

ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES,  
 ECOLES NATIONALES SUPERIEURES DE L'AERONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,  
 DES TECHNIQUES AVANCEES, DES TELECOMMUNICATIONS,  
 DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT ETIENNE, DES MINES DE NANCY,  
 DES TELECOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.  
 ECOLE POLYTECHNIQUE (FILIERE TSI)  
 CONCOURS D'ADMISSION 2013  
**ÉPREUVE DE SCIENCES INDUSTRIELLES**

**Filière : MP**

SUJET MIS A LA DISPOSITION DES CONCOURS : CYCLE INTERNATIONAL, ENSTIM, INT, TPE-EIVP

**Durée de l'épreuve : 3 heures**

**L'usage de la calculatrice est autorisé**

*Cet énoncé comporte 10 pages numérotées de 1 à 10 et un document annexe de 4 pages. Le travail doit être reporté sur un document-réponse de 4 copies (16 pages) distribuées avec le sujet. Un seul document-réponse est fourni au candidat. Le renouvellement de ce document en cours d'épreuve est interdit. Pour valider ce document-réponse, chaque candidat doit obligatoirement y inscrire à l'encre, à l'intérieur du rectangle d'anonymat situé en haut de chaque copie, ses nom, prénoms (souligner le prénom usuel), numéro d'inscription et signature, avant même d'avoir commencé l'épreuve. Il est conseillé de lire la totalité de l'énoncé avant de commencer l'épreuve.*

*Les questions sont organisées au sein d'une progression logique caractéristique de la discipline, certaines questions étant partiellement dépendantes : il est donc souhaitable de les traiter dans l'ordre. La rédaction des réponses sera la plus concise possible : on évitera de trop longs développements de calculs en laissant subsister les articulations du raisonnement.*

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

## Prothèse active transtibiale

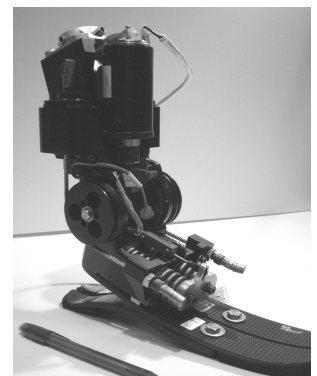
### 1 Problématique technique



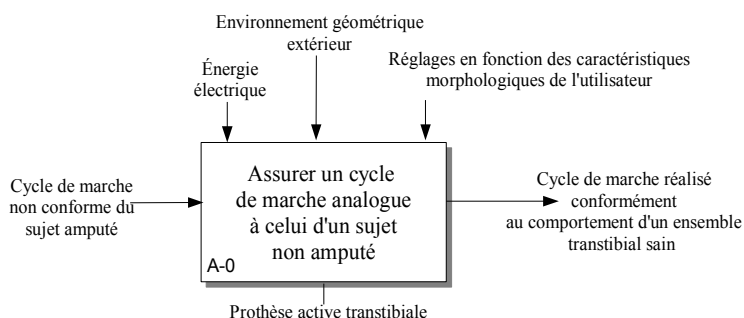
*Illustration 2: Flex-Foot et Proprio-foot (Ossür)*

La majorité des prothèses transtibiales (pour une amputation en dessous du genou) utilisées aujourd'hui sont purement passives, c'est-à-dire que leurs propriétés mécaniques restent fixes pendant la marche (Illustration 2).

Ces prothèses sont constituées en général de semelles ressorts en carbone profilées qui emmagasinent et restituent l'énergie mécanique pendant la marche par déformation.



*Illustration 1: Prothèse active*



*Illustration 3: SADT A-0 de la prothèse active*

Des études cliniques montrent que les amputés qui utilisent ce type de prothèse doivent fournir de 20 à 30 % d'énergie en plus pour obtenir une vitesse de déplacement équivalente à celle d'une personne non amputée effectuant le même déplacement. Ils souffrent également d'une dissymétrie de la marche (différence de comportement entre le côté amputé et le côté non amputé) qui fatigue les articulations des membres sains.

Des ingénieurs du M.I.T. ont mis au point une prothèse active transtibiale capable de proposer un comportement similaire à celui des membres non amputés (Illustration 3, SADT A-0). On étudie dans ce sujet le prototype initial qui a permis de valider la pertinence d'une telle prothèse active (Illustration 1).

L'étude sera menée en s'appuyant sur l'illustration 4.

Une analyse du système en situation, notamment du cycle de marche, sera réalisée afin de définir le cahier des charges (partie 2), la loi de consigne à appliquer (partie 3) et l'organisation structurale du système (partie 4).

Une modélisation de la chaîne d'énergie (partie 6) et d'informations (parties 5 et 7) sera alors conduite.

Les paramètres du modèle seront identifiés à partir d'un montage d'essai (partie 6.3).

Les résultats de simulation seront alors comparés à la loi de consigne. Une validation clinique des résultats sur des patients finalisera l'étude (partie 8).

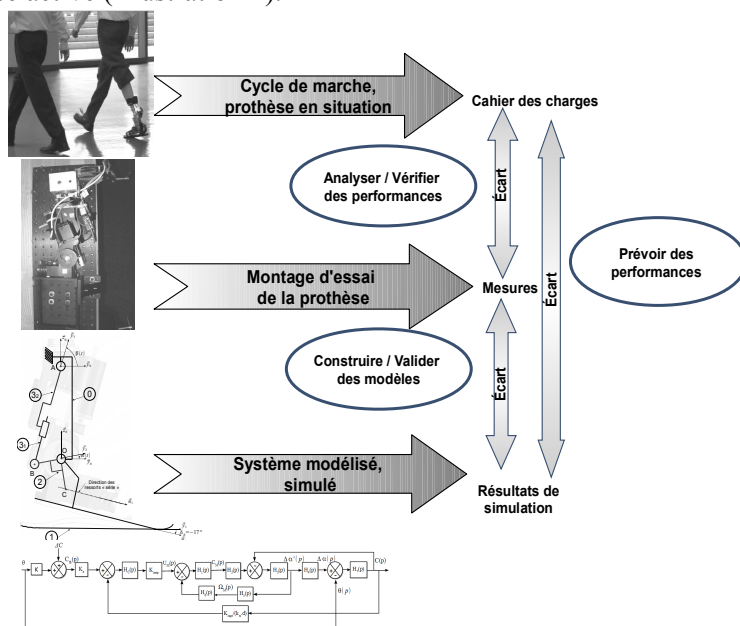


Illustration 4: Démarche d'étude

## 2 Mise en place du cahier des charges

*Afin de pouvoir établir et justifier le cahier des charges fonctionnel de la prothèse active, une analyse du comportement des membres sous le genou (ensemble transtibial constitué du tibia, de la cheville et du pied) d'un sujet non amputé est menée dans cette partie.*

### 2.1 Analyse de l'ensemble transtibial lors de la marche

Le cycle de marche est défini dans l'annexe 1. Il est constitué de deux phases principales : la phase d'appui et la phase oscillante. La phase d'appui correspond à environ 60 à 70% de la durée d'un cycle de marche notée  $T_c$ . Chaque cycle comporte 2 pas. Des relevés expérimentaux permettent d'estimer à 105 pas par minute la cadence d'une marche normale. Une marche rapide correspond à une cadence de 123 pas par minute en moyenne.

La phase d'appui peut être divisée en 3 sous-phases détaillées en annexe 1.

Pour analyser le comportement de l'ensemble transtibial, on modélise le tibia et le pied par des solides indéformables et la cheville par une liaison pivot d'axe  $(O, \vec{x})$ .

On associe :

- le repère  $R_0(O, \vec{x}, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  au tibia noté 0,
- le repère  $R_1(O, \vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  au pied noté 1.

On note  $\theta = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$  l'angle de rotation du pied par rapport au tibia.

La figure du document-réponse (question 1) décrit l'évolution de l'angle  $\theta$  mesuré expérimentalement au cours d'un cycle (abscisse en pourcentage) pour une cadence de marche normale. Les relevés sont réalisés pour une personne aux mensurations moyennes de 75 kg pour 1,75 m.

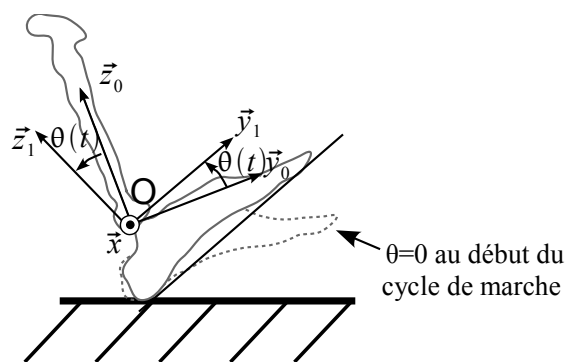


Illustration 5: Paramétrage du modèle de solides indéformables pied/tibia

Question 1. Indiquer sur cette figure les phases d'appui (ST) et d'oscillation (SW) ainsi que les sous-phases CP, CD et PP. Déterminer la valeur absolue de la vitesse angulaire maximale du pied en rad/s  $\left| \frac{d\theta}{dt} \right|_{\max}$  sachant que le cycle est celui d'une marche normale.

Pour contrôler le mouvement, les muscles doivent compenser le moment imposé par le corps en déséquilibre. Cette action des muscles peut être modélisée par un couple au niveau de la cheville agissant sur le pied 1 et noté  $C_{exp}$ . Une instrumentation spécifique appelée « plate-forme de forces » permet d'évaluer l'évolution du couple au cours de la marche.

On donne ci-après la courbe du couple exercé selon l'axe  $(O, \vec{x})$  de la cheville  $C_{exp}$  en fonction de l'angle  $\theta$  pour une **marche normale** (Illustration 6). Les différentes phases du mouvement décrites dans l'annexe sont rappelées. L'aire contenue à l'intérieur de cette courbe fermée représente le travail  $W$  que doit fournir l'organisme pendant un cycle (avec  $C_{exp}$  en  $N \cdot m$  et  $\theta$  en rad). Pour une marche normale, cette aire correspond à une énergie estimée à 14 joules.

