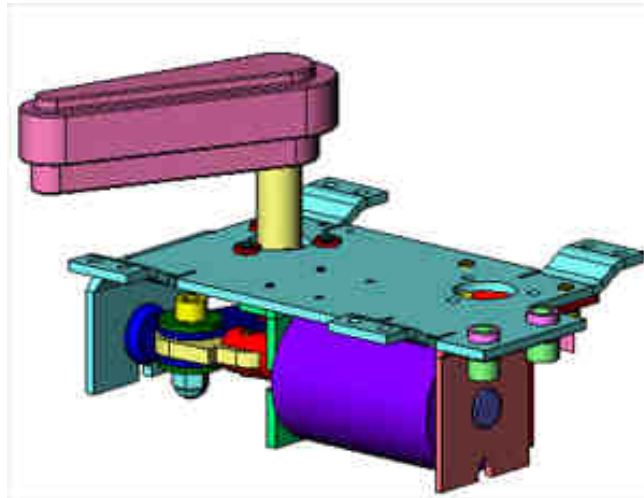


THEORIE DES MECANISMES

Objectifs : A l'issue de cette séquence, vous devez être capable de valider l'aptitude d'un mécanisme à réaliser les modifications de mouvement ou d'effort attendues :

Il s'agira donc de se demander

- Combien de paramètres doit-on s'imposer afin que toute la cinématique soit déterminée (position géométrique connue) ? => M_C : Mobilité cinématique
- Quelles sont les lois entrées-sorties du mécanisme (en termes de vitesse ou d'effort) ?
- Connaissant les efforts extérieurs, est-on capable de déterminer toutes les actions mécaniques de liaison ?
 - OUI : le mécanisme est dit « isostatique »
 - NON : le mécanisme est dit « hyperstatique » de degré h égal au nombre d'inconnues indéterminables.
- Quelles sont les conséquences d'un hyperstatisme sur la géométrie ? Comment modifier un mécanisme afin de le rendre isostatique ?



HYPOTHESES : DANS TOUT CETTE SEQUENCE, NOUS CONSIDERERONS QUE :

- Les pièces sont indéformables
- Les liaisons mécaniques entre les solides sont considérées comme parfaites (sans jeu et sans frottement). Les contacts sont maintenus.
- Les effets dynamiques sur l'ensemble des pièces sont négligés, de telle sorte que le principe fondamental de la statique puisse s'appliquer

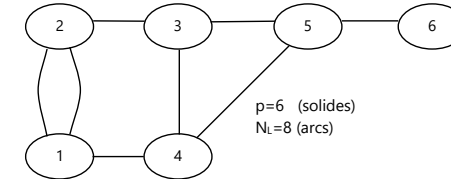
I GRAPHE DE STRUCTURE D'UN MECANISME

I.1 Rappel

Construction :

- A toute pièce (ou classe d'équivalence cinématique), on associe un sommet : p sommets
- A toute liaison, on associe un arc : N_L arcs

Application :



I.2 Nombre cyclomatique

A partir d'un graphe de structure, il est possible de dégager différentes boucles utiles pour une étude géométrique et cinématique. Le nombre de boucles indépendantes à prendre en considération est déterminé par le nombre cyclomatique.

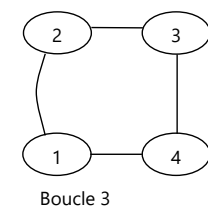
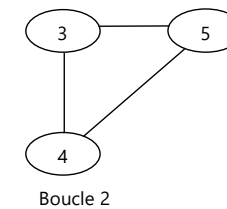
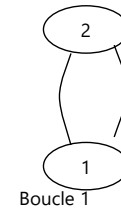
On peut montrer que ce nombre cyclomatique vaut :

$$\mu = N_L - p + 1$$

N_L nombre de liaison
 p nombre de solides

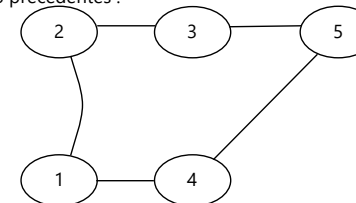
A SAVOIR

Application : $\mu = 8 - 6 + 1 = 3$, le mécanisme comporte 3 boucles indépendantes.



Toute autre boucle sera une combinaison des boucles considérées préalablement.

