

# CONCOURS NATIONAL COMMUN D'ADMISSION AUX GRANDES ÉCOLES D'INGENIEURS MAROCAINES

**Session : 2000**

**Filières : M & M'**

**Épreuve : Sciences de l'Ingénieur**

**Durée : 4 heures**

*Ce sujet est la propriété du candidat et ne doit pas lui être repris, même partiellement, au cours de l'épreuve.*

## **Composition du sujet :**

Texte de sujet : pages de 1 à 9 (y compris cette page).

## **En annexe :**

Document 1 : *Schéma de la machine de découpage (page 10).*

Document 2 : *Schéma de la motorisation de l'axe Z et X (page 11).*

Document 3 : *Schémas des différentes solutions de la commande de l'axe Y (pages 12).*

Document 4 : *Schémas de la commande en position de l'axe X (page 13).*

Document-réponse : *Diagrammes de Bode (page 14).*

Annexe : *Abaque temps de réponse à 5% pour système second ordre (page 15).*

## **Aucun document supplémentaire n'est autorisé.**

On recommande de répartir le temps de travail de la façon suivante :

- Étude mécanique : 2 h 30 mn.
- Étude automatique : 1 h 30 mn.

En fin de l'épreuve, le candidat doit rendre :

- La copie d'examen soigneusement paginée.
- Le document-réponse.

Toute question, pour être prise en considération lors de la correction, devra être clairement identifiée par son numéro et son résultat devra être encadré.

*Les calculatrices de poche sont autorisées.*

## MACHINE DE DECOUPAGE LASER

### A - PRESENTATION :

Le laser est aujourd'hui utilisé dans l'industrie au travers de nombreuses applications : marquage, soudage, traitement thermique, découpage.

L'apparition de nouveaux matériaux ainsi que le progrès au niveau de l'informatique industrielle ont accéléré la recherche et le développement de cette technologie.

La machine étudiée ici (voir photo ci-contre) permet la réalisation par découpage laser d'éléments de carrosserie chez un constructeur de poids lourds. C'est un robot à cinq axes de découpe volumique commandés par six actionneurs. Son architecture est présentée sur le schéma figure 1a document 1.

Le faisceau laser est acheminé par l'intermédiaire de miroirs jusqu'à la buse où il est focalisé à l'aide de lentilles. Le refroidissement de la tête de coupe est réalisé par l'intermédiaire d'un circuit d'air.

La technologie de la découpe laser est très complexe et les paramètres de réglage de la machine sont nombreux :

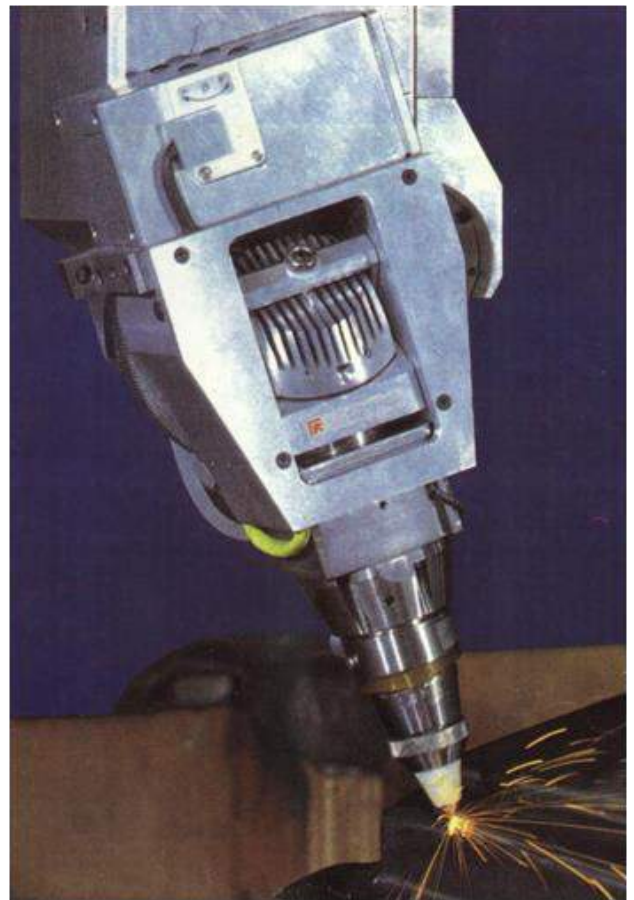
- Le faisceau doit être orienté suivant la normale au point considéré M de la surface de la pièce à découper.
- Le point de focalisation du faisceau laser doit coïncider avec le point de découpe visé de la pièce.

L'étude proposée dans ce sujet relève des contraintes citées ci-dessus.

On note  $S_0$  le bâti de la machine auquel est associé le repère galiléen  $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  avec  $\vec{z}_0$  vertical ascendant. On note  $\vec{g} = -g \vec{z}_0$  l'accélération de la pesanteur.

On donne ci-après les caractéristiques des différents constituants de la machine.

Les caractéristiques d'inertie données pour chaque solide tiennent compte des parties des actionneurs (servomoteurs, réducteurs) qui lui sont rigidement liées, on néglige la masse des autres parties des actionneurs.



**Solide  $S_1$**  : Chariot à déplacement longitudinal

- Repère lié  $R_1(O_1, \vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ . Le mouvement de  $S_1/S_0$  est une translation rectiligne de direction  $\vec{x}_0$ , commandée par un actionneur  $\mathcal{A}_{01}$ . La position de  $S_1$  par rapport à  $S_0$  est donnée par  $\overrightarrow{O_0O_1} \cdot \vec{x}_0 = x$ .
- La masse de  $S_1$  est notée  $m_1$ .

**Solide  $S_2$**  : Chariot à déplacement transversal (table porte pièce)

- Repère lié  $R_2(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z}_2)$ . Le mouvement de  $S_2/S_1$  est une translation rectiligne de direction  $\vec{y}_1$ , commandée par un actionneur  $\mathcal{A}_{12}$ . La position de  $S_2$  par rapport à  $S_1$  est donnée par  $\overrightarrow{O_1O_2} \cdot \vec{y}_1 = y$ .
- La pièce à découper (P) est liée complètement à la table. On note  $\vec{n}$  la normale à la surface de la pièce au point M.
- La masse de  $S_2$  plus celle de la pièce à découper est notée  $m_2$ .

**Solide  $S_3$**  : Chariot à déplacement vertical

- Repère lié  $R_3(O_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$ . Le mouvement de  $S_3/S_0$  est une translation rectiligne de direction  $\vec{z}_0$ , commandée par un actionneur  $\mathcal{A}_{03}$ . La position de  $S_3$  par rapport à  $S_0$  est donnée par  $\overrightarrow{O_0O_3} \cdot \vec{z}_0 = z$ .
- La masse de  $S_3$  est notée  $m_3$ .