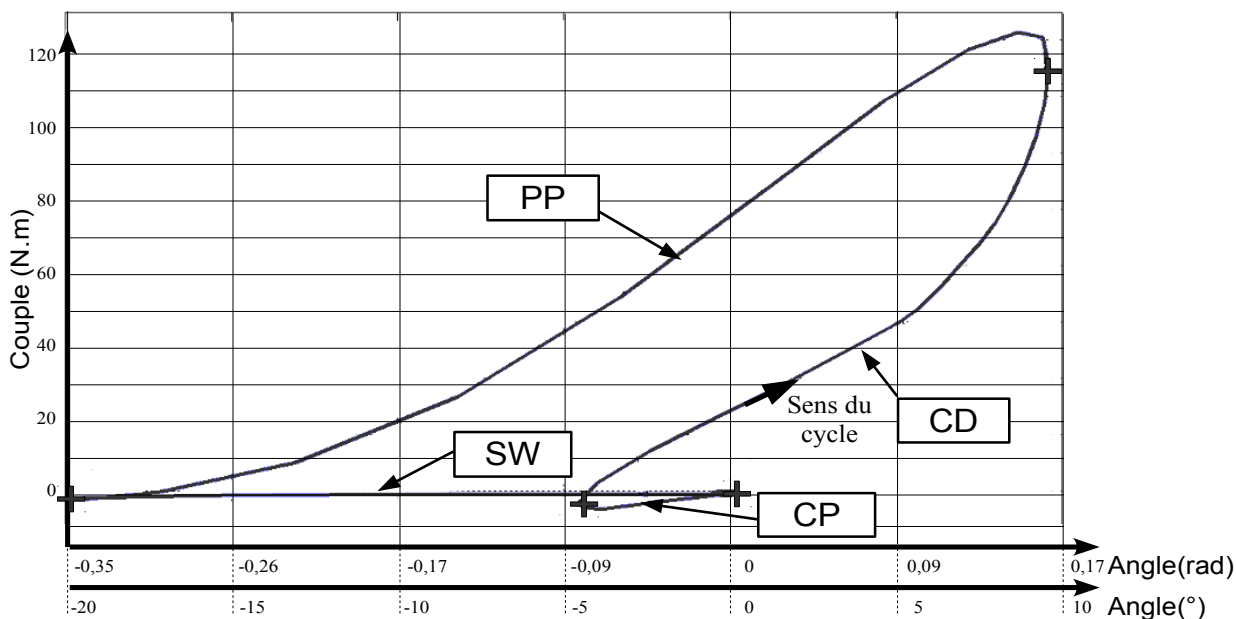


Illustration 6: Courbe expérimentale du couple en fonction de l'angle de la cheville pour une marche normale

## 2.2 Définition du cahier des charges

L'ensemble des courbes et analyses permet de définir le cahier des charges relatif à la fonction principale.

Fonction	Critères	Valeurs
Assurer un cycle de marche analogue à celui d'un sujet non amputé	Masse de la prothèse (correspond sensiblement à la masse d'un ensemble sain)	2,5 kg
	Hauteur maximale de la prothèse (proche de celle d'un ensemble sain)	32 cm
	Valeurs extrêmes de l'angle $\theta$	Flexion plantaire propulsive : $- 25^\circ$ Dorsiflexion : $15^\circ$
	Vitesse angulaire maximale $\left  \frac{d\theta}{dt} \right _{max}$	$5,2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$
	Couple maximal à fournir	$140 \text{ N} \cdot \text{m}$
	Travail maximal à fournir pour un cycle	20 J

Question 2. Vérifier que le cahier des charges ainsi spécifié est cohérent. Pour cela, relever et compléter sur le document-réponse les valeurs associées à certains critères pour une marche normale. Conclure vis-à-vis du respect du cahier des charges dans son ensemble.

### 3 Définition de la loi de consigne en couple

*L'objectif de cette partie est de définir la loi de consigne théorique que devra suivre la prothèse pour répondre à la fonction principale. Cette loi sera implantée dans le calculateur de la prothèse.*

Le comportement de la prothèse peut être schématisé par le bloc fonctionnel suivant (Illustration 7) :

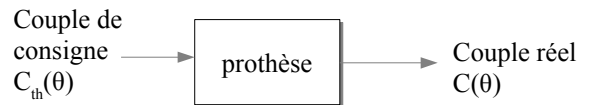


Illustration 7: Comportement global de la prothèse

L'hypothèse faite par les concepteurs est de considérer que la vérification exacte de la loi expérimentale  $C_{exp}(\theta)$  est moins importante que le respect de la valeur du travail à fournir  $W$ .

C'est pourquoi, le choix d'une loi de consigne théorique approchée est retenu. La courbe du document-réponse (question 3) compare la loi théorique  $C_{th}(\theta)$  à la loi relevée expérimentalement  $C_{exp}(\theta)$ .

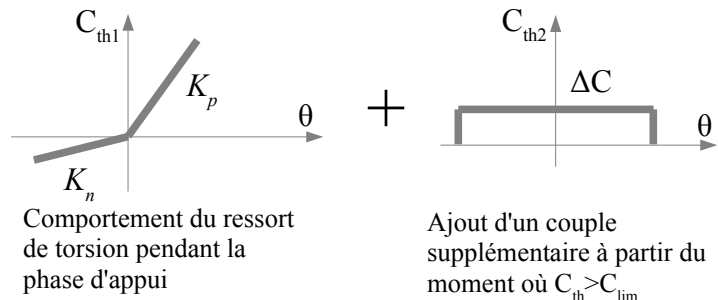


Illustration 8: Décomposition de la loi théorique

Cette loi théorique est obtenue à partir du comportement d'un ressort de torsion (Illustration 8,  $C_{th1}$ ) auquel on ajoute un couple  $\Delta C$  à partir du moment où le couple  $C_{th}$  dépasse une valeur  $C_{lim}$  jusqu'à ce que la phase d'oscillation commence (Illustration 8,  $C_{th2}$ ). Ainsi  $C_{th} = C_{th1} + C_{th2}$ . Les paramètres  $C_{lim}$ ,  $K_p$ ,  $K_n$ ,  $\Delta C$  seront choisis par l'utilisateur en fonction du ressenti lors de la marche.

*Question 3. A partir de la courbe du document-réponse (question 3), donner les valeurs numériques de  $K_n$ ,  $K_p$  (en  $N \cdot m \cdot rad^{-1}$ ),  $\Delta C$ ,  $C_{lim}$  (en  $N \cdot m$ ). Déterminer alors l'expression littérale du travail théorique  $W_{th}$  correspondant à l'aire de cette courbe fermée (avec  $\theta$  en rad) en fonction de  $C_{lim}$ ,  $K_p$ ,  $K_n$ ,  $\Delta C$  uniquement. En déduire la valeur numérique de  $W_{th}$  et conclure sur la pertinence de la loi retenue.*

L'objectif est donc de réaliser une prothèse active qui soit capable de suivre cette loi théorique.

### 4 Organisation structurelle de la prothèse active

*Pour élaborer la commande de la prothèse, il est indispensable d'appréhender l'organisation structurelle de la prothèse active. Cela constitue une étape préalable au travail de modélisation qui suivra.*

L'**annexe 2** fournit une description des chaînes d'énergie et d'informations.

*Question 4. Compléter le schéma du document-réponse (question 4) en précisant les fonctions, moyens et flux manquants.*

### 5 Gestion des modes de commande

*La commande du calculateur ne possède pas le même comportement lors des phases et sous-phases du cycle de marche. L'objectif de cette partie est de choisir le type d'asservissement à adopter par le calculateur en fonction de ces sous-phases. Les relations obtenues seront alors implantées dans le calculateur (niveau hiérarchique supérieur).*

On se référera à la description des phases et sous-phases de marche donnée en **annexe 1**.

Le mode de commande en orientation est classique et n'est utile que dans la phase oscillante (le pied n'est pas en contact avec le sol). On lui associe la variable logique  $Cor$  telle que  $Cor = 1$  lorsque le mode de commande en orientation est actif.

Le mode de commande en couple (pendant la phase d'appui) peut être décomposé en 3 modes différents :

- lorsque l'angle  $\theta$  est négatif, la pente souhaitée de la loi de consigne  $C_{th}(\theta)$  est égale à  $K_n$ . On appelle ce

mode « Mode C1 » et on lui associe la variable logique  $C_1$  telle que  $C_1=1$  lorsque ce mode est actif,

- lorsque l'angle  $\theta$  est positif, la pente souhaitée de la loi  $C_{th}(\theta)$  est égale à  $K_p$ . Ce mode est appelé « Mode C2 » et on lui associe la variable  $C_2$  telle que  $C_2=1$  lorsque ce mode est actif,
- lorsque le couple  $C_{th}$  est supérieur à  $C_{lim}$ , un couple  $\Delta C$  constant est ajouté à  $C_{th}$  et ce jusqu'à ce que le couple  $C_{th}$  devienne nul. On appelle ce mode « Mode C3 ».

Les capteurs capacitifs situés au niveau du talon fournissent une information binaire  $T_a$  telle que  $T_a=1$  lorsqu'ils touchent le sol. De même les capteurs situés au niveau de l'avant du pied fournissent une information binaire  $P$ , telle que  $P=1$  lorsqu'ils touchent le sol. On introduit la variable binaire  $[\theta < 0]$  qui est vraie lorsque  $\theta < 0$  (cette variable est fausse lorsque  $\theta \geq 0$ ).

*Question 5. Compléter à l'aide des indications précédentes, de la loi souhaitée et de la description d'un cycle, le chronogramme des variables binaires  $T_a$  et  $P$  (document-réponse question 5) à partir du moment où le talon touche le sol (début de la phase d'appui) jusqu'au cycle suivant (durée d'un cycle  $T_c$ ). En déduire les expressions logiques des variables  $C_1$ ,  $C_2$  et  $Cor$  en fonction de  $[\theta < 0]$ ,  $T_a$  et  $P$ . Vous utiliserez à bon escient les situations qui n'apparaissent pas dans le chronogramme.*

*Question 6. En se référant uniquement à la description du mode de commande C3 donnée précédemment, compléter le grafset en utilisant les variables proposées  $C_{th}$ ,  $C_{lim}$  et  $\Delta C$  (zones en pointillés du document-réponse, question 6) spécifiant ce mode de commande en respectant la syntaxe du grafset.*

## 6 Modélisation de la chaîne d'énergie

*La validation des performances dans les phases de commande en orientation d'une part et de commande en couple d'autre part nécessite la mise en place d'un modèle de chacun des constituants de la chaîne d'énergie (voir le schéma-bloc en annexe 3). L'objectif de cette partie est donc d'élaborer progressivement ce schéma-bloc en déterminant les fonctions de transfert.*

A partir de la structuration de la chaîne d'énergie, on retient le modèle décrit par le schéma-bloc donné en **annexe 3**. Le paramétrage de la prothèse est fourni en **annexe 5**.

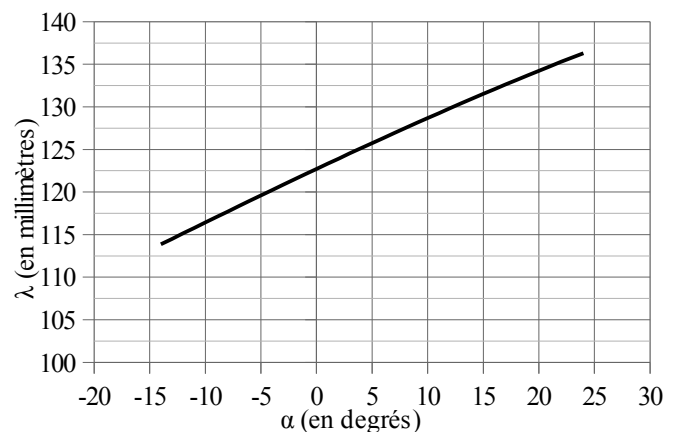
### 6.1 Modélisation de la chaîne de transmission

*L'objectif de cette partie est de valider l'aptitude du système à reproduire un mouvement du pied à la vitesse angulaire maximale de  $5,2 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  spécifiée dans le cahier des charges. Dans un premier temps, il s'agira de déterminer la relation entre la rotation du pied artificiel par rapport au tibia et la translation de la tige du vérin électrique. Dans un second temps, une analyse plus fine du fonctionnement du vérin électrique permettra de remonter à la vitesse angulaire du moteur.*

La vitesse angulaire maximale est atteinte durant la phase oscillante (le pied n'est plus en contact avec le sol). Durant cette phase, nous supposons que le pied et le basculeur ne possèdent pas de mouvement relatif. Rechercher une relation entre  $\theta$  et  $\lambda$ , revient donc à déterminer la relation entre  $\alpha$  et  $\lambda$  (voir annexe 5).