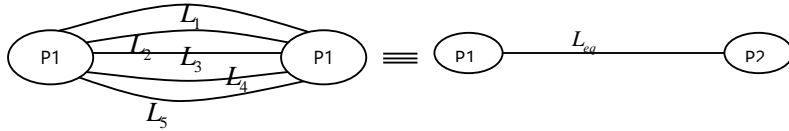
Boucle dépendante des 3 précédentes :



I.3 Liaisons équivalentes

Afin d'étudier la cinématique d'un mécanisme, on cherche à remplacer des associations de liaisons en parallèle ou en série par une liaison élémentaire normalisée et dont le comportement est **cinématiquement équivalent**.

I.3.1 Liaisons en parallèle



I.3.1.a Approche cinématique :

Afin que la liaison équivalente soit compatible avec les liaisons élémentaires disposées en parallèle, il faut :

$$\left\{ V_{P_2/P_1}^{L_{eq}} \right\} = \left\{ V_{P_2/P_1}^{L_1} \right\} = \dots = \left\{ V_{P_2/P_1}^{L_n} \right\}$$

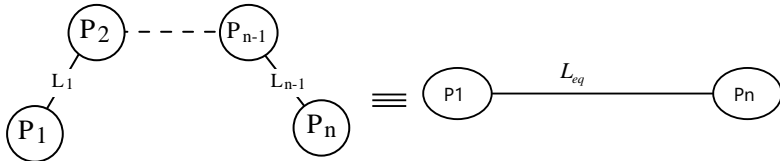
exprimé au même point

I.3.1.b Approche statique :

$$\left\{ T_{P_1 \rightarrow P_2}^{L_{eq}} \right\} = \left\{ T_{P_1 \rightarrow P_2}^{L_1} \right\} + \dots + \left\{ T_{P_1 \rightarrow P_2}^{L_n} \right\}$$

exprimé au même point

I.3.2 Liaisons en série



I.3.2.a Approche cinématique :

$$\left\{ V_{P_1/P_n}^{L_{eq}} \right\} = \left\{ V_{P_1/P_2}^{L_1} \right\} + \dots + \left\{ V_{P_{n-1}/P_n}^{L_n} \right\}$$

exprimé au même point

I.3.2.b Approche statique :

$$\left\{ T_{P_1 \rightarrow P_n}^{L_{eq}} \right\} = \left\{ T_{P_1 \rightarrow P_2}^{L_1} \right\} = \dots = \left\{ T_{P_{n-1} \rightarrow P_n}^{L_n} \right\}$$

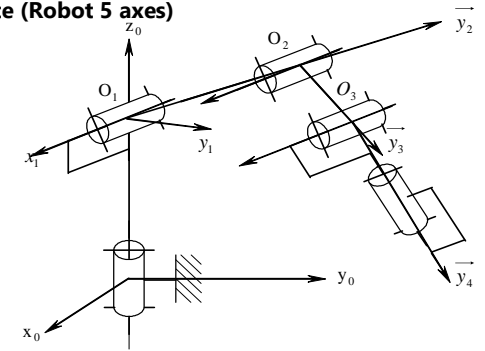
exprimé au même point

I.4 Exemples de mécanismes

• Mécanisme en chaîne ouverte (Robot 5 axes)

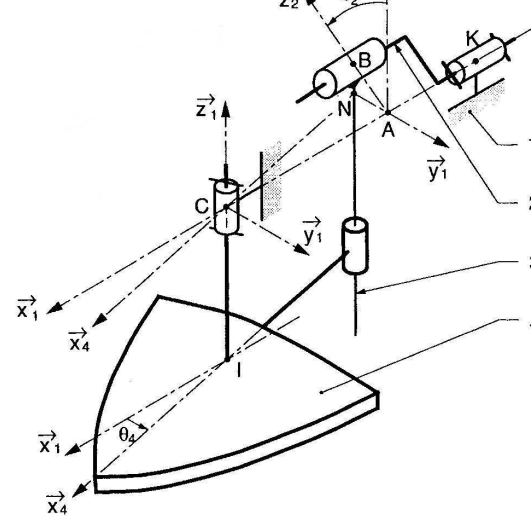
- L10 :
- L21 :
- L32 :
- L43 :
- L54 :

nb de solides $p =$
 nb de liaisons $N_L =$
 nb cyclomatique $\mu =$



• Mécanisme en chaîne fermée simple (ponceuse vibrante)

Le schéma cinématique ci-après représente une ponceuse vibrante électroportative. Elle est animée par un moteur électrique dont le rotor entraîne en rotation l'arbre d'entrée (2) du mécanisme de transformation de mouvement. La rotation continue du moteur est ensuite transformée en rotation alternative de faible débattement par l'ensemble constitué de la noix (3) et du balancier (4). Ce dernier est lié par frottement à l'arbre de sortie de la ponceuse, guidé par un roulement à billes radial et une douille à aiguilles. La feuille abrasive est fixée sur le patin souple lié à l'arbre de sortie. La partie arrière du carter contient le système de commande et d'alimentation du moteur électrique.



