CORRIGÉ DU CNC 2000

Mr: OUAKIDI

B - Etude mécanique:

1 - Etude géométrique.

Question 1: Ecrire la condition geometrique $\vec{n} = \vec{z}_5$

d'aprés les figures planes (page 10/15) on a

$$\vec{z}_5 = \cos\beta\ \vec{z}_4 - \sin\beta\ \vec{y}_4$$
$$= \cos\beta\ \vec{z}_0 - \sin\beta\cos\alpha\ \vec{y}_0 + \sin\beta\sin\alpha\ \vec{x}_0$$

Or $\vec{n} = n_x \cdot \vec{x}_0 + n_y\ \vec{y}_0 + n_z \cdot \vec{z}_0$ (les données).

d'où
$$\boxed{\begin{aligned} n_x &= \sin\alpha\sin\beta \\ n_y &= -\cos\alpha\sin\beta \\ n_z &= \cos\beta \end{aligned}}$$

Question 2: exprimer α et β en f^{ct} de n_x, n_y et n_z

$$\boxed{\beta = \arccos n_z} \quad (1)$$

$$tg\alpha = -\frac{n_x}{n_y} \Rightarrow \boxed{\alpha = \operatorname{arctg}\left(-\frac{n_x}{n_y}\right)} \quad (2)$$

Question 3: Ecrire la condition géométrique $\vec{O_0M} = \vec{O_0H}$

$$\vec{O_0M} = \vec{O_0O_1} + \vec{O_1O_2} + \vec{O_2M} = x.\vec{x}_0 + y.\vec{y}_0 + x_M.\vec{x}_0 + y_M.\vec{y}_0 + z_M.\vec{z}_0$$

et $\vec{O_0H} = \vec{O_0O_3} + \vec{O_3G_5} + \vec{G_5H} = z.\vec{z}_0 + L_4 \cdot \vec{x}_4 - L_5 \cdot \vec{z}_5$

d'où
$$\boxed{\begin{aligned} x + x_M &= L_4 \cdot \cos\alpha - L_5\sin\beta\sin\alpha \\ y + y_M &= L_4 \cdot \sin\alpha + L_5\sin\beta\cos\alpha \\ z_M &= z - L_5\cos\beta \end{aligned}}$$

car $\vec{x}_4 = \cos\alpha\ \vec{x}_0 + \sin\alpha\ \vec{y}_0$

et $\vec{z}_5 = \cos\beta\ \vec{z}_0 - \sin\beta(-\sin\alpha\ \vec{x}_0 + \cos\alpha\ \vec{y}_0)$

$= \sin\alpha\sin\beta\ \vec{x}_0 - \sin\beta\cos\alpha\ \vec{y}_0 + \cos\beta\ \vec{z}_0$

Question 4: Exprimer x, y, z en f^{ct} de $x_M, y_M, z_M, n_x, n_y, n_z, L_4$ et L_5.

$$x = -x_M + L_4\cos\alpha - L_5\ n_x$$
$$y = -y_M + L_4\sin\alpha - L_5\ n_y$$
$$z = z_M + L_5 \cdot n_z$$

en + $\begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{n_x}{\sqrt{n_x^2+n_y^2}} \\ \cos\alpha = \dfrac{n_y}{\sqrt{n_x^2+n_y^2}} \\ n_x^2+n_y^2+n_z^2 = 1 \end{cases}$

d'où :

$$\boxed{x = -x_M + L_4\frac{n_y}{\sqrt{n_x^2+n_y^2}} - L_5 \cdot n_x} \quad (3)$$

$$\boxed{y = -y_M + L_4\frac{n_x}{\sqrt{n_x^2+n_y^2}} - L_5 \cdot n_y} \quad (4)$$

$$\boxed{z = z_M + L_5 \cdot n_z} \quad (5)$$

Question 5

Une piece introduite ds la machine definit le point M et la normale, la machine doit respecter les deux conditions citées (page 2). les actionneurs de la machine agiront sur les paramètres x, y, z, α et β jusqu'à l'obtention des egalités 1, 2, 3, 4 et 5. Les conditions de coupes seront ainsi respectées.

Question 6 :

La machine (ou les actionneurs de la machine) agit sur les paramètres x, y, z, α et β qui sont aussi les mobilités des liaisons.

Le fait de ne pas permettre l'une des mobilités induit :

- les pièces à traiter sur la machine doivent respecter une condition entre x_M, y_M, z_M et n_x, n_y, n_z càd que si M et $\vec{n}$ sont $\forall$, les conditions de coupes ne seront pas respectées.

II - Cinematique :

Question 7 : Donner $\vec{\Omega}(S4/R_0)$

$$\vec{\Omega}_{S4/R_0} = \dot{\alpha}\, \vec{z}_0$$

Question 8 : Donner $\vec{\Omega}_{S5/R_0}$

$$\vec{\Omega}_{S5/R_0} = \dot{\alpha}\, \vec{z}_0 + \dot{\beta}\, \vec{x}_4 \qquad (\vec{x}_4 = \vec{x}_5)$$

Question 9 : Donner l'expression de $\vec{V}(G_4 \in S4/R_0)$

$$\vec{V}(G_4 \in S4/R_0) = \dot{z}\, \vec{z}_0 + a \left(\frac{d\vec{x}_4}{dt}\right)_{R_0} = \dot{z}\, \vec{z}_0 + a\, \vec{\Omega}_{4/0} \wedge \vec{x}_4$$

$$= \dot{z}\, \vec{z}_0 + a\dot{\alpha}\, \vec{z}_0 \wedge \vec{x}_4$$

$$\boxed{\vec{V}(G_4 \in 4/R_0) = \dot{z}\, \vec{z}_0 + a\dot{\alpha}\, \vec{y}_4}$$

Question 10 : Donner $\vec{V}_{G5 \in S5/R_0}$

$$\boxed{\vec{V}_{G5, 5/0} = \dot{z}\, \vec{z}_0 + L_4 \cdot \dot{\alpha}\, \vec{y}_4}$$

Question 11 : Donner $\vec{\Gamma}(G_5, S5/R_0)$: accélération

$$\vec{\Gamma}_{G5, S5/R_0} = \left(\frac{d\, \vec{V}_{G5, 5/0}}{dt}\right)_{R_0} = \ddot{z}\, \vec{z}_0 + L_4 \cdot \ddot{\alpha}\, \vec{y}_4 - L_4 \cdot \dot{\alpha}^2\, \vec{x}_4$$

III - Cinetique.