*Question 7. A partir du paramétrage de la prothèse fourni en annexe 5, exprimer  $\lambda$  en fonction de  $\alpha$  et de la géométrie. Proposer alors une relation simplifiée au regard du graphe (Illustration 9) correspondant à la relation théorique obtenue. En déduire la valeur numérique du gain  $K_G$  (en  $\text{mm}\cdot\text{rad}^{-1}$ )*

telle que 
$$\frac{d\lambda}{dt} = K_G \frac{d\alpha}{dt}.$$



*Illustration 9: Évolution de la longueur du vérin électrique en fonction de l'angle du basculeur*

Le vérin électrique est mis en mouvement par l'intermédiaire d'un moteur électrique à courant continu Maxon dont les caractéristiques sont données en **annexe 4**. Le mouvement de rotation du moteur est adapté par l'intermédiaire d'un système poulies-courroie suivi d'un système vis-écrou. On note  $\omega_M$  la vitesse angulaire du rotor du moteur par rapport au stator ( $3_2$ ) défini en **annexe 5**.

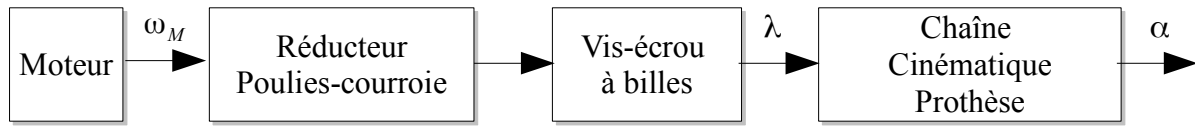


Illustration 10: Chaîne de transmission de mouvement

Le système vis-écrou est équipé d'une vis à billes de pas à droite  $p_v$  avec  $p_v = 3 \text{ mm} \cdot \text{tour}^{-1}$ . Le réducteur poulie-courroie possède un rapport de réduction  $k = \frac{1}{2,1}$ . On note  $R_T$  le rapport entre la vitesse angulaire du rotor du moteur  $\omega_M$  et la vitesse angulaire  $\frac{d\alpha}{dt}$  tel que  $\frac{d\alpha}{dt} = R_T \omega_M$ .

Question 8. En déduire les expressions littérales des blocs  $H_4(p)$  et  $H_5(p)$ . Déterminer la valeur numérique de  $R_T$ . Conclure sur l'aptitude du moteur à générer la vitesse maximale exigée.

## 6.2 Comportement dynamique de la prothèse

L'objectif de cette partie est d'établir les équations de comportement dynamique de la prothèse autour de la position de repos lors des phases d'appui et oscillante. Ces équations permettront de compléter le schéma-bloc de la chaîne d'énergie.

### Hypothèses et données :

- Seule l'inertie  $J_M$  du rotor du moteur suivant son axe de rotation est prise en compte,
- les quantités dynamiques des autres pièces ne sont pas prises en compte,
- la chaîne cinématique est caractérisée par la relation  $\frac{d\alpha}{dt} = R_T \omega_M$  (avec  $\omega_M$  la vitesse angulaire du rotor par rapport au tibia.  $\frac{d\beta}{dt}$  étant négligé, le stator  $3_2$  est considéré fixe par rapport au tibia),
- les liaisons sont supposées parfaites,
- attention, dans le cas général considéré ici, on prendra  $\frac{d\alpha}{dt} \neq \frac{d\theta}{dt}$ .

### Modélisation des actions mécaniques (voir annexe 5 également) :

- les actions mécaniques de la pesanteur sont négligées devant les autres actions mécaniques mises en jeu,
- le moteur génère un couple sur son axe tel que  $\vec{C}_{\text{Moteur} \rightarrow M} = C_M \vec{y}_3$ ,
- l'amortissement de l'ensemble du système est modélisé par un coefficient de frottement visqueux  $\mu_M$  exprimé sur l'axe moteur générant un couple :  $\vec{C}_{\text{amortisseur} \rightarrow M} = -\mu_M \omega_M \vec{y}_3$  avec  $\mu_M$  identifié expérimentalement (unité  $\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$ ),
- les ressorts exercent une action mécanique entre le pied 1 et le basculeur 2. Elle est modélisée par un glisseur  $\vec{F}_{\text{ressort} \rightarrow 2} = -\vec{F}_{\text{ressort} \rightarrow 1} = -F_{RS} \vec{n}_1$  au point S,
- un couple extérieur  $-C \vec{x}$  est appliqué sur le pied artificiel 1. En commande en couple, cette action mécanique  $C$  constitue la grandeur à asservir suivant la loi théorique  $C_{th}(\theta)$ .

### Définition du référentiel galiléen d'étude :

L'analyse du cycle de la marche a mis en évidence la présence de multiples phases aux mouvements variés du tibia et du pied. La mise en place d'un modèle dynamique de la prothèse impose la définition d'un référentiel galiléen qui, pour être au plus près du comportement réel, diffère suivant les phases d'étude. Il apparaît donc particulièrement complexe de définir une étude dynamique pour chacune de ces phases.

Afin d'identifier le comportement du système dans le cadre d'un réglage des paramètres de la commande, le modèle suivant est défini :

- le tibia est considéré comme fixe. Le référentiel associé est supposé galiléen,
- les mouvements de la prothèse sont étudiés par rapport au repère du tibia.

Ce modèle est proche du comportement réel. Dans plusieurs phases, le mouvement du tibia est nul ou assimilé à un mouvement de translation rectiligne uniforme. De plus, l'identification des paramètres de la modélisation retenue ainsi que la validation du comportement de la prothèse s'effectuent en premier lieu sur un montage d'essai où le tibia est fixe (voir partie suivante).

*Question 9. En isolant le pied 1 et en négligeant son inertie, déterminer une relation entre  $C$  et  $F_{RS}$ . Vous veillerez à expliciter clairement votre démarche (principe ou théorème, équation écrite, projection...).*

La raideur équivalente des ressorts est  $k_{RS} = 1200 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ . On ne s'intéresse dans la modélisation qu'aux variations de la prothèse autour de sa position de repos (cf. paramétrage autour de la position repos en **annexe 5**).

On note  $\Delta\chi$  la variation de longueur des ressorts. L'effort  $F_{RS}$  exercé par ces ressorts autour de la position repos est donné par la relation linéarisée suivante  $F_{RS} = k_{RS} \Delta\chi$ .

*Question 10. A partir de la relation obtenue à la question précédente, montrer qu'il est possible d'obtenir une relation linéarisée (à l'ordre 0) autour de la position repos sous la forme  $C = d_0 F_{RS}$  où  $d_0$  sera exprimé en fonction de  $b$ ,  $\alpha_R$  et  $\delta_R$ . Sachant que  $\Delta\chi = d_0(\Delta\alpha - \theta)$ , donner alors l'expression de la fonction de transfert  $H_7(p)$ .*

Par la suite, on prendra  $d_0 = 0,035 \text{ m}$ .

Afin de déterminer la relation de comportement dynamique, on isole l'ensemble de la prothèse en mouvement par rapport au tibia dont le référentiel associé est supposé galiléen.

*Question 11. Déterminer l'expression littérale de la puissance des inter-efforts générée par le ressort entre le pied artificiel 1 et le basculeur 2.*

*Question 12. Mettre en œuvre le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble de la prothèse en mouvement par rapport au tibia. En utilisant la relation de la chaîne cinématique, en déduire une relation faisant intervenir les paramètres de mouvement, leurs dérivées, ainsi que les paramètres caractéristiques du système et actions mécaniques définies dans l'énoncé.*

A partir des relations déterminées aux Question 9. et Question 12., il est alors possible de trouver l'équation différentielle linéarisée suivante qui caractérise le comportement dynamique de la prothèse :

$$J_M \frac{d^2 \Delta\alpha(t)}{dt^2} + \mu_M \frac{d \Delta\alpha(t)}{dt} = C_M(t) R_T - C(t) R_T^2 \text{ avec } R_T = \frac{1}{145}$$

Le moteur électrique est régi par les équations électriques et de couplage électromécanique :

$$u_M(t) = R i(t) + e(t) \text{ avec } i(t) \text{ courant moteur et } e(t) \text{ fcm}$$

$$e(t) = k_c \omega_M(t) \text{ avec } \omega_M \text{ vitesse angulaire du rotor du moteur par rapport au stator}$$

$$C_M(t) = k_c i(t)$$

Les constantes intervenant dans ces équations sont définies dans l'**annexe 4**.

*Question 13. A partir des équations caractérisant le système, déterminer les expressions littérales des fonctions de transfert  $H_1(p)$ ,  $H_2(p)$ ,  $H_3(p)$  et  $H_6(p)$ .*

### 6.3 Identification d'un modèle de comportement de la chaîne d'énergie

Le modèle de la chaîne d'énergie étant défini, on cherche maintenant à déterminer plus précisément les valeurs numériques des coefficients intervenant dans les fonctions de transfert de la chaîne d'énergie.

On procède pour cela à une identification fréquentielle du comportement de la prothèse. L'expérience consiste à bloquer le tibia ainsi que le pied et à envoyer une commande en tension sinusoïdale au moteur en faisant varier la fréquence du signal. Dans ces conditions, le basculeur se déplace et écrase le ressort. On peut alors relever le couple  $C$  au niveau de la cheville (Illustration 11). On obtient alors les diagrammes de Bode donnés dans le document-réponse (question 14). **Attention, l'abscisse est en hertz et le gain est normalisé**

$$G_{dB} = 20 \log \left( \frac{|H(p)|}{K_0} \right)$$

La courbe en tirets représente le modèle du second ordre déterminé précédemment s'approchant au mieux des courbes expérimentales.

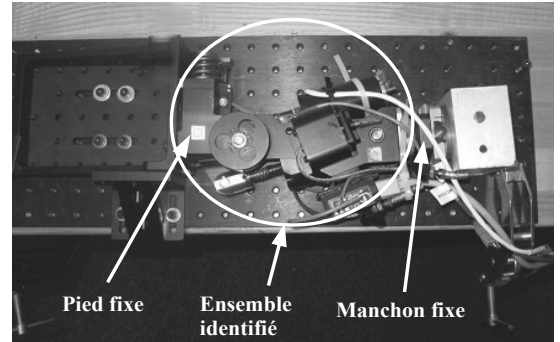


Illustration 11: Montage expérimental : pied et tibia (manchon) bloqués

*Question 14. Déterminer les valeurs numériques de la pulsation propre non amortie  $\omega_0$  et du coefficient d'amortissement  $\xi_0$  à partir de la représentation approchée (courbe en tirets), en détaillant succinctement la méthode utilisée. Les tracés seront faits sur le document-réponse.*

## 7 Contrôler le processus lors de la phase d'appui

La gestion des modes de commande permet de définir les séquences où l'asservissement s'effectue en position et celles où l'asservissement s'effectue en couple. L'objectif de cette partie est de définir l'asservissement en couple et d'analyser les performances de cet asservissement.

### 7.1 Mise en place de l'asservissement en couple

On se place pour analyser les performances de l'asservissement en couple dans le cadre de l'expérience d'identification décrite précédemment (pied et tibia bloqués).