- L21 :
- L32 :
- L43 :
- L41 :

nb de solides $p =$
 nb de liaisons $N_L =$
 nb cyclomatique $\mu =$

Paramètres caractérisant la position relative des pièces :

$$\theta_{21} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) \quad \theta_{41} = (\vec{x}_1, \vec{x}_4) = (\vec{y}_1, \vec{y}_4)$$

$$\overrightarrow{NB} = \mu \vec{z}_1 \quad \overrightarrow{AC} = \lambda \vec{x}_1$$

Application au support (Scies)

II APPROCHE CINEMATIQUE

But : Dégager le nombre de paramètres cinématiques à imposer afin de déterminer toute la cinématique. En déduire les lois entrées-sorties.

II.1 Fermetures cinématiques

Considérons un mécanisme comportant p solides N_c inconnues cinématiques de liaisons $N_C = \sum_{i=1}^{N_L} N_{ci}$ et

μ boucles indépendantes.

La fermeture cinématique associée à chaque boucle indépendante fournit au maximum **6 équations** par boucle. En écrivant les μ fermetures cinématiques, on obtient un système linéaire homogène comportant :

$$6\mu \text{ équations} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right]}^{N_c \text{ inconnues}} \\ \underbrace{\left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right]}_{N_c \text{ inconnues}} \end{array} \right. = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

II.2 Mobilité cinématique

II.2.1 Définition

La mobilité cinématique correspond au nombre de paramètres cinématiques à imposer afin d'obtenir une solution unique : $M_c = N_c - r_c$

A SAVOIR

M_c mobilité cinématique.

N_c nombre d'inconnues cinématiques

r_c rang du système d'équations

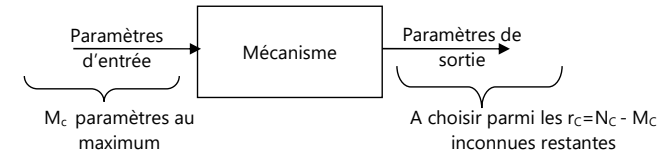
- $M_c=0$ la seule solution au système d'équations est la solution triviale, toutes les inconnues cinématiques sont nulles et la chaîne est immobile. Elle ne transmet aucun mouvement.
- $M_c>0$ Il existe alors M_c inconnues principales qui peuvent prendre des valeurs arbitraires, on dit que le mécanisme est à M_c degrés de liberté. C'est-à-dire qu'il faut fixer les valeurs de M_c paramètres pour connaître à tout instant la configuration complète du système. C'est le seul cas intéressant du point de vue de l'étude des mécanismes. Le système linéaire peut se mettre sous la forme suivante :

$$6\mu \text{ équations} \left\{ \begin{array}{l} r_c \text{ équations} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right]}^{r_c \text{ inconnues}} \\ \underbrace{\left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right]}_{M_c} \end{array} \right. \\ \overbrace{\left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right]}^{N_c} \end{array} \right. = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le rang du système d'équations cinématiques r_c correspond au nombre d'équations indépendantes permettant de déterminer les inconnues cinématiques de liaisons. Afin de le déterminer, il est nécessaire d'entamer une résolution partielle du système afin de mettre en évidence les inconnues cinématiques à imposer afin de résoudre complètement le système.

II.2.2 Loi(s) « entrée-sortie »

L'analyse du mécanisme dans son environnement industriel permet de choisir les paramètres d'entrées dont la valeur est imposée ainsi que les paramètres de sortie. On appelle « loi(s) entrée-sortie », la (ou les) relation(s) implicite(s) liant les paramètres cinématiques d'entrée e_i , les paramètres cinématiques de sortie s_i et les données géométriques G_i .



II.2.3 Mobilité cinématique utile

La mobilité cinématique utile M_{cu} d'un mécanisme est égale au nombre de paramètres cinématiques nécessaires à la détermination des lois entrée-sortie. C'est aussi égal au nombre de paramètres d'entrée.

II.2.4 Mobilité cinématique interne

Les pièces internes à un mécanisme peuvent présenter des mouvements qui n'ont aucune influence sur les lois entrée-sortie.

La mobilité cinématique interne M_{ci} est égale au nombre d'inconnues cinématiques à imposer afin que toutes les pièces internes au mécanisme soient dans une position parfaitement définie.