Question 12 : Etablir l'expression du moment cinetique $\overrightarrow{\sigma}(O_4, S4/R_0)$

$$\overrightarrow{\sigma}(O_4, S4/R_0) = \underbrace{\left[\bar{\bar{I}}(O_4, S_4)\right]\left[\overrightarrow{\Omega}^{S4/R_0}\right]} + \underbrace{m_4 . \overrightarrow{O_4G_4} \wedge \overrightarrow{V}(O_4 \in S4/R_0)}$$

$$= m_4 (a.\vec{x}_4 + b\vec{z}_0) \wedge \dot{z}.\vec{z}_0$$

$$= -m_4 . a . \dot{z} . \vec{y}_4$$

$$= \begin{pmatrix} A_4 & 0 & -D_4 \\ 0 & B_4 & 0 \\ -D_4 & 0 & C_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix}$$

m̂ base $(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_0)$ ⚠

$$= \begin{pmatrix} -D_4 . \dot{\alpha} \\ 0 \\ C_4 . \dot{\alpha} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_0)}$$

d'où

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma}(O_4, S4/R_0) = -D_4 \dot{\alpha}\, \vec{x}_4 + C_4 . \dot{\alpha}\, \vec{z}_0 - m_4 . a \dot{z} . \vec{y}_4}$$

Question 13 : Etablir l'expression de $\overrightarrow{\sigma}(G_5, S5/R_0)$

$$\overrightarrow{\sigma}(G_5, S5/R_0) = \left[\bar{\bar{I}}(G_5, S_5)\right]\left[\overrightarrow{\Omega}^{S5/R_0}\right]$$

la matrice $\bar{\bar{I}}(G_5, S_5)$ est donnée ds la base $(\vec{x}_4, \vec{y}_5, \vec{z}_5)$, donc il faut exrimer ~~aussi~~ $\overrightarrow{\Omega}^{S5/R_0}$ ds cette base, pour pouvoir faire le produit $\overrightarrow{\Omega}^{S5/R_0} = \dot{\alpha}\vec{z}_0 + \dot{\beta}\vec{x}_4 = \dot{\beta}\vec{x}_4 + \dot{\alpha}\sin\beta\, \vec{y}_5 + \dot{\alpha}\cos\beta\, \vec{z}_5$

d'où

$$\overrightarrow{\sigma}(G_5, S5/R_0) = \begin{pmatrix} A_5 & 0 & 0 \\ 0 & B_5 & 0 \\ 0 & 0 & C_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\alpha}\sin\beta \\ \dot{\alpha}\cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_5 . \dot{\beta} \\ B_5 \dot{\alpha}\sin\beta \\ C_5 . \dot{\alpha}\cos\beta \end{pmatrix}$$

base $(\vec{x}_4, \vec{y}_5, \vec{z}_5)$

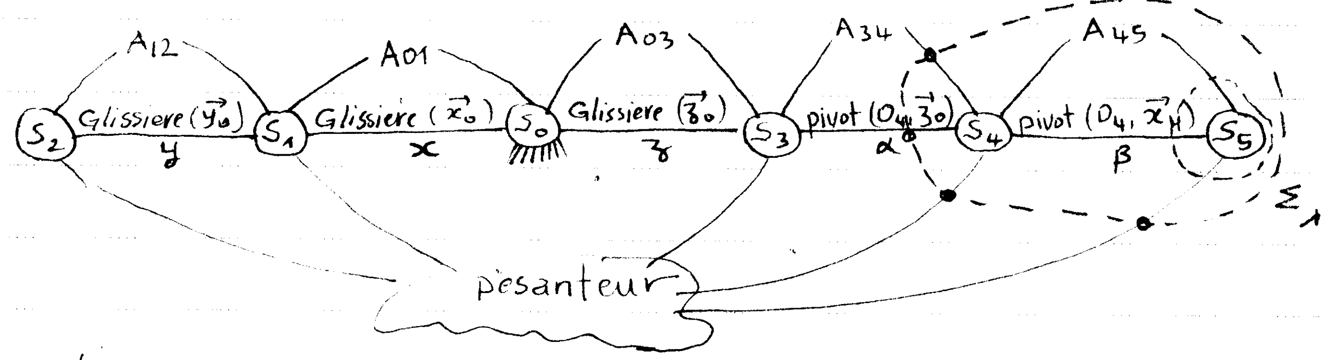
$$\boxed{\overrightarrow{\sigma}(G_5, S5/R_0) = A_5 . \dot{\beta}\, \vec{x}_4 + B_5 . \dot{\alpha}\sin\beta\, \vec{y}_5 + C_5 . \dot{\alpha}\cos\beta\, \vec{z}_5}$$

IV - Dynamique.

Question 14 : donner les equations à utiliser pour determiner C_{34}, C_{45} et F_{03}

il faut faire le schema d'analyse.