L'asservissement en couple est réalisé grâce à un potentiomètre linéaire qui délivre une tension  $u_{mes}$  image de la variation de longueur des ressorts  $\Delta\chi$ . On note  $K_{capt}$  le gain de ce capteur. D'autre part, un bloc d'adaptation de gain  $K_A$  permet d'obtenir une tension  $u_{th}$  image du couple de consigne  $C_{th}$ . L'écart  $\varepsilon$  entre les tensions  $u_{th}$  et  $u_{mes}$  est corrigé par un correcteur de fonction de transfert  $H_c(p)$  qui délivre la tension  $u_M$  au moteur par l'intermédiaire de l'amplificateur de gain  $K_{amp}$ .

*Question 15. Compléter le schéma-bloc du document-réponse (question 15) afin de mettre en place l'asservissement en couple. Proposer une expression de  $K_A$  permettant de réaliser un asservissement correct.*

### 7.2 Analyse des performances de l'asservissement en couple.

Le schéma-bloc de l'asservissement en couple peut être simplifié

par le schéma-bloc suivant avec  $H(p) = \frac{a_0}{1 + a_1 p + a_2 p^2}$

où  $a_0 = 2,9 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{V}^{-1}$ ,  $a_1 = \frac{26}{4356} \text{ s}$  et  $a_2 = \frac{1}{4356} \text{ s}^2$  et  $H_{cor}(p) = H_c(p) K_{amp} K_A$

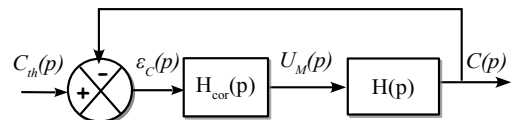


Illustration 12: Schéma-bloc de l'asservissement en couple simplifié

L'objectif est de déterminer une correction  $H_{cor}(p)$  qui permette de respecter le cahier des charges rappelé ci-après.



Critères	Valeur
Rapidité (temps de réponse à 5%)	$t_{r,5\%} < 0,1 \text{ s}$
Stabilité (marge de phase)	$M_{\varphi} = 45^{\circ}$
Précision pour une entrée en échelon (écart normalisé par la valeur de l'échelon)	10 % maxi

On choisit dans un premier temps une correction proportionnelle telle que  $H_{cor}(p) = K_{cor}$ .

*Question 16. Déterminer l'expression de l'écart statique pour une entrée en échelon unitaire. En déduire la valeur de  $K_{cor}$  notée  $K_{cor1}$  qui permette d'assurer le critère du cahier des charges.*

Les diagrammes de Bode de la fonction  $H(p)$  sont donnés dans le document-réponse (question 17).

*Question 17. Déterminer graphiquement la valeur du correcteur proportionnel, notée  $K_{cor2}$  pour assurer une marge de phase  $M_{\varphi} = 45^{\circ}$ . Conclure sur l'aptitude du correcteur à vérifier les critères de précision et stabilité.*

On retient finalement une correction telle que :  $H_{cor}(p) = K_p + K_d p \frac{\tau_d}{1 + \tau_d p}$  avec  $K_p = 4,3 \text{ V} \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $K_d = 20,6 \text{ V} \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$  et  $\tau_d = 0,0016 \text{ s}$

Les diagrammes de Bode de la Fonction de Transfert en Boucle Ouverte (FTBO) corrigée sont donnés sur le document-réponse (question 18). On réalise également une simulation pour une entrée en échelon de couple de  $50 \text{ N} \cdot \text{m}$ . La réponse indicielle du couple  $C$  ainsi que l'évolution de la tension de commande de la prothèse  $u_M$  au cours du temps sont alors représentées.

*Question 18. A l'aide des courbes du document-réponse (question 18), valider l'ensemble des critères du cahier des charges en justifiant clairement vos réponses. Indiquer pourquoi le modèle retenu n'est pas acceptable physiquement et proposer une amélioration simple du modèle permettant de pallier l'inconvénient repéré.*

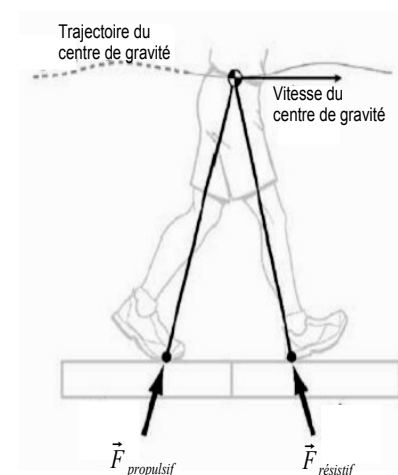
## 8 Validation clinique de la prothèse active

*Après validation, le mode de contrôle mis en place montre la capacité de la prothèse à fournir un travail donné pour un cycle de marche. Cependant, les apports de la prothèse active en comparaison avec une prothèse passive conventionnelle doivent être mesurés.*

Plusieurs expériences sont menées sur trois patients amputés d'un seul côté. Chaque expérience est réalisée sur une distance de 100 m à vitesse de déplacement choisie par le patient en utilisant sa prothèse conventionnelle ou la prothèse active. La dynamique de la marche est également analysée à l'aide d'appareils de mesure spécifiques (tapis de mesure de la marche, marqueurs rétro-réfléchissants ...).

Ces mesures permettent d'obtenir :

- la dépense énergétique notée  $E_m$  de chaque patient lors des déplacements (à partir des taux d'oxygène absorbé et de dioxyde de carbone rejeté). On définit alors le coût métabolique de transport (COT) comme le rapport  $\text{COT} = \frac{E_m}{M g V T}$  où  $M$  est la masse du participant,  $g$  l'accélération de la pesanteur,  $V$  la vitesse moyenne du patient et  $T$  la durée d'observation,



*Illustration 13: Représentation schématique des actions mécaniques de contact dans les phases de flexion plantaire amortie (phase résistive) et de flexion plantaire propulsive (phase propulsive).*

- le travail des actions du sol sur le patient (les valeurs correspondent à une moyenne sur les 3 patients ainsi que sur un grand nombre de cycles) en distinguant (Illustration 13) :
  - le travail résistif lorsque le pied entre en contact avec le sol. Conjointement à l'effort de contact entre le pied et le sol, ce travail fournit une image du choc encaissé par les articulations. Il devra a minima être compensé dans la phase propulsive,
  - le travail propulsif lorsque le pied quitte le sol.

	COT pour trois patients ( $J.N^{-1}.m^{-1}$ )			Moyenne du travail propulsif des actions du sol sur un cycle de marche (J)	Moyenne du travail résistif des actions du sol sur un cycle de marche (J)
	Sujet 1	Sujet 2	Sujet 3		
<b>Prothèse conventionnelle</b>	0,27	0,25	0,3	67	67
<b>Prothèse active</b>	0,23	0,2	0,27	70	53

Tableau 1: Relevés expérimentaux sur différents patients

Question 19. Analyser **quantitativement** (donner des pourcentages par rapport aux valeurs obtenues pour la prothèse conventionnelle) les performances de la prothèse active comparées à celles d'une prothèse conventionnelle à partir du tableau précédent. Évaluer l'apport moyen d'énergie de la prothèse active sur un cycle et commenter la valeur obtenue. Conclure vis-à-vis des effets cliniques sur le patient exposés dans la partie I « problématique technique ».

L'illustration suivante montre la prothèse commercialisée (modèle BIOM), évolution de la prothèse étudiée dans le sujet.



**Fin du sujet**

# Cycle de marche (Annexe 1)

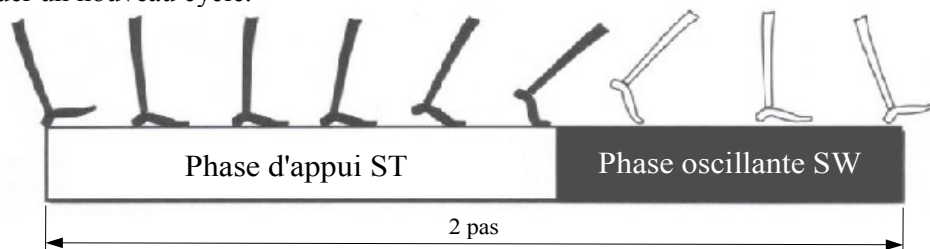
## 1 Phases principales

La marche est organisée en cycles de mouvements des membres inférieurs. Ces cycles sont reproductibles et symétriques. On ne s'intéresse dans cette étude qu'à la description du cycle de marche de l'ensemble transtibial en ligne droite à vitesse constante. On suppose que les membres supérieurs n'influencent pas la marche.

Le cycle de marche correspond spatialement à une enjambée ou à 2 pas. Par convention, le cycle de marche normale débute lorsque le talon d'un pied se pose et se termine lorsque ce même talon se pose à nouveau sur le sol en un endroit différent.

Le cycle comprend deux phases essentielles :

- la **phase d'appui (ST)** qui commence lorsque le talon touche le sol et se termine lorsque les orteils le quittent,
- et la **phase oscillante (SW)** pendant laquelle le pied ne touche pas le sol mais est déplacé pour effectuer un nouveau cycle.

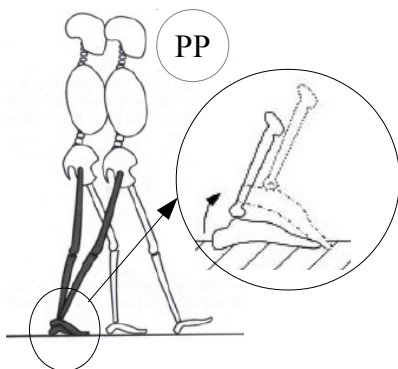
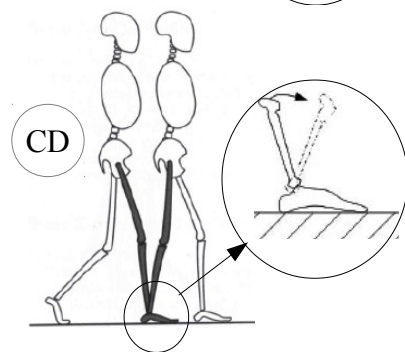
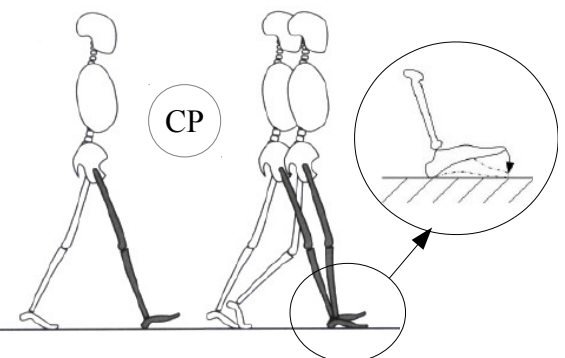


## 2 Sous-phases

Pour analyser plus finement la marche, on se place dans le plan médian qui sépare la moitié droite de la moitié gauche du corps (plan sagittal). En effet, la très grande majorité des mouvements se font dans des plans parallèles à ce plan sagittal, ce qui valide l'hypothèse d'une étude plane.

