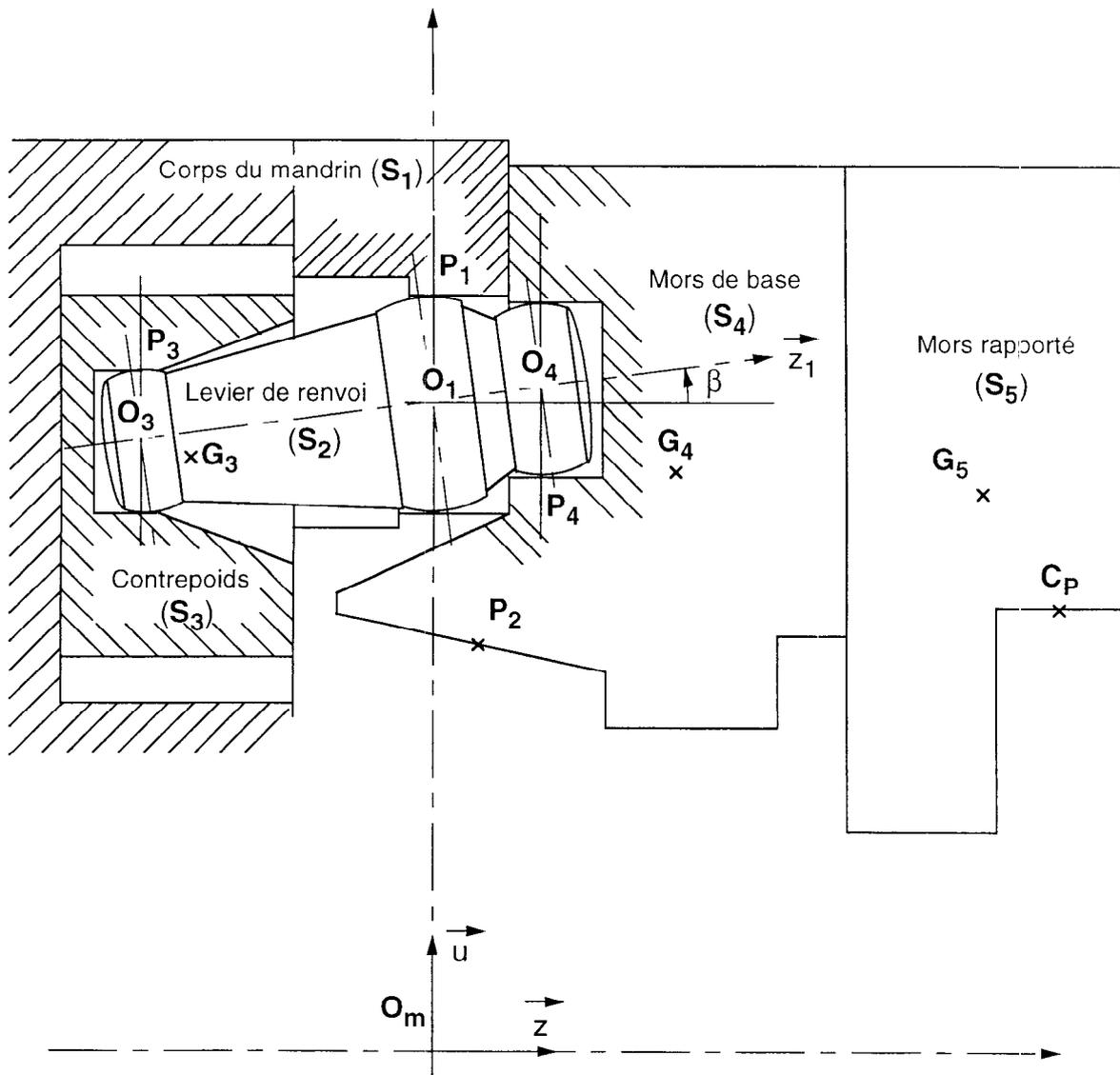


Figure III.4 : Paramétrage du mandrin à compensation

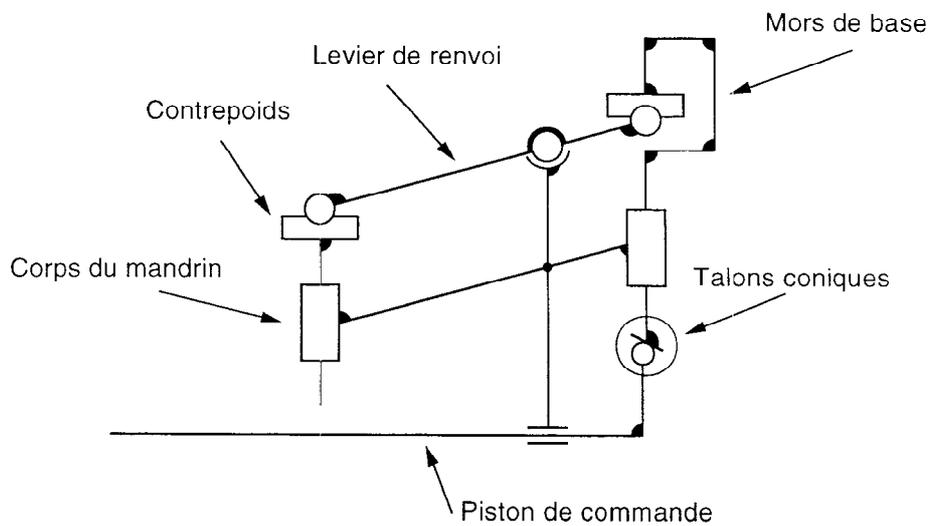


Figure III.5 : Schéma cinématique partiel

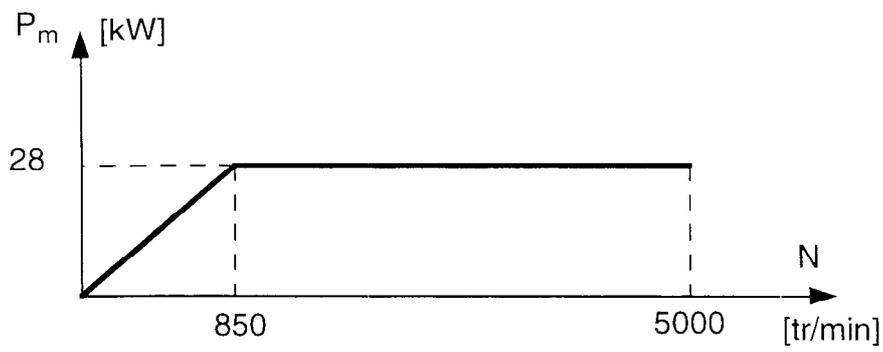


Figure IV.1 : Courbe limite du moteur