Schema d'analyse :



question 14

- Pour trouver C_{34} : On isole $\Sigma_1 = (S_4 \cup S_5)$ et on applique le TMD au point O_4 en projection sur $\vec{z}_0$:

$$\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta_{O_4}}(\Sigma_1/R_0) = \vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{M_{O_4}}(\bar{\Sigma}_1 \to \Sigma_1) \qquad (R_0 : \text{galileen})$$

$$= C_{34} + \vec{z}_0 \cdot \big(\underbrace{-\overrightarrow{O_4G_4} \wedge m_4 g \vec{z}_0 - \overrightarrow{O_4G_5} \wedge m_5 g \vec{z}_0}_{\perp \text{ à } \vec{z}_0}\big)$$

$$= C_{34}$$

$$\boxed{C_{34} = \vec{z}_0 \cdot \vec{\delta}_{O_4}(S_4/R_0) + \vec{z}_0 \cdot \vec{\delta}_{O_4}(S_5/R_0)}$$

- Pour calculer C_{45} : On isole S_5 et on lui applique le T.M.D au point G_5 en projection sur $\vec{x}_4$. (! $\bar{\bar{I}}(S_5)$ donnée en G_5)

$$\vec{x}_4 \cdot \overrightarrow{\delta_{G_5}}(S_5/R_0) = \vec{x}_4 \cdot \overrightarrow{M_{G_5}}(\bar{S}_5 \to S_5)$$

$$= \vec{x}_4 \left(\overrightarrow{G_5G_5} \wedge m_4 g \vec{z}_0\right) + C_{45}$$

$$= C_{45}$$

$$\boxed{C_{45} = \vec{x}_4 \cdot \left(\frac{d\, \overrightarrow{\sigma}(G_5, S_5/R_0)}{dt}\right)_{R_0}}$$

- Pour calculer F_{03} ; On isole $\Sigma_2 = (S_3 \cup S_4 \cup S_5)$ et on lui applique TRD en projection sur $\vec{z}_0$

$$\vec{z}_0 \cdot \left(m_3 \overrightarrow{\Gamma}_{G_3/R_0} + m_4 \overrightarrow{\Gamma}_{G_4/R_0} + m_5 \overrightarrow{\Gamma}_{G_5/R_0}\right) = F_{03} - m_3 g - m_4 g - m_5 g$$

Question 15 : Calculer C_{34}, C_{45} et F_{03}

- Calculons C_{34} (on developpe l'equation de la question 14)

$$* \ \vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta_{O_4}}(S_4/R_0) = \frac{d}{dt}\big(\underbrace{\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\sigma_{O_4}}(4/0)}_{C_4 \cdot \dot{\alpha}}\big) + \vec{z}_0 \cdot \big(\underbrace{m_4 \cdot \underbrace{\overrightarrow{V}(O_4, 4/0)}_{\dot{z}\vec{z}_0} \wedge \overrightarrow{V}(G_4/0)}_{\perp \vec{z}_0}\big)$$

$$= C_4 \cdot \ddot{\alpha}$$

d'où

$$\vec{z}_0 \cdot \vec{\delta}_{O_4}(4/0) = C_4 \cdot \ddot{\alpha}$$

$$* \quad \vec{z}_0 \cdot \vec{\delta}_{O_4}(5/0) = \vec{z}_0 \left(\vec{\delta}_{G_5}(5/0) + \vec{O_4G_5} \wedge m_5 \cdot \vec{\Gamma}_{G5/0} \right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\vec{z}_0 \cdot \vec{\sigma}_{G5}(5/0) \right) + \vec{z}_0 \left[m_5 \cdot L_4 \, \vec{x}_4 \wedge \left(\ddot{z}\, \vec{z}_0 + L_4 \ddot{\alpha}\, \vec{y}_4 - L_4 \dot{\alpha}^2 \vec{x}_4 \right) \right]$$

$$= \frac{d}{dt}\left(C_5 \cdot \dot{\alpha} \cos^2\beta + B_5 \dot{\alpha} \sin^2\beta \right) + m_5 \cdot L_4^2 \cdot \ddot{\alpha}$$

d'où $\boxed{C_{34} = \ddot{\alpha}\left(C_4 + m_5 L_4^2 \right) + \frac{d}{dt}\left(C_5 \cdot \dot{\alpha} \cos^2\beta + B_5 \dot{\alpha} \sin^2\beta \right)}$

• Calulons C_{45}

$$C_{45} = \frac{d}{dt}\left(\vec{x}_4 \cdot \vec{\sigma}(G_5, 5/0) \right) - \vec{\sigma}(G_5, 5/0) \cdot \underbrace{\left(\frac{d\vec{x}_4}{dt} \right)_{R_0}}_{= \dot{\alpha}\, \vec{y}_4}$$

$$= A_5 \cdot \ddot{\beta} - B_5 \cdot \dot{\alpha}^2 \sin\beta \cos\beta + C_5 \dot{\alpha}^2 \cos\beta \sin\beta$$

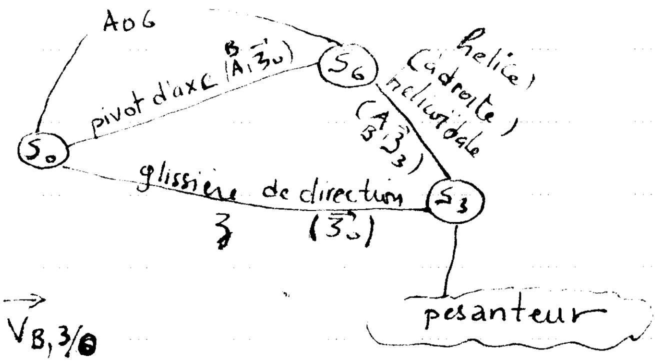
$$\boxed{C_{45} = A_5 \cdot \ddot{\beta} - \dot{\alpha}^2 \sin\beta \cos\beta \left(B_5 - C_5 \right)}$$

• Calulons F_{03}

$$F_{03} = (m_3 + m_4 + m_5) g + \underbrace{m_3 \, \vec{z}_0 \cdot \vec{\Gamma}_{G3/0}}_{= m_3 \ddot{z}} + \underbrace{m_4 \vec{z}_0 \cdot \vec{\Gamma}_{G4/0}}_{= m_4 \frac{d}{dt}\left(\vec{z}_0 \cdot \vec{V}(G4/0) \right) = m_4 \cdot \ddot{z}} + \underbrace{m_5 \vec{z}_0 \cdot \vec{\Gamma}_{G5/0}}_{= m_5 \cdot \ddot{z}}$$

d'où $\boxed{F_{03} = (m_3 + m_4 + m_5)(g + \ddot{z})}$

<u>Question 16</u> : Donner les relations liant w_6 à z et N_B à Z_B.