La phase d'appui est constituée de 3 sous-phases successives :

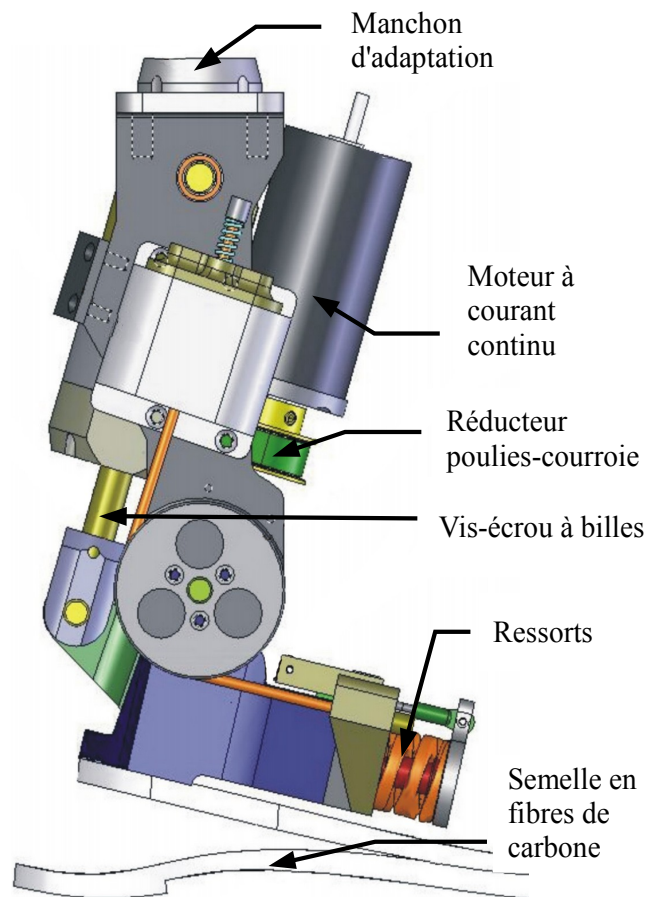
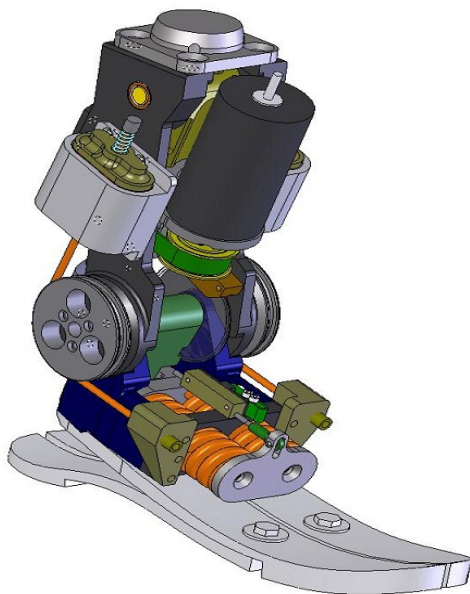
- **sous-phase « CP » (flexion plantaire amortie)** : elle débute lorsque le talon touche le sol et se termine lorsque les orteils touchent le sol (le pied est alors à plat sur le sol). C'est durant cette phase qu'intervient le transfert de charges d'une jambe à l'autre.
- **sous-phase « CD » (dorsiflexion ou flexion du pied contrôlée)** : durant cette phase, le tibia se repositionne vers l'avant de manière à pouvoir propulser le corps lors de la phase suivante.



- **Sous-phase « PP » (flexion plantaire propulsive)** : cette phase commence après la phase CD lorsque le talon commence à quitter le sol et se termine lorsque les orteils le quittent également. Pendant cette phase, l'énergie mécanique accumulée lors de la phase précédente est restituée. Cependant, pour les marches modérées à rapides, la propulsion nécessite un travail supplémentaire provenant des muscles. Ce travail noté  $W$  se caractérise physiquement par un essoufflement du marcheur lors d'une marche rapide.

## 1 Chaîne d'énergie

L'actionneur de la prothèse est un moteur à courant continu alimenté par une batterie rechargeable de 16 Volts. L'énergie mécanique est transmise par un réducteur de type poulies-courroie suivi d'un système vis-écrou qui adapte cette énergie mécanique pour la prothèse (ensemble de liaisons entre le pied artificiel constitué d'une semelle en fibres de carbone et le manchon ou tibia artificiel). Des ressorts permettent d'ajuster également l'énergie mécanique fournie au pied artificiel. L'effort exercé par les ressorts est directement relié au couple exercé par l'actionneur.



## 2 Chaîne d'informations

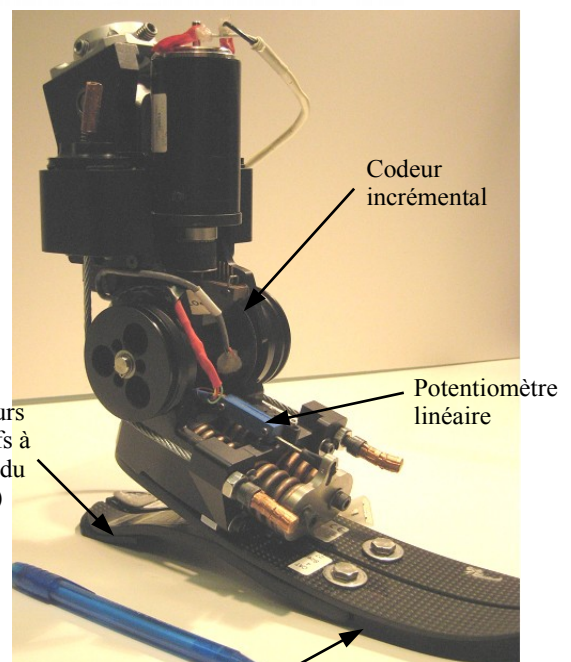
La chaîne d'informations est constituée d'un ensemble de capteurs permettant d'acquérir différentes informations :

- un potentiomètre linéaire qui mesure l'allongement/écrasement du ressort,
- un codeur incrémental placé au niveau de l'articulation pied/tibia,
- plusieurs capteurs capacitifs disposés sous la semelle du pied au niveau du talon  $T_a$  et à l'avant du pied  $P$ .

Les informations délivrées par les capteurs sont traitées par un ordinateur qui élabore la commande en tension du moteur,  $u_M$  appliquée par l'amplificateur.

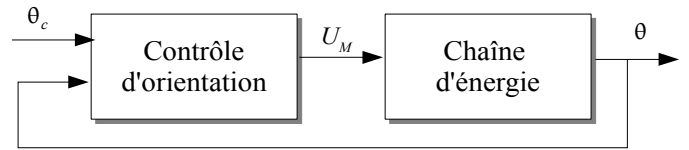
Cette commande est définie suivant deux modes hiérarchiques :

- le premier de niveau haut, définissant les modes de commande à adopter (choix du type d'asservissement)
- le deuxième de niveau bas, contrôlant le processus suivant l'asservissement défini.

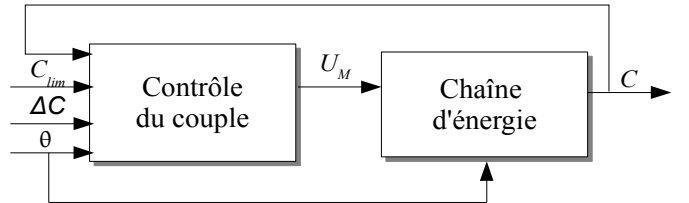


Pour obtenir la loi de consigne  $C_{th}(\theta)$  souhaitée, l'asservissement s'effectue en position ou en couple.

- Pendant la phase oscillante (le pied n'est plus en contact avec le sol), un asservissement de position est réalisé (contrôle d'orientation du pied).
- Pendant la phase d'appui, l'asservissement retenu doit permettre :
  - d'ajuster les pentes de la courbe  $C_{th}(\theta)$  en fonction du signe de  $\theta$
  - d'ajouter un couple  $\Delta C$  à partir du moment où le couple dépasse une valeur limite  $C_{lim}$  et ce jusqu'au moment où le pied n'est plus en contact avec le sol.



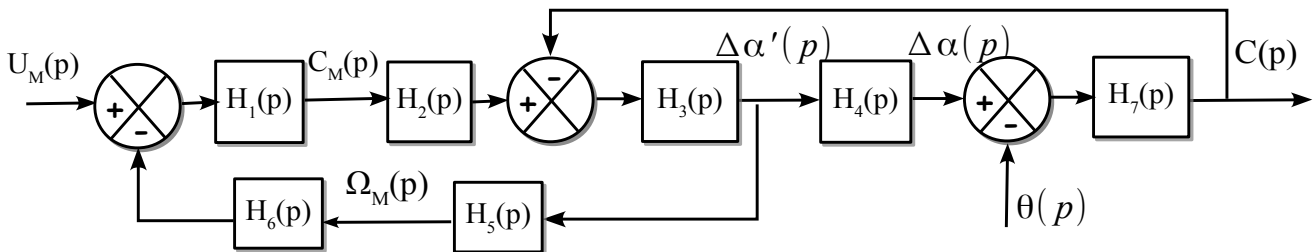
Mode de commande en orientation



Mode de commande en couple

On retient donc pour cette phase un pilotage en couple.

### Modélisation de la chaîne d'énergie (Annexe 3)



avec les grandeurs temporelles suivantes :

- $u_M$  tension d'alimentation du moteur (V)
- $C_M$  couple exercé par le moteur ( N·m )
- $\omega_M$  vitesse angulaire du moteur ( rad·s<sup>-1</sup> )
- $\alpha$  angle de rotation du basculeur (rad) tel que  $\alpha = \alpha_r + \Delta\alpha$  où  $\alpha_r$  est la position repos et  $\Delta\alpha$  est la variation angulaire autour de la position repos (voir annexe 5 ci-après). On a alors :  $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\Delta\alpha}{dt}$ . On note  $\Delta\alpha'(p)$  la transformée de Laplace de  $\frac{d\Delta\alpha}{dt}$
- $\theta$  angle de rotation du pied (rad) tel que  $\theta = 0$  rad pour la position repos
- $C$  couple exercé par le pied ( N·m ).

On note en majuscule, lorsque cela est possible, les variables associées aux grandeurs temporelles dans le domaine symbolique.

### Caractéristiques du moteur à courant continu (Annexe 4)

#### Moteur Maxon RE40

Tension maximale $u_{max}$ : 16 V	Résistance R : 1 Ω
Vitesse angulaire maximale sans charge $N_{max}$ : 7600 tr·min <sup>-1</sup>	Constante de couple $k_c$ : 0,02 N·m·A <sup>-1</sup>
Couple maximal (pic) $C_{max}$ : 2,5 N·m	Constante de f <sub>cem</sub> $k_e = k_c$ : 0,02 V·s
Courant sans charge : 0,07 A	Inertie du rotor $J_M$ : 1,34·10 <sup>-5</sup> kg·m <sup>2</sup>

## Paramétrage de la prothèse (Annexe 5)

- Le repère  $R_0(O, \vec{x}, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est lié au tibia noté 0 fixe dans toutes nos études. Ce repère est supposé galiléen (hypothèse justifiée dans le sujet).
- Le repère  $R_1(O, \vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est lié au pied artificiel noté 1, supposé indéformable. On note  $\theta(t) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$  l'angle de rotation du pied par rapport au tibia. D'autre part, le vecteur unitaire  $\vec{n}_1$  définit la direction des ressorts avec  $\delta = (\vec{y}_1, \vec{n}_1)$  considéré comme constant tout au long du cycle de marche.
- Le repère  $R_2(O, \vec{x}, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  est lié au basculeur noté 2. On note  $\alpha(t) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2) = (\vec{z}_0, \vec{z}_2)$  l'angle de rotation du basculeur par rapport au tibia.
- Le repère  $R_3(A, \vec{x}, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  est lié au vérin électrique 3. On note  $\beta(t) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3) = (\vec{z}_0, \vec{z}_3)$  l'angle de rotation du vérin électrique par rapport au tibia. Le vérin électrique comporte une tige notée  $3_1$  et un corps noté  $3_2$ .