**Solide  $S_4$**  : Première unité de rotation

- Repère lié  $R_4(O_4, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_0)$ . Le mouvement de  $S_4/S_3$  est une rotation de l'axe  $(O_4, \vec{z}_0)$ , commandée par un actionneur  $\mathcal{A}_{34}$  monté entre  $S_3$  et  $S_4$ . La position de  $S_4$  par rapport à  $S_3$  est donnée par  $(\vec{x}_3, \vec{x}_4) = (\vec{y}_3, \vec{y}_4) = \alpha$  et  $O_4$  confondu à  $O_3$ .
- La masse de  $S_4$  est notée  $m_4$  et son centre d'inertie  $G_4$  est défini par  $\overrightarrow{O_4G_4} = a\vec{x}_4 + b\vec{z}_0$  avec  $a$  et  $b$  constantes.
- L'opérateur d'inertie en  $O_4$  de  $S_4$  est connu par sa matrice associée donnée dans la base  $(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_0)$  :

$$J(O_4, S_4) = \begin{bmatrix} A_4 & 0 & -D_4 \\ 0 & B_4 & 0 \\ -D_4 & 0 & C_4 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_0)}$$

**Solide  $S_5$**  : Deuxième unité de rotation (buse dirigeant le faisceau).

- Repère lié  $R_5(G_5, \vec{x}_4, \vec{y}_5, \vec{z}_5)$ . Le mouvement de  $S_5/S_4$  est une rotation de l'axe  $(G_5, \vec{x}_4)$ , commandée par un actionneur  $\mathcal{A}_{45}$  monté entre  $S_4$  et  $S_5$ . La position de  $S_5$  par rapport à  $S_4$  est donnée par  $(\vec{y}_4, \vec{y}_5) = (\vec{z}_4, \vec{z}_5) = \beta$  et  $\overrightarrow{O_4G_5} = L_4\vec{x}_4$  ( $L_4$  constante).
- La masse de  $S_5$  est notée  $m_5$  et son centre d'inertie  $G_5$ .
- L'opérateur d'inertie en  $G_5$  de  $S_5$  est connu par sa matrice associée donnée dans la base  $(\vec{x}_4, \vec{y}_5, \vec{z}_5)$  :

$$J(G_5, S_5) = \begin{bmatrix} A_5 & 0 & 0 \\ 0 & B_5 & 0 \\ 0 & 0 & C_5 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_4, \vec{y}_5, \vec{z}_5)}$$

- Le point  $H$  étant le bout de la buse 5, on pose  $\overrightarrow{G_5 H} = -L_5 \vec{z}_5$ , avec  $L_5$  constante.

Toutes les liaisons entre les solides de la machine sont supposées sans frottement.  
Les efforts de coupe sont négligés devant les autres efforts mis en jeu.

## **B - MECANIQUE :**

### **I. ETUDE GEOMETRIQUE :**

Le faisceau laser est orienté suivant  $\vec{z}_5$  par la buse  $S_5$  de la machine,  $H$  en est son point de focalisation.

La normale à la pièce au point  $M$  considéré est notée  $\vec{n}$ .

On pose  $\overrightarrow{O_2 M} = x_M \vec{x}_0 + y_M \vec{y}_0 + z_M \vec{z}_0$  et  $\vec{n} = n_x \vec{x}_0 + n_y \vec{y}_0 + n_z \vec{z}_0$ .

Il s'agit de traduire ci-dessous, à partir des conditions de coupe, les fermetures géométriques.

- Question 1**  $\Rightarrow$  *Écrire la condition géométrique ( $\vec{n} = \vec{z}_5$ ) qui traduit la maîtrise de l'orientation du faisceau laser pendant la coupe, et donner ensuite en projection dans  $R_0$  les relations qui en découlent.*
- Question 2**  $\Rightarrow$  *Exprimer  $\alpha$  et  $\beta$  en fonction de  $n_x$ ,  $n_y$  et  $n_z$  (relations notées 1 et 2).*
- Question 3**  $\Rightarrow$  *Écrire la condition géométrique  $\overrightarrow{O_0 M} = \overrightarrow{O_0 H}$  qui traduit la coïncidence du point  $H$  de focalisation du faisceau avec le point  $M$  de découpe visé de la pièce, et donner ensuite en projection dans  $R_0$  les relations qui en découlent.*
- Question 4**  $\Rightarrow$  *Exprimer  $x$ ,  $y$  et  $z$  en fonction de  $x_M$ ,  $y_M$ ,  $z_M$ ,  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $L_4$  et  $L_5$  (relations notées 3, 4 et 5).*
- Question 5**  $\Rightarrow$  *À partir du système d'équations 1 à 5 précédentes, conclure sur les capacités de la machine à respecter les conditions de coupe citées en présentation.*
- Question 6**  $\Rightarrow$  *Vérifier ensuite que si l'on élimine une mobilité dans une liaison, l'on ne peut plus respecter les conditions de coupe quelque soit la position du point  $M$  dans l'espace et la normale associée.*

### **II. CINEMATIQUE :**

- Question 7**  $\Rightarrow$  *Donner l'expression de la vitesse de rotation du solide  $S_4$  dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$ ,  $\vec{\Omega}(S_4/R_0)$ .*
- Question 8**  $\Rightarrow$  *Donner l'expression de la vitesse de rotation du solide  $S_5$  dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$ ,  $\vec{\Omega}(S_5/R_0)$ .*
- Question 9**  $\Rightarrow$  *Donner l'expression de la vitesse de  $G_4$  appartenant à  $S_4$  dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$ ,  $\vec{V}(G_4 \in S_4/R_0)$ .*
- Question 10**  $\Rightarrow$  *Donner l'expression de la vitesse de  $G_5$  appartenant à  $S_5$  dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$ ,  $\vec{V}(G_5 \in S_5/R_0)$ .*

**Question 11**  $\Rightarrow$  Donner l'expression de l'accélération de  $G_5$  appartenant à  $S_4$  dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$ ,  $\vec{\Gamma}(G_5 \in S_5/R_0)$ .

**III. CINÉTIQUE :**

**Question 12**  $\Rightarrow$  Établir l'expression du moment cinétique du solide  $S_4$  au point  $O_4$  dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$ ,  $\vec{\sigma}(O_4, S_4/R_0)$ .

**Question 13**  $\Rightarrow$  Établir l'expression du moment cinétique du solide  $S_5$  au point  $G_5$  dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$ ,  $\vec{\sigma}(G_5, S_5/R_0)$ .

**IV. DYNAMIQUE :**

Les actions mécaniques de l'actionneur  $\mathcal{A}_{34}$  sont modélisées par le couple de moment  $C_{34}\vec{z}_0$ , celles de l'actionneur  $\mathcal{A}_{45}$  sur  $S_5$  par le couple de moment  $C_{45}\vec{x}_4$  et celles de l'actionneur  $\mathcal{A}_{03}$  sur  $S_3$  par le glisseur en  $O_0$  de résultante  $F_{03}\vec{z}_0$ .

Le choix des actionneurs  $\mathcal{A}_{34}$ ,  $\mathcal{A}_{45}$  et  $\mathcal{A}_{03}$  nécessite la connaissance de  $C_{34}$ ,  $C_{45}$  et  $F_{03}$ .

**Question 14**  $\Rightarrow$  À l'aide d'une analyse clairement explicitée, préciser les sous-systèmes à isoler et les équations issues des théorèmes de la dynamique à utiliser pour déterminer  $C_{34}$ ,  $C_{45}$  et  $F_{03}$ .

**Question 15**  $\Rightarrow$  En développant les équations précédentes, expliciter  $C_{34}$ ,  $C_{45}$  et  $F_{03}$ .

En fait l'actionneur  $\mathcal{A}_{03}$ , étant un moto-réducteur, n'agit pas directement sur le solide  $S_3$ , et son mouvement de sortie est plutôt une rotation et non une translation, mais à travers un système vis-écrou de pas  $q$  transformant la rotation en translation et le couple en effort (voir figure 2, document 2).

Les actions mécaniques de l'actionneur  $\mathcal{A}_{06}$  sur la vis  $S_6$  sont alors modélisées par le couple de moment  $C_{06}\vec{z}_0$ .