$$\{3 \to 6\} = \{\text{écrou} \to \text{vis}\} = \left\{ \begin{matrix} Z_B \cdot \vec{z}_0 \\ N_B \cdot \vec{z}_0 \end{matrix} \right\}_B$$

$$\frac{-9}{2\pi} \vec{\Omega}(6/0) = \vec{V}_{B,3/0}$$

$$\boxed{\dot{z} = -\frac{9}{2\pi} \cdot w_6}$$

$$\boxed{N_B = -\frac{9}{2\pi} \cdot Z_B}$$

Question 17 : determiner C_{06} en $f^{ct}(\omega_6, I_6, N_B)$

On isole S_6 . TMD au pt A en projection sur $\vec{z}_0$ (A : fixe)

$$C_{06} + N_B = I_6 \cdot \dot{\omega}_6$$

$$\boxed{C_{06} = I_6 \cdot \dot{\omega}_6 - N_B}$$

Question 18 :

$$\boxed{C_{06} = I_6 \cdot \dot{\omega}_6 + \frac{q}{2\pi} Z_B}$$

Question 19 : deduire C_{06} en f^{ct} de z , en faisant le lien entre Z_B et F_{03} . (Q15)

On isole S_3 + masse embarquée → T.R.D en proj sur $\vec{z}_0$

$$-Z_B - mg = m\ddot{z} \rightarrow Z_B = -m(g + \ddot{z})$$

Or $F_{03} = (m_3 + m_4 + m_5)(g + \ddot{z}) = m(g + \ddot{z}) = -Z_B$

$\rightarrow F_{03} = -Z_B$

inutile : je me demande pourquoi faire le lien entre Z_B et F_{03} comme indiqué ds la question alors que ce n'est pas necessaire !!

d'où $C_{06} = I_6\left(-\frac{2\pi}{q} \cdot \ddot{z}\right) - \frac{q}{2\pi} m (g + \ddot{z})$

$$\boxed{C_{06} = \ddot{z}\left(-\frac{2\pi}{q} \cdot I_6 - \frac{q}{2\pi} m\right) - \frac{q}{2\pi} mg}$$

Question 20 : Autre methode de determination de C_{06}

T.E.C appliqué à S_6

$$\frac{dT(6/0)}{dt} = \mathcal{P}(\bar{6} \to 6)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} I_6 \cdot \omega_6^2\right) = C_{06}\,\omega_6 + \underbrace{\begin{Bmatrix} Z_B \vec{z}_0 \\ N_B \cdot \vec{z}_0 \end{Bmatrix}_B \cdot \begin{Bmatrix} \omega_6 \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B}_{N_B \cdot \omega_6}$$

d'où $I_6 \cdot \omega_6 \cdot \dot{\omega}_6 = C_{06} \cdot \omega_6 + N_B \cdot \omega_6$

$$I_6 \cdot \dot{\omega}_6 = C_{06} + N_B \Rightarrow C_{06} = I_6 \cdot \dot{\omega}_6 - N_B \text{ (voir Q17)}$$

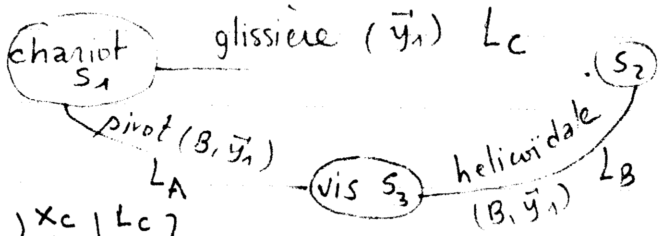
V_ Etude d'iso-hyperstaticité :

Question 21 : Donner sans calcul , la mobilité "m" et le degré d'hyperstatisme "h"

$$\begin{cases} m = 1 \\ h = N_s + m - 6n = 15 + 1 - 6 \times 2 = 4 \end{cases}$$

! indice de mobilité ; $i_m = m_c - h = 6n - N_s$! qui sers à je ne sais quoi !!

Question 22 : trouver les inconnues hyperstatiques.



soit : $\{\mathcal{T}_{1\to 2}\} = \begin{Bmatrix} X_C & L_C \\ 0 & M_C \\ Z_C & N_C \end{Bmatrix}_B$ et $\{\mathcal{T}_{1\to 3}\} = \begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & 0 \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_B$

$\{\mathcal{T}_{2\to 3}\} = \begin{Bmatrix} X_B & L_B \\ Y_B & 9Y_B \\ Z_B & N_B \end{Bmatrix}_B$

On isole 2 : PFS en B (on suppose que le système n'est pas chargé {extérieur→syst} = {0})

$$\begin{cases} X_C - X_B = 0 \\ -Y_B = 0 \\ Z_C - Z_B = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} L_C - L_B = 0 \\ M_C - 9Y_B = 0 \\ N_C - N_B = 0 \end{cases}$$

On isole 3 : PFS en B

$$\begin{cases} X_A + X_B \\ Y_A + Y_B \\ Z_A + Z_B \end{cases} \qquad \begin{cases} L_A + L_B \\ 9Y_B = 0 \\ N_A + N_B = 0 \end{cases}$$

$h = 4$, les inconnues hyperstatiques sont X_A (ou X_B ou X_C), Z_A (ou Z_B ou Z_C), L_A (ou L_B ou L_C) et N_A (ou N_B ou N_C) 4 inconnues, (plusieurs choix).