On pose :  $\vec{OA} = a\vec{z}_0$ ,  $\vec{BA} = \lambda(t)\vec{y}_3$ ,  $\vec{BO} = b\vec{y}_2$ ,  $\vec{SO} = b\vec{z}_2$  avec  $b = 0,039$  m et  $a = 0,117$  m

En l'absence d'action sur la prothèse, une position repos est identifiée par les paramètres  $\theta_R$ ,  $\alpha_R$  et  $\delta_R$ . Cette position est notamment obtenue lorsque le tibia est vertical et que le pied est en appui horizontalement sur le sol. Les valeurs numériques sont alors :  $\theta_R = 0^\circ$ ,  $\alpha_R = 9^\circ$  et  $\delta_R = \delta = -17^\circ$ .

Afin de linéariser le comportement autour de la position repos, on écrira le cas échéant :

- $\alpha = \alpha_R + \Delta\alpha$
- $\theta = \theta_R + \Delta\theta = \Delta\theta$  avec  $\Delta\alpha$  et  $\Delta\theta$  les variations angulaires autour de la position repos.

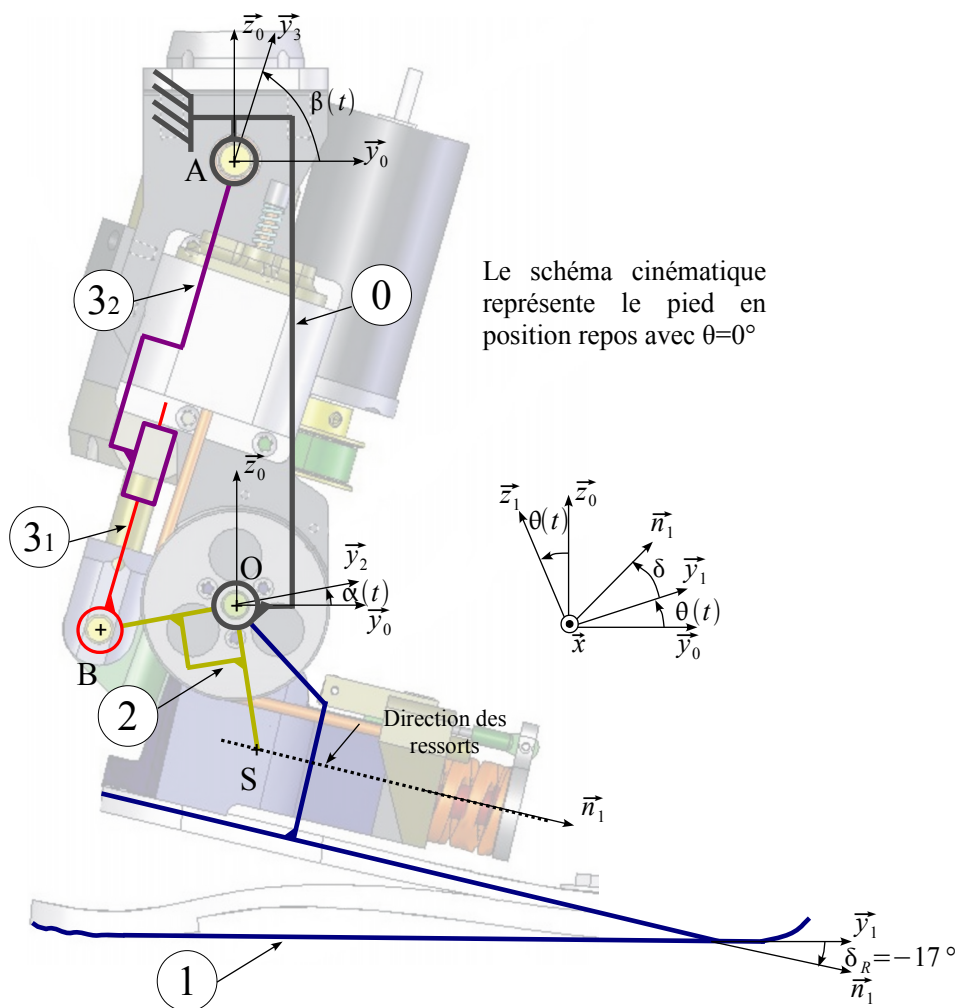
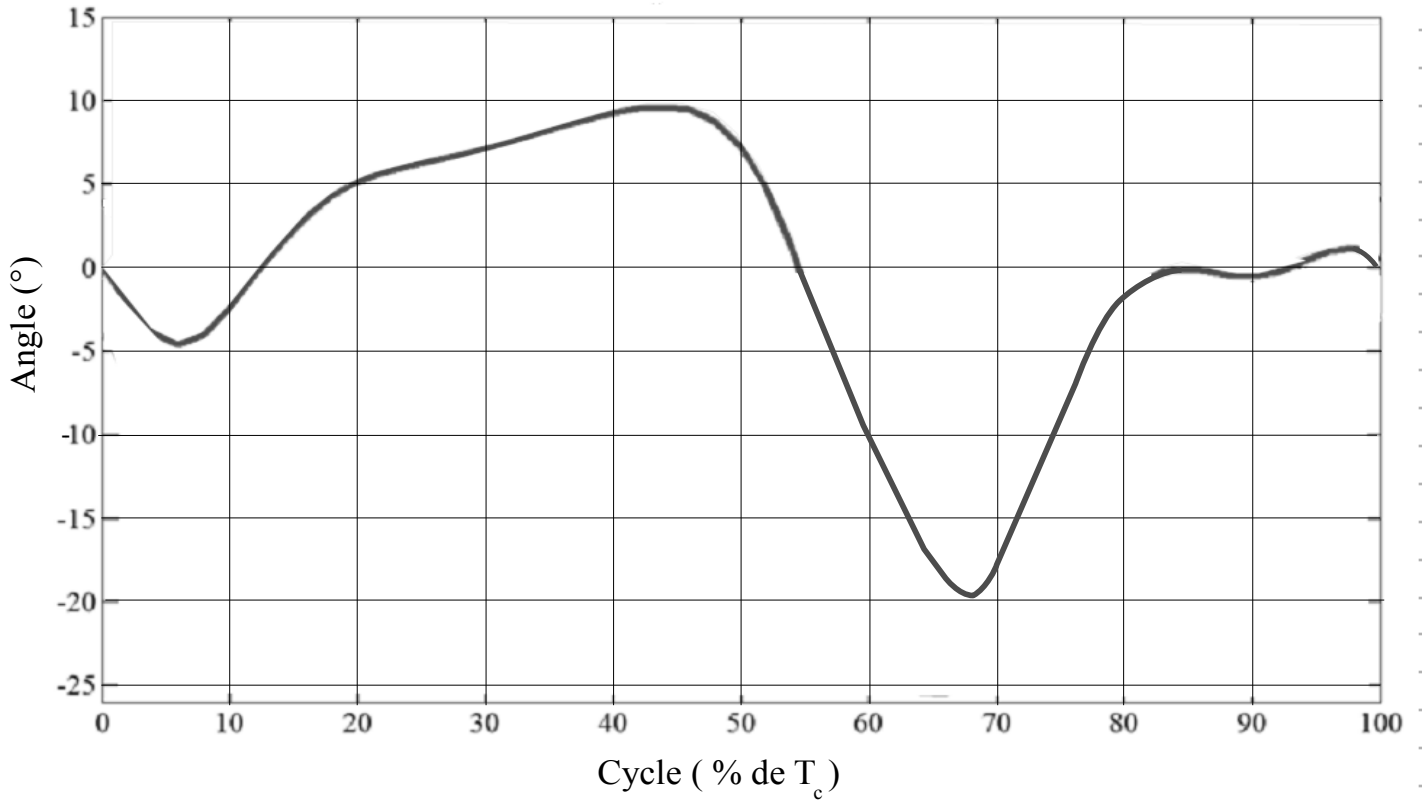


Schéma cinématique de la prothèse en position repos

# Analyse de l'ensemble transtibial lors de la marche

Question 1.



Détermination de  $\left| \frac{d\theta}{dt} \right|_{\max}$

$$\left| \frac{d\theta}{dt} \right|_{\max} =$$

## Définition du cahier des charges

Question 2.

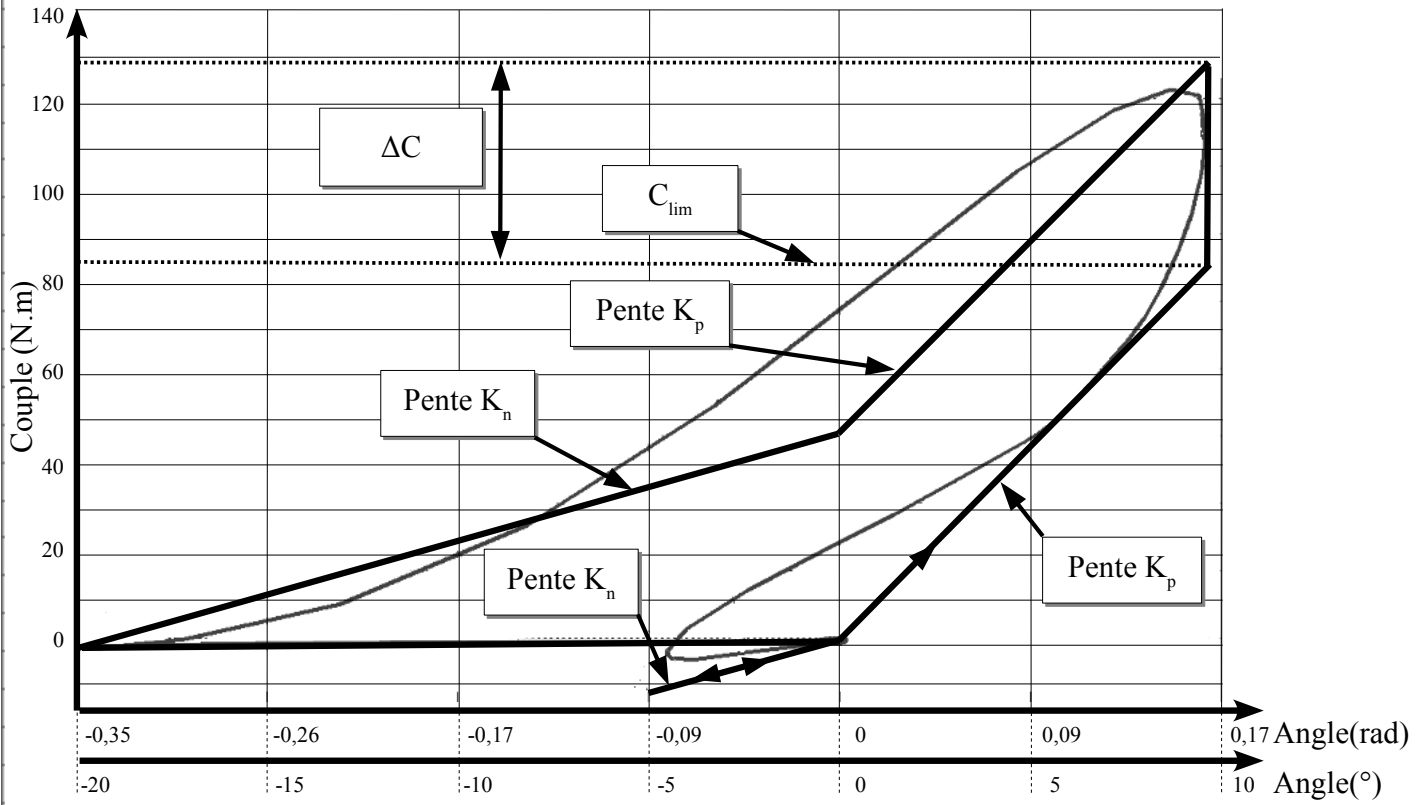
Critères	Valeurs du CDC	Valeurs relevées
Valeurs extrêmes de l'angle $\theta$	Flexion plantaire propulsive : $-25^\circ$ Dorsiflexion : $15^\circ$	
Vitesse angulaire maximale $\theta_{\max}$	$5,2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$	
Couple maximal à fournir	$140 \text{ N} \cdot \text{m}$	
Travail maximal à fournir	$20 \text{ J}$	

Conclusion :



## Définition de la loi de consigne

Question 3.