L'action de l'écrou (chariot Z) sur la vis  $S_6$  est de la forme :

$$\{\text{écrou} \rightarrow \text{vis}\}_B = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}\{S_3 \rightarrow S_6\} = Z_B \vec{z}_0 \\ \vec{M}(B, \{S_3 \rightarrow S_6\}) = N_B \vec{z}_0 \end{array} \right\}_B$$

Les actions de pesanteur exercées sur la vis  $S_6$  sont négligées devant les autres efforts.

On pose  $\vec{\Omega}(S_6/R_0) = \omega_6 \vec{z}_0$  : la vitesse de rotation de la vis  $S_6$  par rapport au bâti,  $I_6$  son moment d'inertie par rapport à son axe de rotation et  $m$  la masse embarquée par le solide  $S_3$ .

**Question 16**  $\Rightarrow$  Donner les relations liant  $\omega_6$  à  $z$  et  $N_B$  à  $Z_B$ .

**Question 17**  $\Rightarrow$  En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la vis  $S_6$ , déterminer l'expression de  $C_{06}$  en fonction de  $\omega_6$ ,  $I_6$  et  $N_B$ .

**Question 18**  $\Rightarrow$  Déduire alors l'expression donnant  $C_{06}$  en fonction de  $\omega_6$ ,  $I_6$  et  $Z_B$ .

**Question 19**  $\Rightarrow$  En faisant le lien entre  $Z_B$  et  $F_{03}$  explicitée dans la question 15, déduire l'expression de  $C_{06}$  en fonction du paramètre  $z$ .

**Question 11**  $\Rightarrow$  Donner, sans développer les calculs, une autre démarche pour déterminer  $C_{06}$ .

**V. ETUDE D'ISO-HYPERSTATICITE :**

Dans cette partie du sujet on s'intéressera à l'iso-hyperstaticité de la solution adoptée pour la motorisation des axes, X, Y et Z et les modifications à y apporter pour satisfaire le cahier de charges. Pour cela, on considérera la motorisation de l'axe Y, les autres axes lui sont similaires.

**1. Première solution :**

La première solution de base est celle modélisée et représentée sur la figure 4, document 3.

**Hypothèses :**

- Les solides sont supposés indéformables.
- Les liaisons sont supposées sans jeu.
- Les surfaces de contact sont supposées géométriquement parfaites.

Et on notera le torseur représentatif de l'action mécanique du solide i sur le solide j, de centre géométrique de liaison P, réduit au point M et écrit dans la base Bk :

$$\{F(i/j)\}_M = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(i/j) = X_p \vec{x}_k + Y_p \vec{y}_k + Z_p \vec{z}_k \\ \vec{M}(M, i/j) = L_p \vec{x}_k + M_p \vec{y}_k + N_p \vec{z}_k \end{array} \right\}_{Bk}$$

**Question 21**  $\Rightarrow$  *Pour cette solution donner sans calcul statique ou cinématique l'indice de mobilité et le degré d'hyperstatisme.*

**Question 22**  $\Rightarrow$  *Conduire une étude statique et recenser les composantes de l'action en B qu'il serait nécessaire d'annuler pour rendre le système isostatique.*

**2. Deuxième solution :**

Dans la version de base précédente on a rendu l'écrou flottant suivant la solution modélisée décrite sur la figure 5, document 3.

**Question 23**  $\Rightarrow$  *Cet aménagement a-t-il modifié l'iso-hyperstaticité de la solution de base, si oui quel est le nouveau degré d'hyperstatisme.*

**3. Troisième solution :**

La deuxième solution est certes meilleure du point de vue isostaticité, toutefois d'autres contraintes telles que le comportement en flambage de la vis obligent à opter pour la modification représentée sur la figure 6, document 3.

**Question 24**  $\Rightarrow$  *Donner le nom et les torseurs cinématique et des inter-efforts de la liaison  $\mathcal{L}_{vis/S_1}$ .*

**Question 25**  $\Rightarrow$  *Réévaluer le degré d'hyperstatisme de la troisième solution.*

**C - AUTOMATIQUE :****Étude de la commande en position des axes de la machine de découpe**

Les axes  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  dont l'entraînement est décrit sur le schéma de la figure 3, document 2, utilisent comme actionneurs des moteurs auto-synchrones (dits également 'moteurs sans balais'). Chacun des axes comporte une carte variateur alimentant le moteur (voir figure 7, document 4). La consigne de vitesse est fournie au variateur, sous forme d'une tension  $U_{cv}$  (tension de consigne vitesse), par une carte d'axe ; cette carte d'axe reçoit les signaux d'un codeur incrémental monté sur l'arbre du moteur. Une carte spécialisée assure la synchronisation des axes lors de la découpe.

Dans cette étude on se contentera de l'étude du seul axe  $X$  dans le cas d'un mouvement de la table porte-pièce dirigé selon l'axe  $\vec{x}$ .

**I. Étude mécanique de la chaîne cinématique de commande de l'axe X :**

Caractéristiques des constituants de la chaîne cinématique (voir figure 3, document 2) :

- Moteur : vitesse de rotation  $\omega_m(t)$ , moment d'inertie du rotor  $J_m$ .
- Réducteur : rapport de réduction  $r$ , moment d'inertie ramené à l'arbre d'entrée  $J_r$ .
- Vis : pas  $q$ , moment d'inertie de la vis par rapport à son axe de rotation  $J_v$ .
- Chariot  $X(S_1)$  : vitesse de translation  $v(t) = \dot{x}(t)$ , masse embarquée  $M$ .
- Toutes les liaisons sont sans frottement sauf la glissière  $\mathcal{A}(S_1/S_0)$  de coefficient de frottement  $f$ .

Les actions mécaniques du moteur sur la vis sont modélisées par le couple de moment  $C_m(t)\vec{x}_0$ .

On supposera le cas de mouvements de la table porte-pièce de direction  $\vec{x}$ , autrement dit le paramètre 'y' est supposé constant.

**Question 26**  $\Rightarrow$  Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble de la chaîne cinématique notée  $\Sigma$  (arbre moteur, réducteur, vis, chariot  $X$ , masse embarquée) et montrer qu'on peut l'écrire sous la forme :  $2T(\Sigma / R_0) = J_{eq} \cdot \omega_m^2$ , avec  $J_{eq}$  : moment d'inertie équivalent de  $\Sigma$  ramené au moteur qu'on demande d'explicitier.

**Question 27**  $\Rightarrow$  En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble  $\Sigma$ , montrer que :

$$J_{eq} \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m(t) - C_r(t),$$

$C_r(t)$  : couple résistant ramené au moteur qu'on demande d'explicitier.

**II. Modèle de la commande d'entraînement de l'axe X :**

Le modèle retenu pour décrire le comportement des entraînements numériques à moteurs auto-synchrones sera celui du moteur à courant continu à enroulement séparé (modèle suffisant pour une étude d'avant-projet).

Les équations électromagnétiques de ce type de moteur sont rappelées ci-dessous :

– Équation de commande :  $u(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + e(t)$  (1)

– Relation de couple :  $C_m(t) = K_t \cdot i(t)$  (2)

– Relation de la f.c.é.m. moteur :  $e(t) = K_e \cdot \omega_m(t)$  (3)

– Équation mécanique équivalente :  $J_{eq} \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m(t) - C_r(t)$  (4)

avec les notations suivantes :

$u(t)$ :	tension aux bornes du moteur	$i(t)$ :	intensité absorbée par le moteur
$\omega_m(t)$ :	vitesse de rotation du moteur (rd/s)	$e(t)$ :	f.c.é.m. du moteur
$\omega_r(t)$ :	vitesse à la sortie du réducteur (rd/s)	$v(t)$ :	vitesse linéaire du chariot X (en mm/s)
$x(t)$ :	position du chariot X / au bâti (en mm)	$x_c(t)$ :	consigne de position (en mm)
$C_m(t)$ :	couple moteur	$C_r(t)$ :	couple résistant sur l'arbre moteur
$R$ :	résistance de l'induit	$L$ :	inductance de l'induit
$K_e$ :	constante de la f.c.é.m.	$K_t$ :	constante de couple
$J_{eq}$ :	moment d'inertie équivalent, ramené au moteur, de l'ensemble de la chaîne cinématique de l'axe X (arbre moteur, réducteur, vis de transmission, chariot, masse embarquée).		