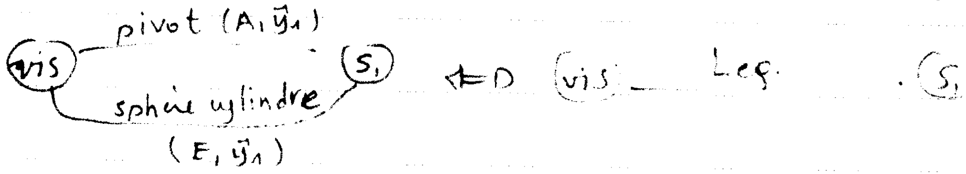
On peut par exemple poser $X_A = Z_A = L_A = N_A = 0$ → la liaison en A devient ponctuelle de normale $(B, \vec{y}_1)$ (pas très rigide)

Question 23 : deuxième solution : écrou flottant.

$$h = N_s + m - 6n = 24 - 24 = 0 \qquad \text{avec} \begin{cases} N_s = 5+5+5+4+4 = 23 \\ m = 1 \\ n = 4 \end{cases}$$

le système est devenu isostatique

Question 24 : Donner le nom et les torseurs cinémat. de $\mathcal{L}_{vis/S_1}$.



Léquiv : Liaison pivot hyperstatique, car la "sphère cylindre" ne sert à rien ici (on a déjà "pivot" sans elle), elle ajoute seulement des inconnues.

$$h = N_s + m - 6 = 7 + 1 - 6 = 2$$

$$\{\mathcal{V}_{vis/S_1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$$

Question 25 : Reevaluer le degré d'hyperstatisme de la troisième solution

$$h = N_s + m - 6n = (5+5+5+4+4+2) + (1) - 6(4)$$

$$= 25 + 1 - 24$$

$\boxed{h = 2}$ solution hyperstatique.

C- PARTIE AUTOMATIQUE.

I. Etude mécanique de la chaîne X.

Question 26 : fig3.

$$2T(\Sigma/R_0) = J_m \cdot \omega_m^2 + J_r \cdot \omega_m^2 + J_v \cdot \omega_{vis}^2 + MV^2$$

$$\frac{\omega_{vis}}{\omega_m} = \frac{1}{r}$$ (car $r > 1$: rapport de reduction !)

$V = -q \cdot \omega_{vis}$ (q : pas reduit voir remarque question 27) helice à droite.

d'où $2T(\Sigma/R_0) = J_m \cdot \omega_m^2 + J_r \cdot \omega_m^2 + J_v \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \omega_m^2 + M \frac{q^2}{r^2} \omega_m^2$

$$= \left(J_m + J_r + \frac{J_v}{r^2} + M \cdot \frac{q^2}{r^2}\right)\omega_m^2$$

$$= J_{eq} \cdot \omega_m^2$$

$$\boxed{J_{eq} = J_m + J_r + \frac{J_v}{r^2} + M \cdot \frac{q^2}{r^2}}$$

Question 27

Remarque :

le sujet présente un problème de clarté ds l'enoncé de cette partie. Le pas de la vis est un pas reduit, chose qu'il fallait signaler puisque l'A.N de la question 31 donne q en mm/rd au lieu de mm (~~mm~~ mm/tr) comme d'habitude.).
Les frottements de coef. "f" dont parle le sujet est un frottement visqueux ce qu'il fallait aussi signaler, faute de quoi la réponse à cette question 27 serait impossible puisque le systeme est hyperstatique (ca ne marche pas avec le frottement sec).

T.E.C à Σ.

$$\frac{dT(\Sigma/R_0)}{dt} = \mathcal{P}(\bar{\Sigma} \to \Sigma) + \mathcal{P}(\text{int } \Sigma)$$

$$= C_m \cdot \omega_m - f \cdot V \cdot V.$$

$$J_{eq} \cdot \dot{\omega}_m \cdot \omega_m = C_m \cdot \omega_m - f \cdot \left(\frac{q}{r}\right)^2 \cdot \omega_m \cdot \omega_m$$

$$J_{eq} \cdot \dot{\omega}_m = C_m - f \cdot \left(\frac{q}{r}\right)^2 \cdot \omega_m$$

d'où $\boxed{C_r = f \cdot \left(\frac{q}{r}\right)^2 \cdot \omega_m}$ couple resistant ramene au moteur.

II - Modele de la commande d'entrainnement de l'axe X.

Question 28 : Ecrire les 4 equat. ds le domaine de Laplace.

$$\begin{cases} U(P) = R \cdot I(P) + LP \cdot I(P) + E(P) \\ C_m(P) = K_t \cdot I(P) \\ E(P) = K_e \cdot \Omega_m(P) \\ J_{eq} \cdot P \cdot \Omega_m(P) = C_m(P) - C_r(P). \end{cases}$$

Question 29 :

$$\Omega_m(P) = \frac{K_t}{J \cdot P} I(P) - \frac{1}{J \cdot P} C_r(P) = \frac{K_t}{J \cdot P} \times \frac{1}{R + L \cdot P} \left(U(P) - K_e \cdot \Omega_m(P)\right) - \frac{1}{J \cdot P} C_r(P)$$

$$\Omega_m(P) \cdot \left[1 + \frac{K_e \cdot K_t}{J \cdot P(R + L \cdot P)}\right] = \frac{K_t}{J \cdot P(R + L \cdot P)} U(P) - \frac{1}{J \cdot P} \cdot C_r(P).$$

$$\Omega_m(P) = \frac{K_t}{K_e K_t + JP(R + LP)} U(P) - \frac{J \cdot P(R + L \cdot P)}{J \cdot P(K_e \cdot K_t + J \cdot P(R + LP))} C_r(P)$$

$$\boxed{\Omega_m(P) = \frac{K_t}{K_e K_t + JP(R + LP)} \cdot U(P) - \frac{R + L \cdot P}{K_e \cdot K_t + J \cdot P(R + L \cdot P)} \cdot C_r(P)}$$

Question 30 : mettre $A(P)$ et $B(P)$ sous forme canonique, determiner les caracteristiques (K_1, K_2, ω_n, z).

$$\Omega_m(P) = A(P) \cdot U(P) - B(P) \cdot C_r(P).$$

$$A(P) = \frac{1/K_e}{1 + \frac{J \cdot R}{K_e \cdot K_t} \cdot P + \frac{J \cdot L}{K_e \cdot K_t} P^2} = \frac{K_1}{1 + 2 \cdot \frac{z}{\omega_n} P + \frac{P^2}{\omega_n^2}}$$