Comparaison des lois théorique et expérimentale pour une cadence normale

$K_n =$

$K_p =$

$C_{lim} =$

$\Delta C =$

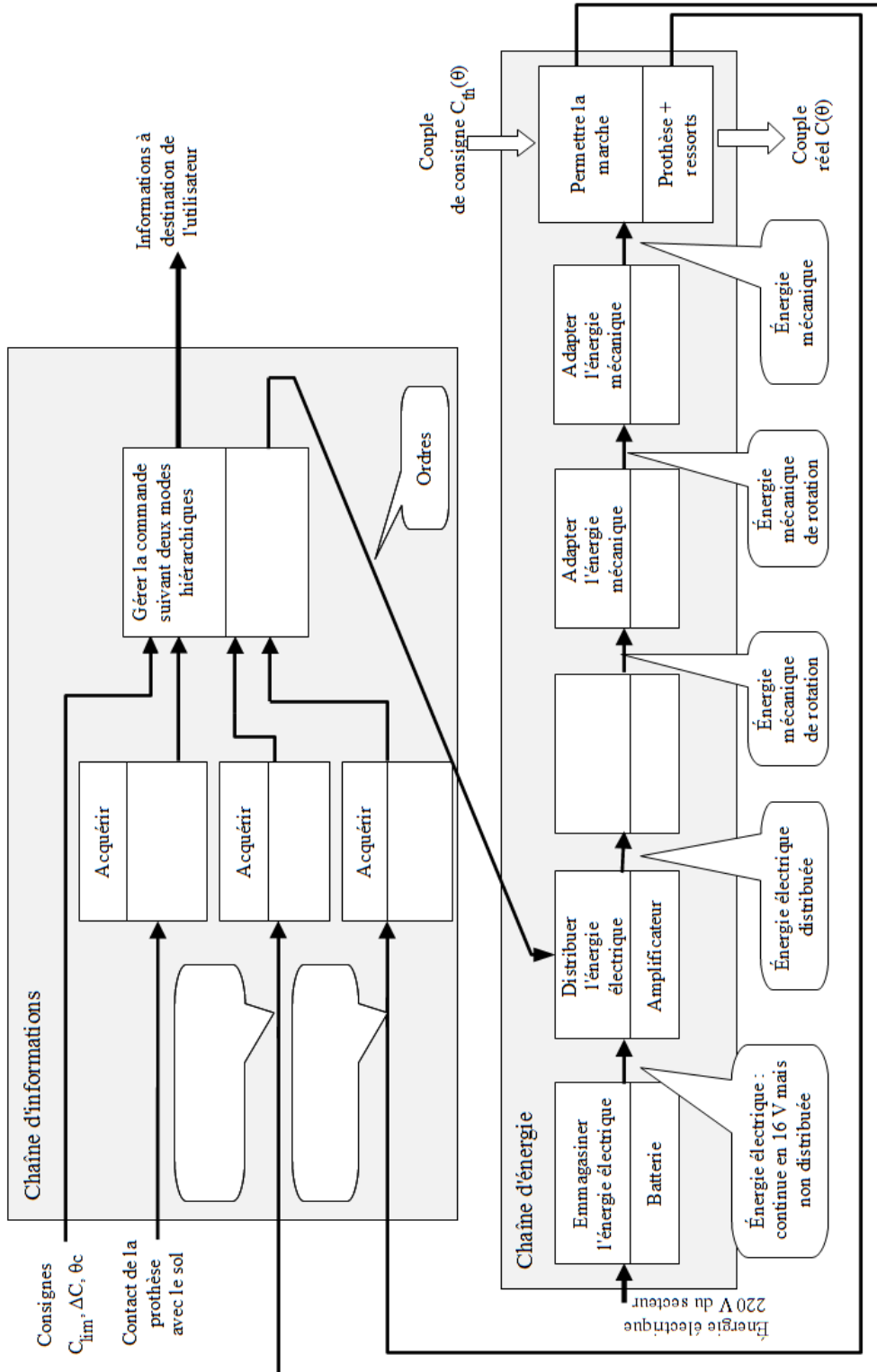
Expression littérale de  $W_{th} =$

A.N. :  $W_{th} =$

Conclusion :

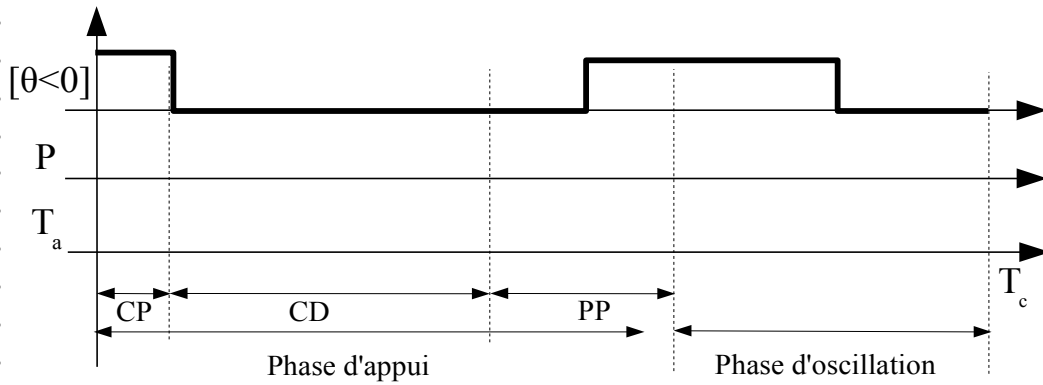
# Organisation structurelle de la prothèse

## Question 4.



## Gestion des modes de commande

Question 5.

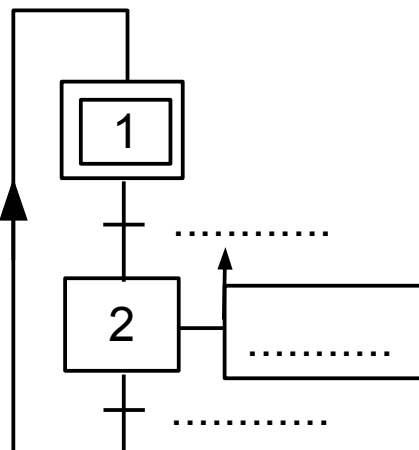


$C_1 =$

$C_2 =$

Cor =

Question 6.



## Modélisation de la chaîne de transmission

*Question 7.*

$K_G =$

*Question 8.*

$H_4(p) =$

$H_5(p) =$

A.N. :  $R_T =$

$$\left| \frac{d\alpha}{dt} \right|_{\max} = \left| \frac{d\theta}{dt} \right|_{\max} =$$

Conclusion :

## Comportement dynamique de la prothèse

*Question 9.*

*Question 10.*

$H_7(p) =$  \_\_\_\_\_

*Question 11.*

*Question 12.*

Question 13.

$H_1(p) =$

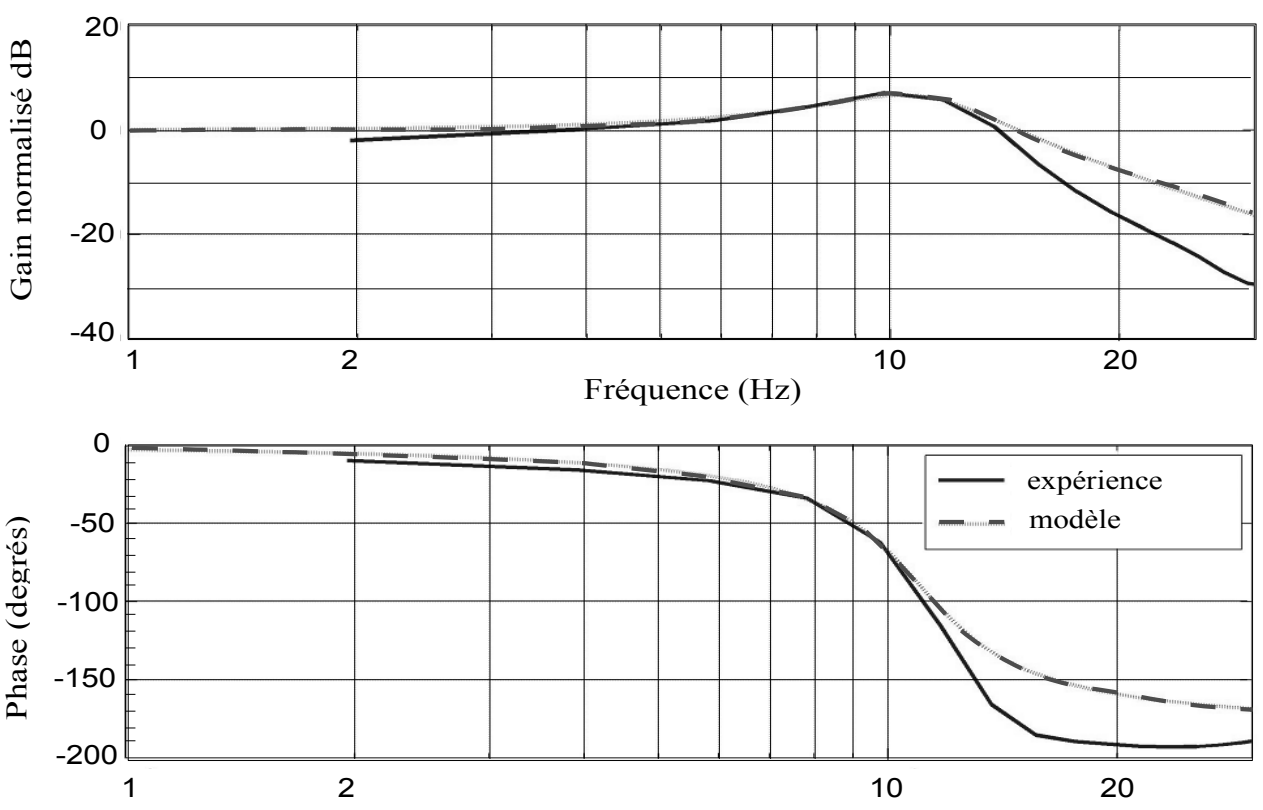
$H_2(p) =$

$H_3(p) =$

$H_6(p) =$

Identification d'un modèle de comportement de la chaîne d'énergie

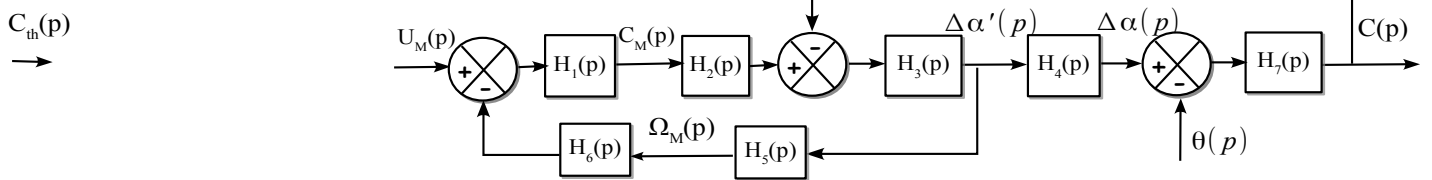
Question 14.