**Question 28**  $\Rightarrow$  En supposant les conditions initiales nulles, écrire les 4 équations précédentes dans le plan de Laplace.

**Question 29**  $\Rightarrow$  Donner la relation de transfert de la commande d'axe d'entraînement sous la forme :

$$\Omega_m(p) = A(p).U(p) - B(p).C_r(p)$$

**Question 30**  $\Rightarrow$  Mettre  $A(p)$  et  $B(p)$  sous leurs formes canoniques, et donner leurs ordres, leurs classes et leurs caractéristiques (gains statiques  $K_1$  et  $K_2$ ; pulsation propre  $\omega_m$  et facteur d'amortissement  $z$ ).

**Question 31**  $\Rightarrow$  Montrer, en faisant une hypothèse que l'on indiquera clairement, qu'il est possible de mettre  $A(p)$  sous la forme :

$$A(p) = \frac{K_1}{1 + \tau_m p}$$

avec  $\tau_m$  : constante de temps mécanique.

**Application numérique :**

$$R = 1\Omega, \quad L = 0.1mH, \quad k_e = K_t = 0.1 (SI), \quad J_{eq} = 5.10^{-4}Kg.m^2, \quad q = 3mm/rd, \\ f = 0.05, \quad g = 10m/s^2, \quad r = 15.$$

**Question 32**  $\Rightarrow$  – Déterminer  $K_1$ ,  $\omega_n$ ,  $z$  et  $\tau_m$ .  
– Dites si l'hypothèse faite dans la question 31 est réaliste.

Dans la suite de l'épreuve on prendra  $A(p)$  sous sa forme de la question 31.

Le schéma fonctionnel de l'asservissement en position de l'axe X supposé à retour unitaire est représenté sur la figure 9, document 4.

**Question 33**  $\Rightarrow$  Identifier les transmittances  $D(p)$ ,  $E(p)$  et  $I(p)$ .

Dans la suite on prendra le correcteur comme étant proportionnel de gain  $K_v$  ( $C(p) = K_v$ ).



**Question 34**  $\Rightarrow$  Indiquer et justifier, sans faire de calcul, si cet asservissement est précis :

- Vis-à-vis de la consigne  $X_c(p)$ .
- Vis-à-vis de la perturbation  $C_r(p)$ .

**Question 35**  $\Rightarrow$  Indiquer et justifier, sans faire de calcul, si l'asservissement de l'axe X est stable.

Dans la suite de l'épreuve on considérera  $C_r(t) = 0$ .

**Question 36**  $\Rightarrow$  Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  de l'asservissement sous forme littérale et numérique (qu'on mettra sous forme canonique).

**Question 37**  $\Rightarrow$  Sur le document-réponse (page 14), tracer les diagrammes de Bode (gain et phase) de  $G(p)$  pour  $K_v=1$ , on y précisera clairement les différentes caractéristiques et on prendra pour échelle :  $1\text{ cm} \rightarrow 10\text{ db}$  et  $1\text{ cm} \rightarrow 45^\circ$ .

**Question 38**  $\Rightarrow$  Donner les marges de gain  $M_G$  et de phase  $M_\Phi$  de cet asservissement.

**Question 39**  $\Rightarrow$  Déterminer la valeur du gain  $K_v$  du correcteur, qu'on notera  $K_{vs}$ , pour respecter la marge de phase requise pour ce type d'asservissement et qui est de l'ordre  $M_\Phi = 50^\circ$ .

**Question 40**  $\Rightarrow$  Déterminer la valeur du gain  $K_v$  du correcteur, qu'on notera  $K_{ve}$ , pour limiter l'erreur de traînage à 5% de la pente de la rampe d'entrée  $V_0$  et (on rappelle que l'erreur de traînage est la limite à l'infini de l'écart  $\varepsilon(t)$  pour une consigne de rampe  $X_c(t) = V_0(t)$ ).

**Question 41**  $\Rightarrow$  Déterminer la valeur du gain  $K_v$  du correcteur, qu'on notera  $K_{vr}$ , pour obtenir un temps de réponse à 5% minimum et (exploiter l'abaque de l'annexe page 15).

Dans ce type de machine (et d'usinage en général) l'asservissement des axes ne doit pas présenter de dépassement, en effet dans le cas contraire, la réponse présente un régime oscillant, ce qui entraînerait lors de la découpe une erreur de dimension due à l'asservissement. Il est donc nécessaire que l'amortissement soit suffisant pour supprimer tout comportement oscillant.

**Question 42**  $\Rightarrow$  Rappeler, alors, la condition de non dépassement sur une entrée en échelon pour un système de second ordre et en déduire une limitation du gain  $K_v$  qu'on notera  $K_{vd}$ .

**Question 43**  $\Rightarrow$  Justifier que cela conduit aussi à une limitation de la pulsation propre, donc de la rapidité.

**Question 44**  $\Rightarrow$  De ce qui précède, indiquer les performances de l'asservissement qui s'améliorent avec l'augmentation de  $K_v$  et celles qui s'en détériorent.

On voit bien qu'on ne peut pas satisfaire aux exigences de stabilité, de rapidité et de précision avec un correcteur proportionnel (chose mentionnée dans le jargon d'automaticiens sous le titre 'dilemme stabilité-précision').

**Question 45**  $\Rightarrow$  Quel autre type de correcteur proposez-vous pour contourner ce problème ? Commentez.

On prendra dorénavant  $K_v = 2,5$  et  $X_c(t) = 50\text{ mm}$

**Question 46**  $\Rightarrow$  Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée  $H(p)$  de l'asservissement, en déduire celle de  $X(p)$  littéralement et numériquement.

**Question 47**  $\Rightarrow$  Donner, ensuite, la réponse indicielle  $x(t)$ , (faire usage de l'annexe page 15).

**Question 48**  $\Rightarrow$  Tracer l'allure de la réponse indicielle  $x(t)$  en y précisant les différentes caractéristiques remarquables.