2ème ordre
classe = 0

$$\boxed{K_1 = \frac{1}{K_e}} \quad \boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{K_e K_t}{J \cdot L}}}, \quad \boxed{z = \frac{R \cdot \sqrt{J}}{2\sqrt{K_e K_t L}}}$$

$$B(P) = \frac{R}{K_e K_t} \cdot \frac{1 + \frac{L}{R} \cdot P}{1 + \frac{JR}{K_e K_t} P + \frac{J \cdot L}{K_e K_t} P^2} = K_2 \frac{1 + \tau P}{1 + 2\frac{z}{\omega_n} P + \frac{P^2}{\omega_n^2}}$$

2ème ordre généralisé
classe = 0
$\boxed{K_2 = \frac{R}{K_e K_t}}$

Question 31 :

$A(P) = \dfrac{1/K_e}{1 + \frac{J.R.P}{K_eK_t} + \frac{J.L\,P^2}{K_eK_t}}$ qui devient un 1er ordre si on neglige le terme J.L

* l'inductance du moteur est générale très faible,

$\rightarrow L \simeq 0$

* On peut aussi dire que la constante de temps electrique est faible devant la constante de temps électromécanique $A(P) = \dfrac{K'}{(1+\tau_e)(1+\tau_m)}$

Question 32 :

$$\begin{cases} K_1 = 10 \\ \omega_n = 447{,}21 \text{ rd/s} \\ z = 11{,}18 \\ \tau_m = 0{,}05 \end{cases}$$

$\left(\dfrac{1}{\omega_n^2} = 5.10^{-6} \simeq 0\right)$
hypothèse realiste

Question 33 : identifier les transmittances D(P), E(P) et I(P)

- $D(P) = \dfrac{\Omega_r(P)}{\Omega_m(P)} = r^{-1} = \dfrac{1}{r}$
- $E(P) = \dfrac{V(P)}{\Omega_r(P)} = q$ (le pas reduit).
- $I(P) = \dfrac{X(P)}{V(P)}$ or $V(t) = \dfrac{dx}{dt} \Rightarrow V(P) = P.X(P)$

$$I(P) = \frac{1}{P}$$

Question 34 : precision vis à vis de la consigne et de la perturbation.

- La FTBO contient un integrateur $\rightarrow \varepsilon_{s\,\text{entrée}} = 0$
- les blocs en amont de la perturbation n'ont pas d'integrations (C(P) et A(P)) donc $\varepsilon_{\text{perturbat}} \neq 0$

au total l'asservissement avec perturbation n'est pas precis à 100 %.

Question 35 : dire sans calcul si cet asservissement est stable.

la FTBO $= C(P).A(P).D(P).E(P).I(P) = \dfrac{K_1K_v\, q/r}{(1+\tau_m P).P}$ 2ème ordre

la phase n'atteint jamais $-180°$, en particulier pour ω_{co} dont le gain $= 0$ dB $\Rightarrow$ donc cet asservissement est stable

Question 36 :

$$FTBO = G(P) = \frac{K_1 \cdot K_v \cdot q/r}{P(1+\tau_m P)}$$

AN :
$$\boxed{G(p) = \frac{10 \cdot \frac{1}{5} \cdot K_v}{P(1+0{,}05P)} = \frac{2K_v}{P(1+0{,}05P)}}$$

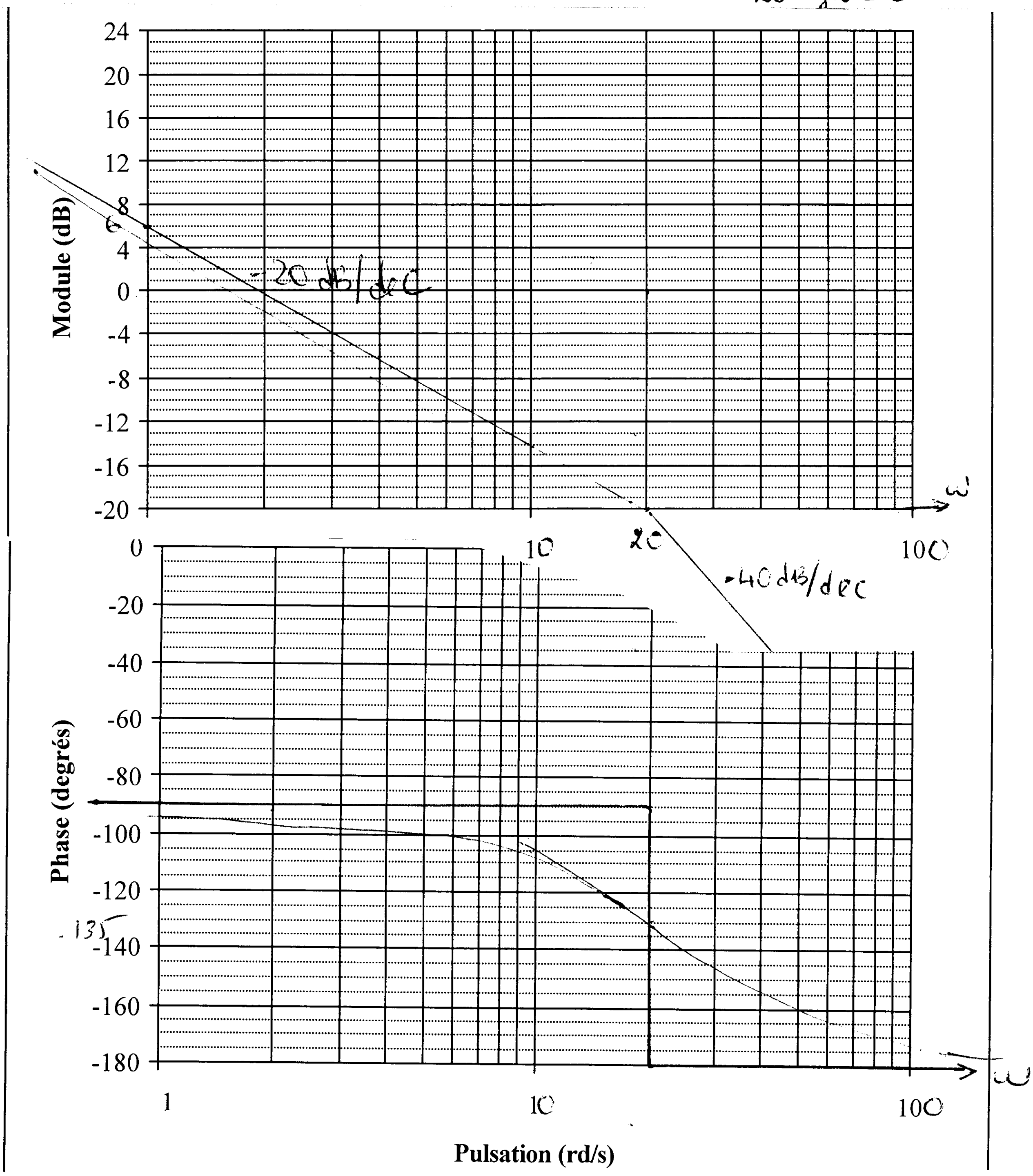
Question 37 :