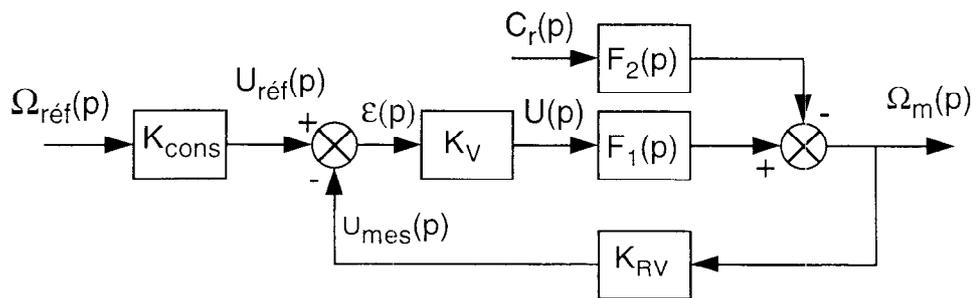


Figure IV.2 : Asservissement de vitesse

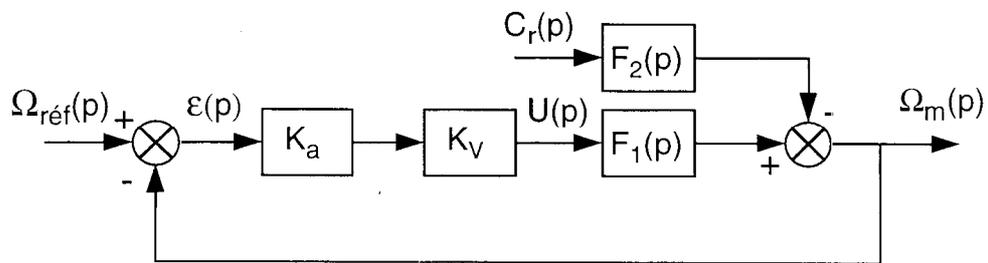


Figure IV.3 : Asservissement de vitesse à retour unitaire

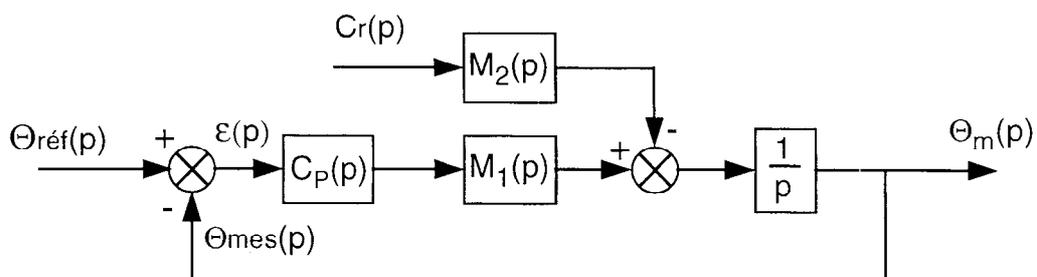


Figure IV.4 : Asservissement de position

Diagramme de Bode