Document 1

Schéma de l'ensemble de la machine de découpage LASER

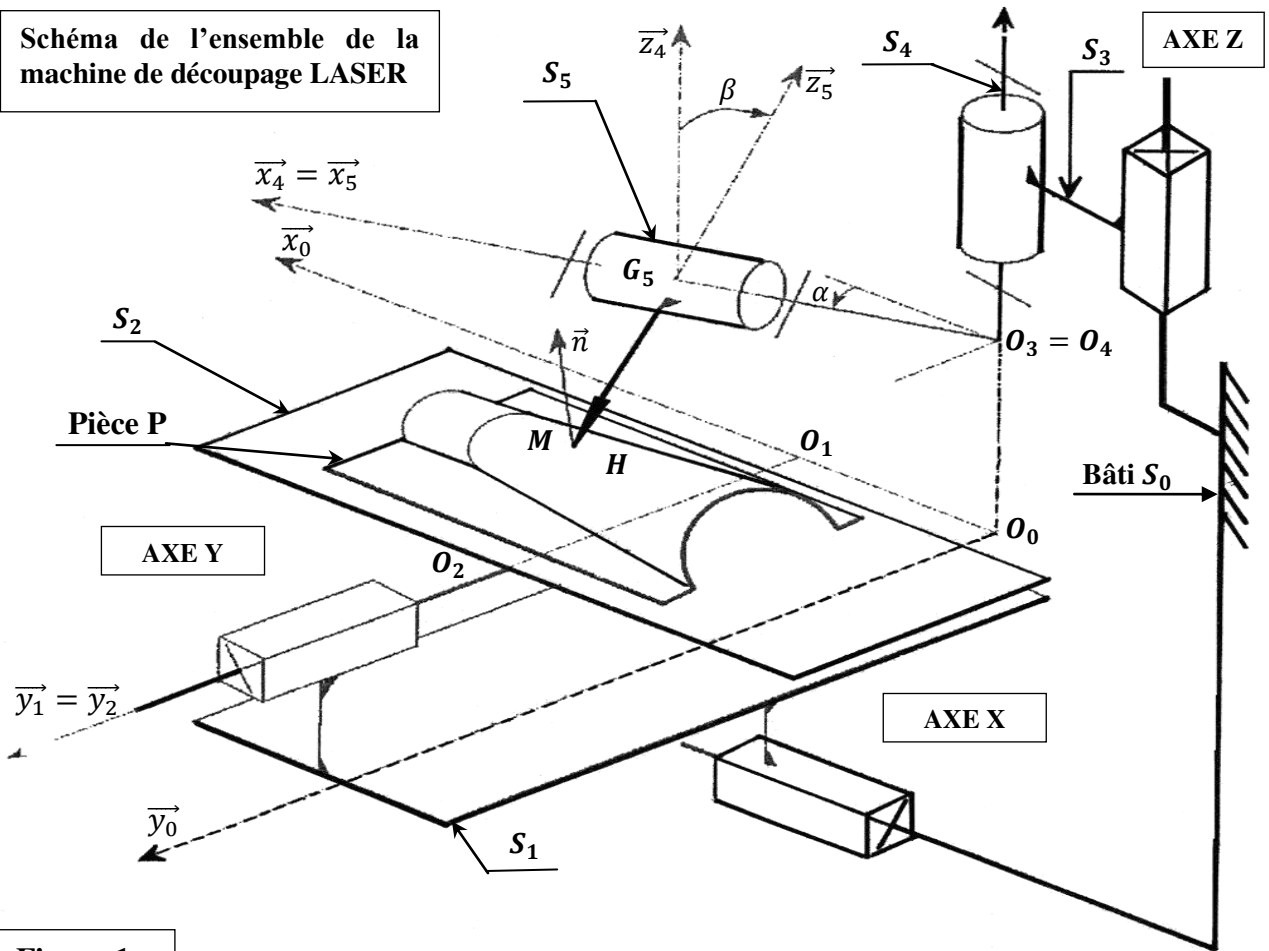
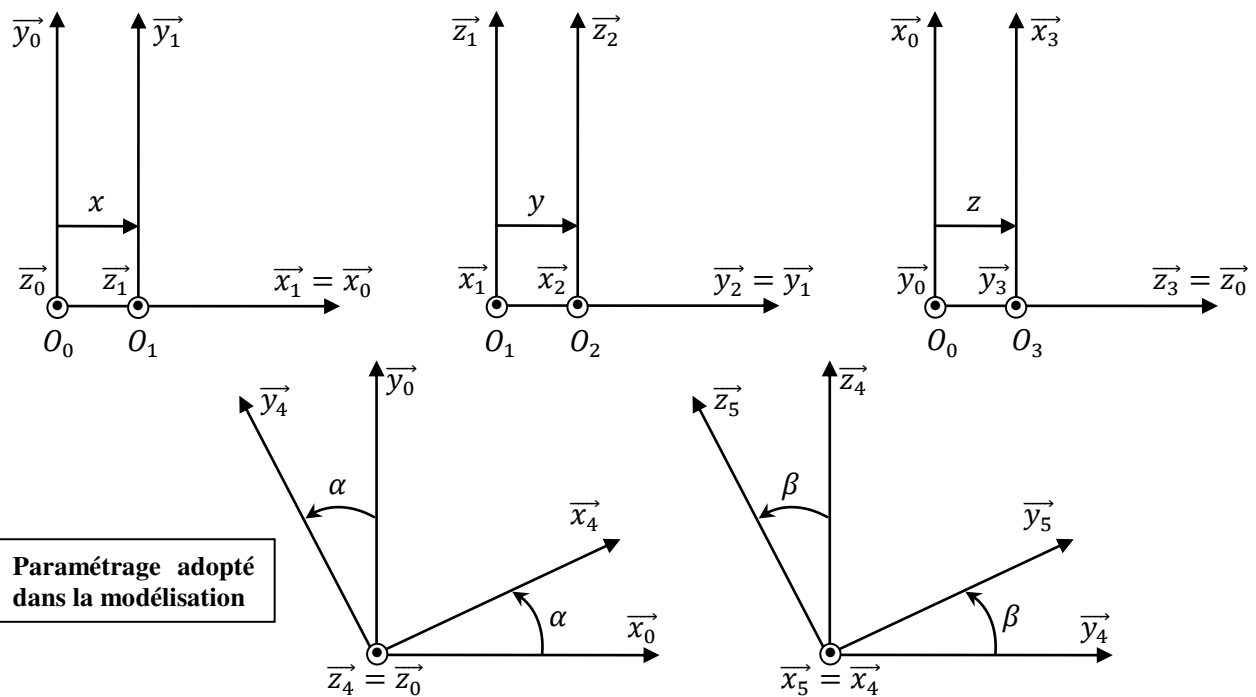


Figure 1a



Paramétrage adopté dans la modélisation

Figure 1b

Document 2

**Données :**

- En A, liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_0)$  entre la vis  $(S_6)$  et  $(S_0)$ .
- En B, liaison hélicoïdale d'axe  $(B, \vec{z}_0)$  de pas  $q$  entre la vis  $(S_6)$  et le chariot.
- En C, liaison glissière d'axe  $\vec{z}_0$  entre le chariot et  $S_0$  paramétrée par la grandeur  $z$ .
- Les actions mécaniques de l'actionneur  $A_{06}$  sur la vis  $S_6$  sont modélisées par le couple  $C_{06}\vec{z}_0$ .
- L'action de l'écrou (chariot Z) sur la vis est de la forme :

$$\{\text{écrou} \rightarrow \text{vis}\}_B = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}\{S_3 \rightarrow S_6\} = Z_B \vec{z}_0 \\ \vec{M}(B, \{S_3 \rightarrow S_6\}) = N_B \vec{z}_0 \end{array} \right\}_B$$

- Les actions de pesanteur exercées sur la vis  $S_6$  sont négligées devant les autres efforts.
- On pose  $\vec{\Omega}(S_6/R_0) = \omega_6 \vec{z}_0$  : la vitesse de rotation de la vis  $S_6$  par rapport au bâti,  $I_6$  son moment d'inertie par rapport à son axe de rotation et  $m$  la masse embarquée par le solide  $S_3$ .