Mise en place de l'asservissement en couple

Question 15.

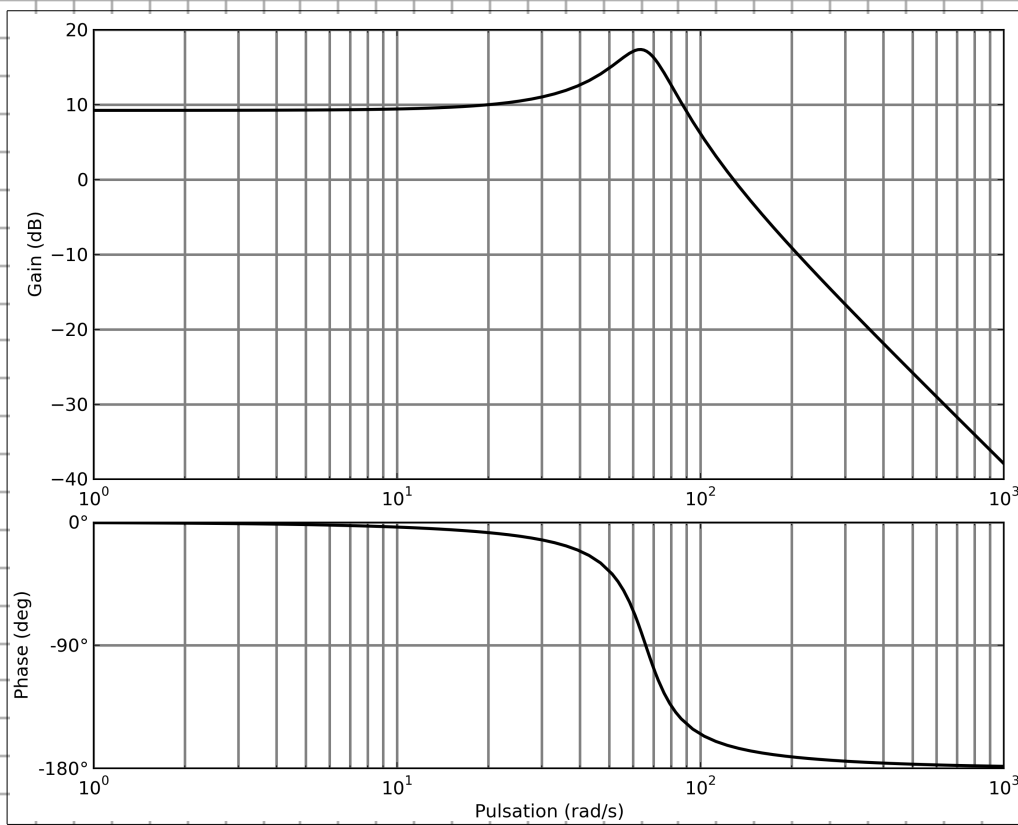


Expression du bloc d'adaptation  $K_A$

Analyse des performances de l'asservissement de couple

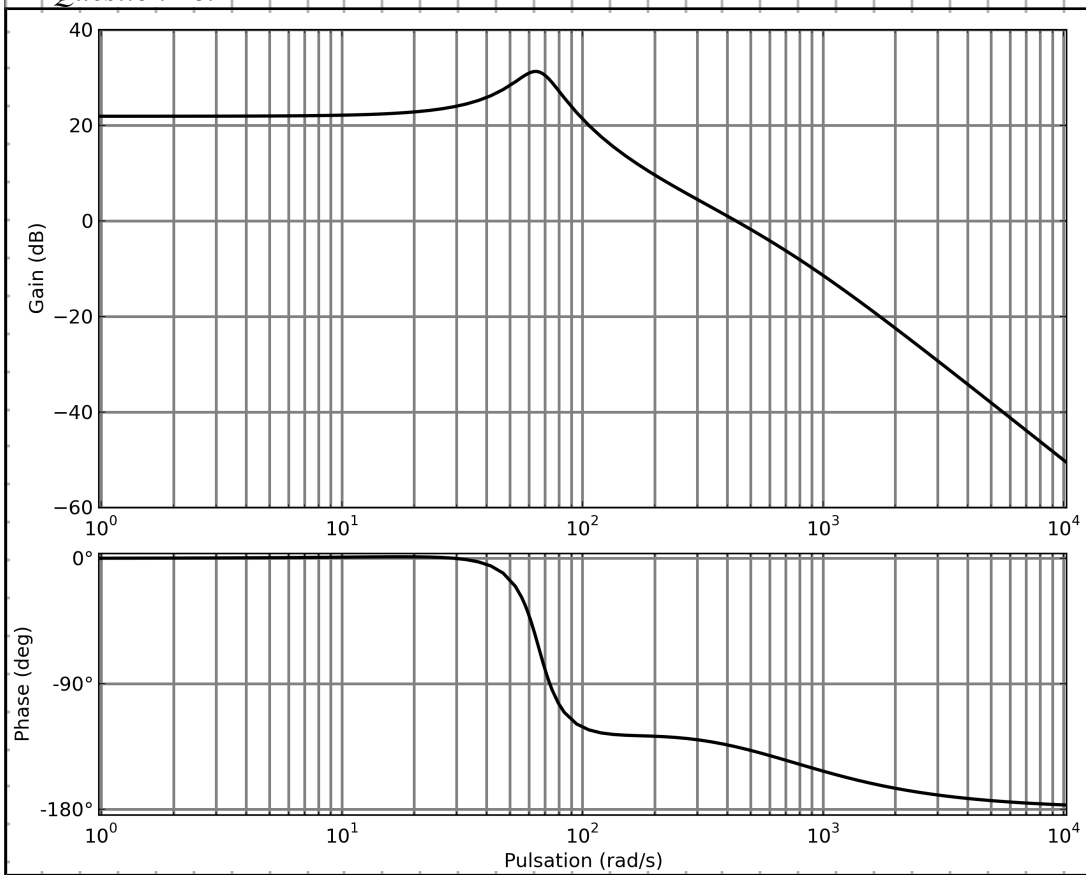
Question 16.

Question 17.

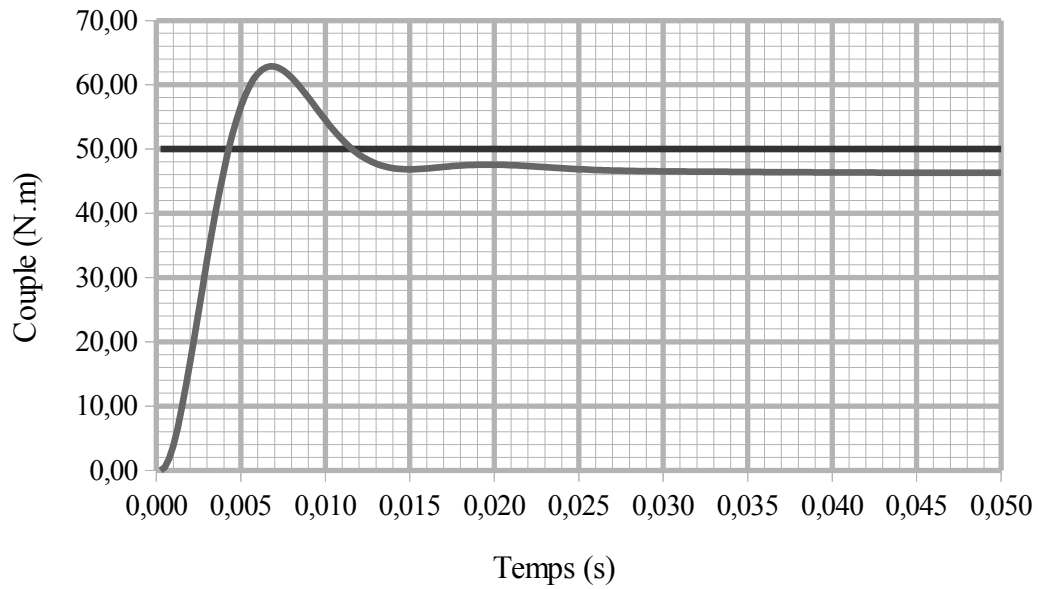


Question 18.

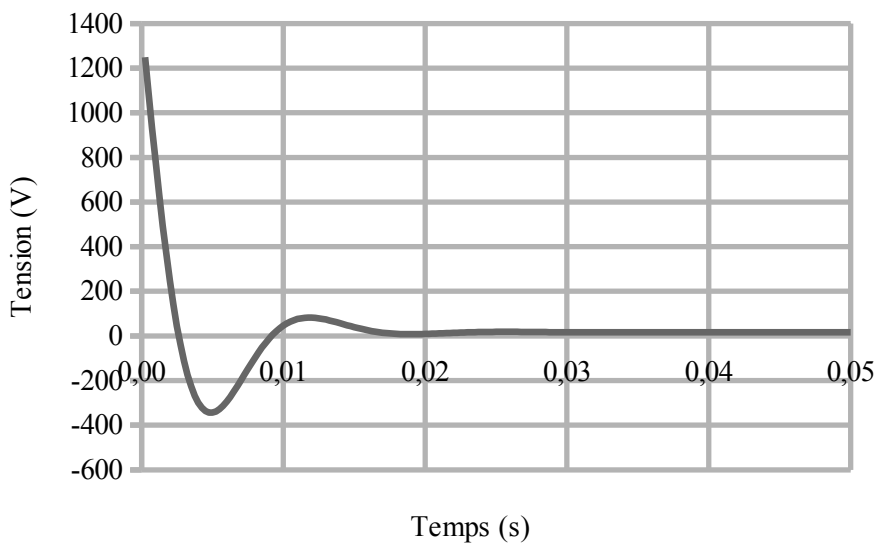
Diagramme de Bode de la FTBO



Réponse indicielle (Echelon de couple de 50 N.m)



Evolution de la tension de commande de la prothèse



Validation clinique de la prothèse active

*Question 19.*