tracer les diagrammes de Bode de $G(P)$ pour $K_v = 1$

echelle 1cm $\longrightarrow$ 10 dB et 1cm $\longrightarrow$ 45°

$$G(P) = \frac{2}{P(1+0{,}05P)} = \frac{2}{P} \cdot \frac{1}{1+0{,}05P} \quad \text{et} \quad \frac{1}{0{,}05} = 20$$

$$20 \log 2 = 6 \text{ dB}$$



Question 38 : Donner MG et MP de cet asservissement.

Ces marges ne peuvent être calculées qu'analytiquement et non à partir des diagrammes tracés (la courbe réelle du gain et de phase n'est que approchée). (sauf si la courbe assymptote est = courbe réelle).

Cherchons ω_{co} pour laquelle le gain = 0 dB

$K_v = 1 \Rightarrow G_1(j\omega) = \dfrac{2}{j\omega(1+0{,}05\,j\omega)}$ et $\begin{cases} |G_1(j\omega)| = \dfrac{2}{\omega\sqrt{1+(0{,}05\omega)^2}} \\ \arg(G(j\omega)) = -90° - \operatorname{arctg} 0{,}05\omega \end{cases}$

d'où

$$\frac{2}{\omega_{co}\sqrt{1+0{,}05^2\omega_{co}^2}} = 1 \Rightarrow \omega_{co}\sqrt{1+0{,}05^2\omega_{co}^2} = 2$$

$$\Rightarrow \omega_{co}^2\left(1+0{,}05^2\omega_{co}^2\right) = 4$$

$0{,}05^2\,\omega_c^4 + \omega_c^2 - 4 = 0$ $\quad\Delta = 1 + 16\times25\times10^{-4} = 1+4\cdot10^{-2}$ $= 1{,}04 = (1{,}02)^2$

$\omega_{co}^2 = \dfrac{-1+1{,}02}{2\times25\times10^{-4}} = 4$ $\quad\Longrightarrow\quad \underline{\omega_{co} = 2 \text{ rd/s}}$

d'où

$$M\varphi = \varphi(\omega_{co}) + 180° = -90° - \operatorname{arctg} 0{,}1 + 180°$$

$$\boxed{M\varphi = 84{,}29°}$$

et $MG = +\infty$ la phase n'atteint jamais $-180°$

Question 39 Determiner $K_v = K_{vs}$ pour avoir $M\varphi = 50°$

- $M\varphi = 50° = 180° + \varphi(\omega'_{co}) \Rightarrow \varphi(\omega'_{co}) = -130°$

$$\Rightarrow -90° - \operatorname{arctg} 0{,}05\,\omega'_{co} = -130°$$

$$\Rightarrow \operatorname{arctg} 0{,}05\,\omega'_{co} = +40$$

$$\omega'_{co} = \frac{1}{0{,}05}\operatorname{tg} 40 = 16{,}78 \text{ rd/s}$$

- $\text{Gain}(\omega'_{co}) = 1 \Rightarrow$ et $G(p) = BO = \dfrac{2K_{vs}}{p(1+0{,}05p)}$

d'où $\dfrac{2K_{vs}}{\omega'_{co}\sqrt{1+0{,}05\,\omega'^2_{co}}} = 1$

$$\Rightarrow K_{vs} = 0{,}5\cdot\omega'_{co}\sqrt{1+0{,}05\,\omega'^2_{co}}$$

$$\boxed{K_{vs} = 11{,}37}$$

Question 40 : Déterminer K_{ve} pour $\varepsilon_T = 0{,}05\,V_0$

$$\varepsilon(p) = X_c(p) - X(p) = X_c(p)\left(1 - \frac{G(p)}{1+G(p)}\right) = X_c(p)\frac{1}{1+G(p)}$$

$$= X_c(p)\frac{1}{1+\dfrac{2K_v}{p(1+0{,}05p)}} = X_c(p)\frac{p(1+0{,}05p)}{2K_v + p + 0{,}05p^2}$$

On cherche ε_T c.a.d $\lim\limits_{t\to\infty} \varepsilon(t)$ pour $X_c(p) = \frac{V_0}{p^2}$ car ($x_c(t) = V_0 t$)

$$\varepsilon_T = \lim_{p\to 0} p\,\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0} V_0\frac{1+0{,}05p}{2K_v + p + 0{,}05p^2} = \frac{V_0}{2K_v}$$

d'où $0{,}05\,V_0 = \dfrac{V_0}{2K_{ve}} \rightarrow \boxed{K_{ve} = \dfrac{1}{2\times 0{,}05} = 10}$

Question 41 Déterminer K_{vr} pour avoir $t_{5\%}$ minimum.