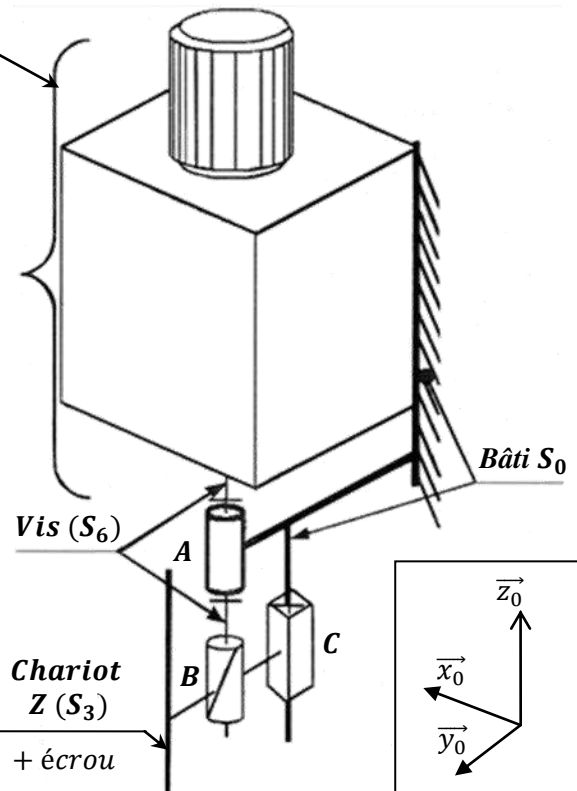


Figure 2

Chaîne cinématique de commande de l'axe Z ( $S_3$ )

**Caractéristiques des constituants de la chaîne cinématique :**

- Moteur : vitesse de rotation  $\omega_m(t)$ , moment d'inertie du rotor  $J_m$ .
- Réducteur : rapport de réduction  $r (r > 1)$ , moment d'inertie ramené à l'arbre d'entrée  $J_r$ .
- Vis : pas  $q$ , moment d'inertie de la vis par rapport à son axe de rotation  $J_v$ .
- Chariot X ( $S_1$ ) : vitesse de translation  $v(t) = \dot{x}(t)$ , masse embarquée :  $M$ .

Toutes les liaisons sont sans frottement sauf la glissière  $\mathcal{A}(S_1/S_0)$  de coefficient de frottement  $f$ .

Les actions mécaniques du moteur sur la vis sont modélisées par le couple de moment  $C_m(t)\vec{x}_0$ .

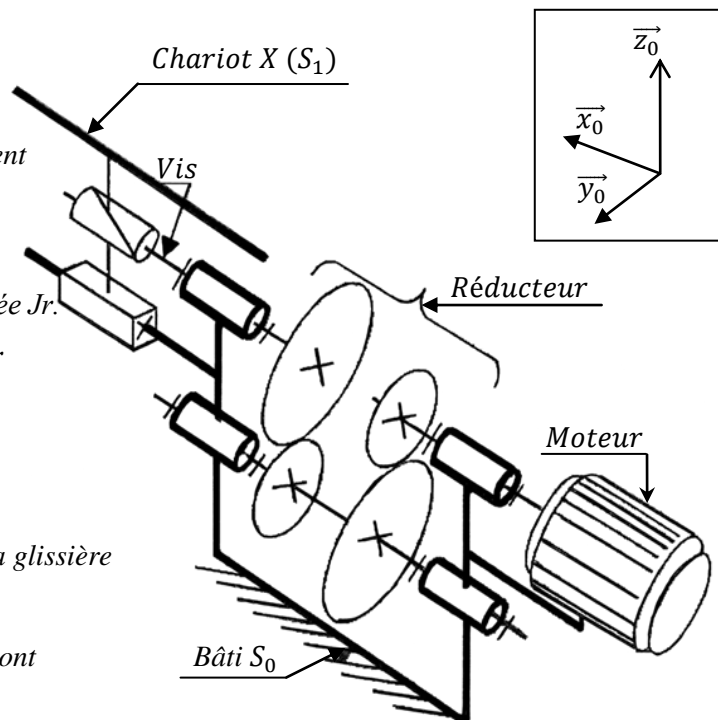


Figure 3

Mécanique de commande de l'axe X (similaire à celles des axes Y et Z)

Document 3

- En A, liaison pivot d'axe  $(A, \vec{y}_1)$  entre la vis et le chariot X.
- En B, liaison hélicoïdale d'axe  $(B, \vec{y}_1)$  de pas  $q$  entre la vis et le chariot Y+écrou.
- En C, liaison glissière d'axe  $\vec{y}_1$  entre le chariot Y et le chariot X.
- Repère  $R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  lié au chariot X.
- Repère  $R_v(A, \vec{x}_v, \vec{y}_v, \vec{z}_v)$  lié à la vis.
- Repère  $R_2(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  lié au chariot Y.
- $\vec{AB} = y \cdot \vec{y}_1$  et  $\vec{BC} = h_2 \cdot \vec{z}_1$  ( $h_2$  constante)

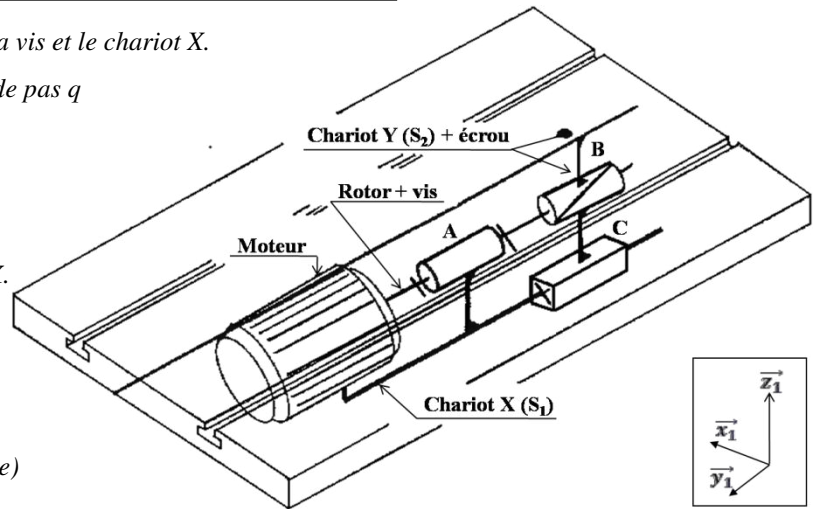


Figure 4

- En A, liaison pivot d'axe  $(A, \vec{y}_1)$  entre la vis et le chariot X.
- En B, liaison hélicoïdale d'axe  $(B, \vec{y}_1)$  de pas  $q$  entre la vis et le chariot Y+écrou.
- En C, liaison glissière d'axe  $\vec{y}_1$  entre Si1 et le chariot X.
- En D, liaison pivot-glissant d'axe  $(D, \vec{z}_1)$  entre Si1 et Si2.
- En E, liaison pivot-glissant d'axe  $(E, \vec{x}_1)$  entre Si2 et le chariot Y+écrou.
- Repère  $R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  lié au chariot X.
- Repère  $R_2(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  lié au chariot Y.
- Repère  $R_{i1}(D, \vec{x}_{i1}, \vec{y}_{i1}, \vec{z}_{i1})$  lié à Si1.
- Repère  $R_{i2}(E, \vec{x}_{i2}, \vec{y}_{i2}, \vec{z}_{i2})$  lié à Si2.
- Repère  $R_v(A, \vec{x}_v, \vec{y}_v, \vec{z}_v)$  lié à la vis.

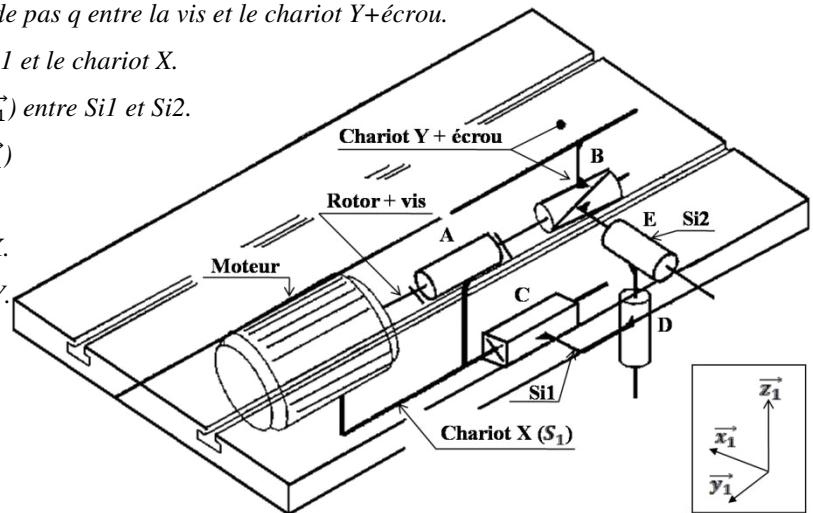


Figure 5

- En A, liaison pivot d'axe  $(A, \vec{y}_1)$  entre la vis et le chariot X.
- En B, liaison hélicoïdale d'axe  $(B, \vec{y}_1)$  de pas  $q$  entre la vis et le chariot Y.
- En C, liaison glissière d'axe  $\vec{y}_1$  entre Si1 et le chariot X.
- En D, liaison pivot-glissant d'axe  $(D, \vec{z}_1)$  entre Si1 et Si2.
- En E, liaison pivot-glissant d'axe  $(E, \vec{x}_1)$  entre Si2 et le chariot Y+écrou.
- Repère  $R_{i1}(D, \vec{x}_{i1}, \vec{y}_{i1}, \vec{z}_{i1})$  lié à Si1.
- Repère  $R_{i2}(E, \vec{x}_{i2}, \vec{y}_{i2}, \vec{z}_{i2})$  lié à Si2.
- Repère  $R_v(A, \vec{x}_v, \vec{y}_v, \vec{z}_v)$  lié à la vis.
- Repère  $R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  lié au chariot X.
- Repère  $R_2(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  lié au chariot Y.

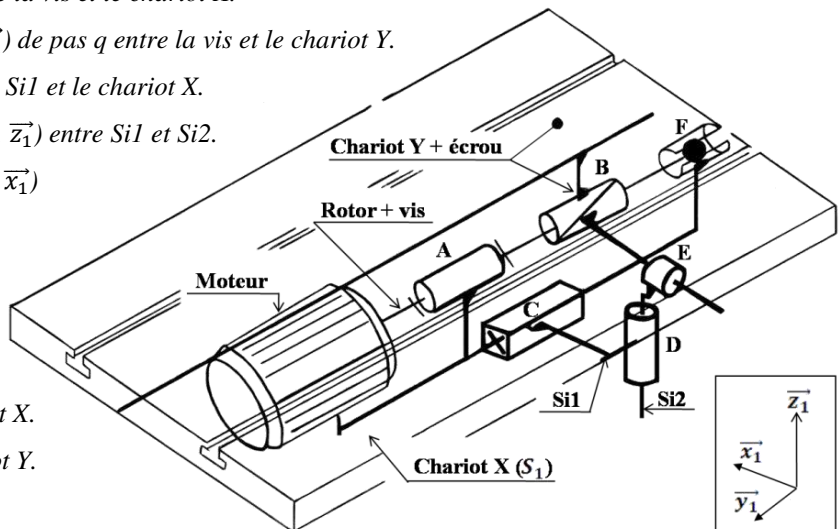
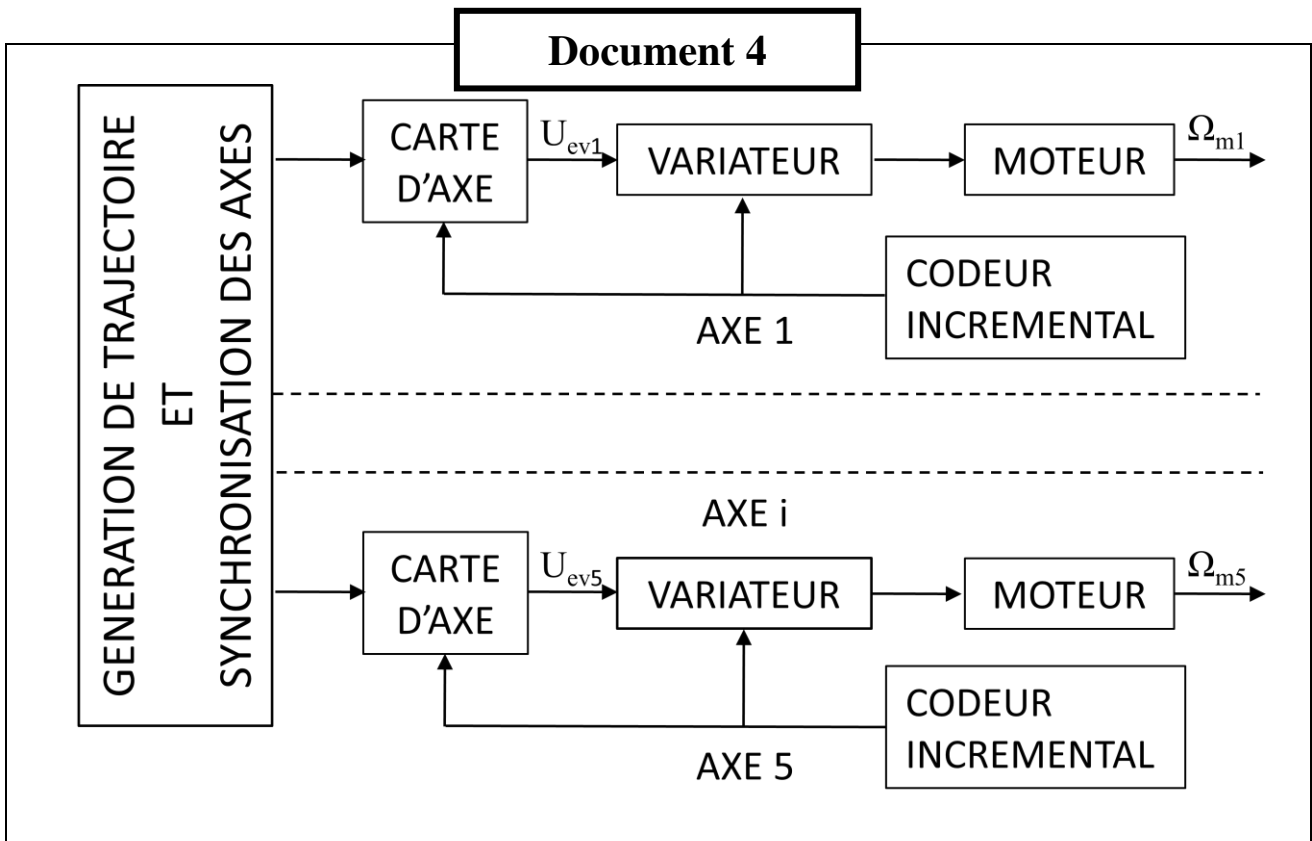