$$FTBF = \frac{G(p)}{1+G(p)} = \frac{2K_{vr}}{2K_{vr} + p + 0{,}05p^2} = \frac{1}{1+\dfrac{p}{2K_{vr}} + \dfrac{0{,}05}{2K_{vr}}p^2}$$

où $\omega_n = \sqrt{\dfrac{2K_{vr}}{0{,}05}}$ et $z = \dfrac{1}{2\sqrt{0{,}1K_{vr}}}$

2ème ordre $\rightarrow$ $t_{5\%}$ minimum pour $z = 0{,}7 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

d'où $\dfrac{1}{2\sqrt{0{,}1K_{vr}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sqrt{0{,}2K_{vr}} = 1 \Rightarrow 0{,}2K_{vr} = 1$

$\Rightarrow \boxed{K_{vr} = 5}$ (l'abaque est inutile)

Question 42 : Rappeler la condition de non dépassement et en déduire une limitation de $K_v = K_{vd}$

non dépassement pour un 2ème ordre. $z \geq 1$

$$FTBF = \frac{1}{1+\dfrac{p}{2K_v} + \dfrac{0{,}05}{2K_v}p^2}$$

non dépassement $\Rightarrow$ $z \geq 1 \Rightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{0{,}1K_{vd}}} \geq 1$

$\Rightarrow 2\sqrt{0{,}1K_{vd}} \leq 1$

$4\times 0{,}1\times K_d \leq 1 \Rightarrow \boxed{K_{vd} \leq 2{,}5}$ $\quad 0 \leq K_{vd} \leq 2{,}5$

$K_{vd} = 2{,}5$

Question 43 :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2K_v}{0{,}05}} = \sqrt{40K_v}$$

$K_v \leq 2{,}5 \Rightarrow 40K_v \leq 100$

$\Rightarrow \sqrt{40K_v} \leq 10 \Rightarrow \boxed{\omega_n \leq 10}$

ω_n etant limité à 10 rd/s donc la bande passante aussi est limitée donc la rapidité aussi puisque une bande passante large $\Rightarrow$ une bonne rapidité.

Question 44 :

augmentation de K_v	diminution de K_v
• bonne rapidité • bonne precision	• bonne stabilité : la marge de phase augmente • diminution ou annulation du depassement

Question 45 :

Le systeme etant stable, avec un reglage de Kv on pourrait utiliser un correcteur PI, proportionnel integral pour ameliorer la rapidité et la precision, les depassements n'etant pas permis ici,

Question 46 : donner $H(p)$ = FTBF, donner $X(p)$ (voir Q41)

$X_c(p) = \frac{50}{p}$, $k_v = 2{,}5$

$$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{5} + \frac{p^2}{100}} = \frac{1}{1 + 0{,}2p + 0{,}01p^2}$$

$$\boxed{X(p) = X_c(p) \cdot H(p) = \frac{50}{p(1 + 0{,}2p + 0{,}01p^2)}} \quad \text{et} \quad \begin{cases} z = 1 \\ \omega_n = 10 \end{cases}$$

Question 47 : Donner l'expression de la reponse indicielle $x(t)$

$$X(p) = \frac{50}{p(1 + 0{,}2p + 0{,}01p^2)} = \frac{50}{0{,}01p(p+10)^2} = \frac{5000}{p(p+10)^2}$$

On decompose en elements simples :

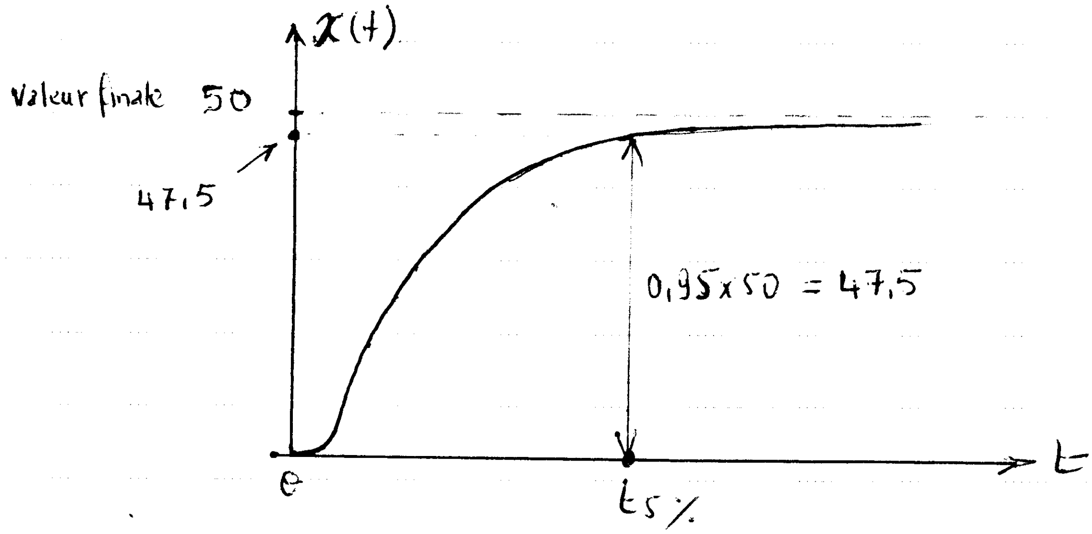
$$X(p) = \frac{5000}{p(p+10)^2} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p+10} + \frac{c}{(p+10)^2} \Rightarrow \begin{cases} a = 50 \\ b = -50 \\ c = 400 \end{cases}$$

$$= \frac{50}{p} - \frac{50}{p+10} + \frac{400}{(p+10)^2}$$

d'où $\boxed{x(t) = 50 - 50e^{-10t} + 400 \cdot e^{-10t}\, t}$ d'aprés l'annexe.

Question 48 : tracer l'allure de la reponse $x(t)$

C'est la reponse du $2^{ème}$ ordre (indicielle) en régime apériodique critique $(z = 1)$



Un sujet très long, mais riche en connaissances malgré quelques problèmes de clarté ds l'énoncé.

L. Ouakidi