Figure 6



Architecture générale de la commande en position des axes de la machine

Figure 7

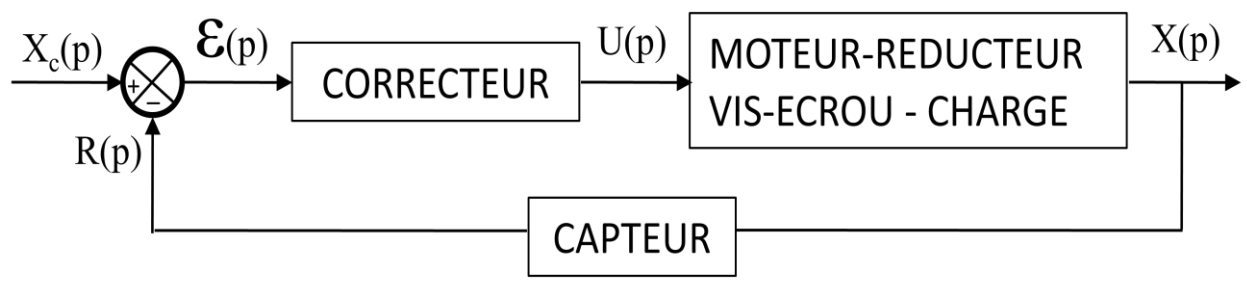


Schéma fonctionnel de la commande en position de l'axe X

Figure 8

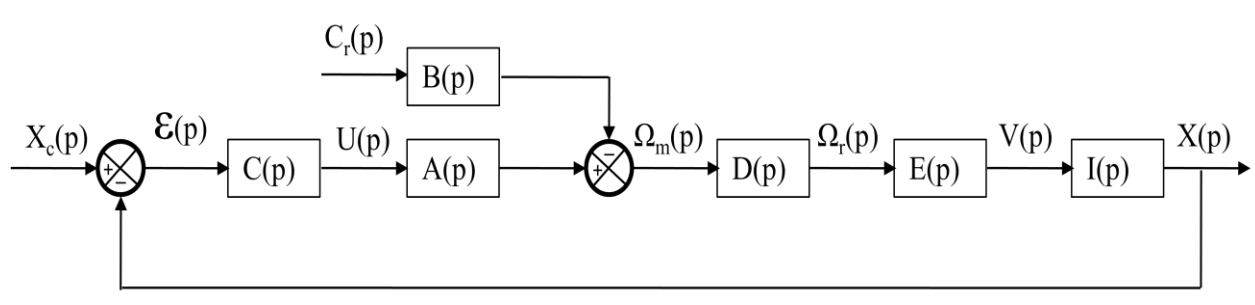
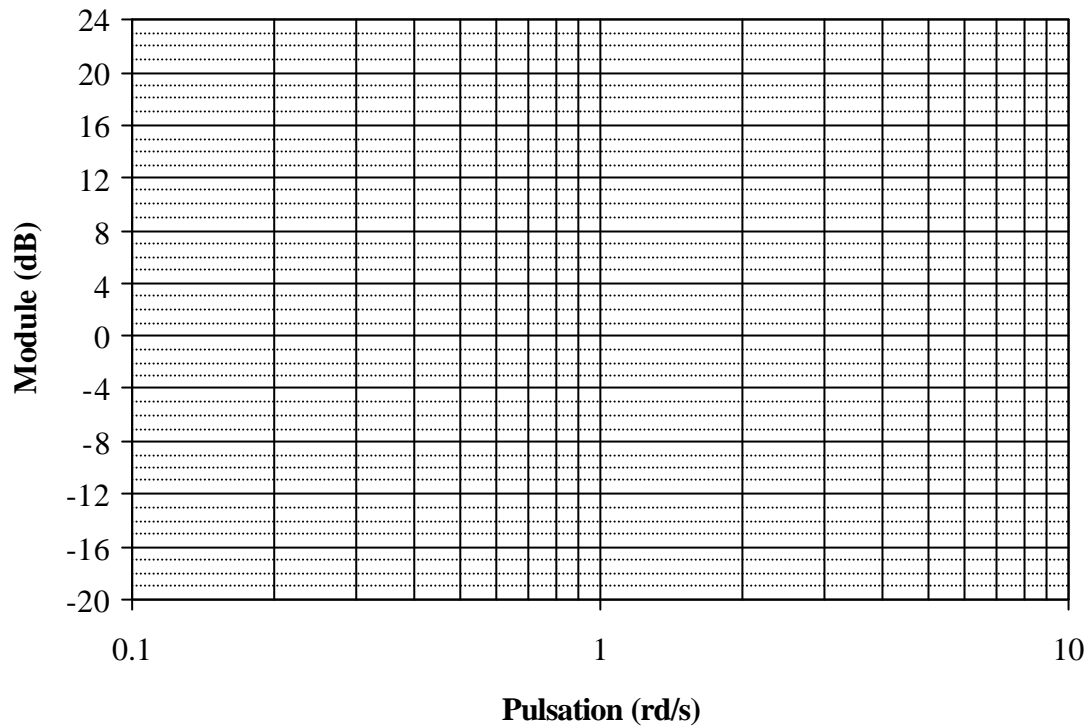
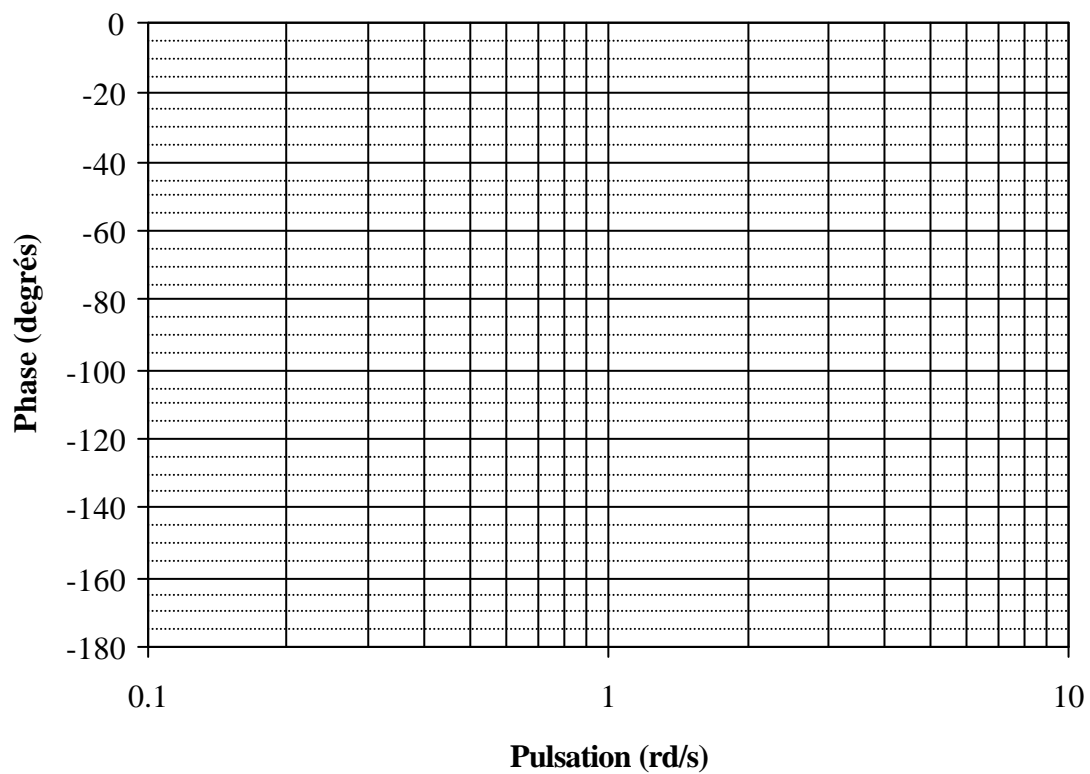


Schéma fonctionnel détaillé de la commande en position de l'axe X

Figure 9

**Diagramme de Bode du procédé****Diagramme de Bode du procédé**

Dépassement et temps de réponse