II.2.5 Synthèse

La mobilité cinématique se compose donc des mobilités cinématiques utiles et internes.

$$M_c = M_{cu} + M_{ci} \quad M_{cu} \text{ mobilité cinématique utile} \quad \text{A SAVOIR}$$

$$M_{ci} \text{ mobilité cinématique interne}$$

Application au support (Scies)

Bilan

Inconnues cinématiques		$N_c =$
Rang cinématique supposé		$r_c =$
Mobilité du mécanisme		$M_c =$
Paramètre d'entrée donné		
Paramètres cinématiques inconnus		

III APPROCHE STATIQUE

But : Savoir si les efforts extérieurs étant connus, on est capable de déterminer toutes les actions mécaniques de liaisons. Si tel n'est pas le cas, alors le mécanisme est dit « hyperstatique ».

III.1 Application du PFS

On se place dans une position d'équilibre du mécanisme avec des liaisons parfaites. Une étude dynamique serait décrite de la même manière.

Considérons un mécanisme comportant :

- p solides, N_s inconnues d'actions mécaniques de liaisons $N_s = \sum_{i=1}^{N_L} n_{si}$ avec n_{si} nombre d'inconnues statique par liaison et des efforts extérieurs connus.

Remarques :

- pour une liaison parfaite (i) : $n_{ci} + n_{si} = 6$
- (p-1) isoléments peuvent être effectués en ôtant le bâti on obtient alors $6(p-1)$ équations maximum.

Le système linéaire peut se mettre sous la forme :

$$6(p-1) \text{ équations} \left\{ \begin{matrix} \text{N}_s \text{ inconnues} \\ \text{N}_s \text{ inconnues} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \text{Second membre non nul} \\ \text{contenant les efforts} \\ \text{extérieurs} \end{matrix} \right\}$$

III.2 Degré d'hyperstatisme

Le degré d'hyperstatisme caractérise le nombre d'inconnues d'actions mécaniques à imposer afin de résoudre le système linéaire.

$$h = N_s - r_s \quad \begin{matrix} h \text{ degré d'hyperstatisme} \\ N_s \text{ nombre d'inconnues statique} \\ r_s \text{ rang du système d'équation} \end{matrix} \quad \text{A SAVOIR}$$

- h=0 Le système est dit isostatique. La seule connaissance des actions mécaniques extérieures suffit à déterminer les actions mécaniques de liaisons en appliquant le PFS.
- h>0 Le système est dit hyperstatique de degré h. Certaines actions mécaniques de liaisons ne peuvent pas être déterminées. L'analyse de ces systèmes sera développée plus tard.

$$6(p-1) \text{ équations} \left\{ \begin{matrix} r_s \text{ équations} \\ \text{N}_s \text{ inconnues} \\ \text{r}_s \text{ inconnues} \\ h \end{matrix} \right\} = \left[\right]$$

Application au support (Scies)

Le bilan est le suivant :

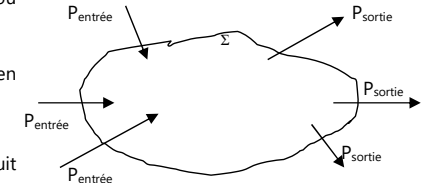
Inconnues d'inter-efforts	$N_s = \sum_{i=1}^{n+\gamma} n_{si} =$
Mobilité du mécanisme	$M_C = N_c - r_c =$
Rang statique supposé	$r_s =$
Degré d'hyperstaticité	$h = N_s - r_s =$

Le mécanisme est donc hyperstatique d'ordre h=

IV DUALITE ENTRE LES RELATIONS CINEMATIQUES ET STATIQUES

IV.1 Interprétation de la mobilité cinématique utile / efforts

Considérons un mécanisme ne dissipant pas d'énergie et où les variations d'énergie cinétique sont négligées.



La puissance fournie en entrée est entièrement retrouvée en sortie.

$$P_{ext \rightarrow \Sigma / R_G} = P_{entrée} - P_{sortie} = 0$$

On en déduit

$$P_{ext \rightarrow \Sigma / R_G} = 0 = \{T_{ext \rightarrow \Sigma}\} \otimes \{V_{\Sigma / R_G}\} = \sum_i F_i v_i + C_i \omega_i$$

La mobilité cinématique utile du mécanisme vaut M_{cu} . Soient q_j les paramètres cinématiques imposés ($j \in [1, m_{cu}]$). Alors $v_i = \sum_j \alpha_{ij} q_j$; $\omega_i = \sum_j \beta_{ij} q_j$.

Soit : $P_{ext \rightarrow \Sigma / R_G} = 0 = \sum_i \sum_j (\alpha_{ij} F_i + \beta_{ij} C_i) \cdot q_j \quad \forall q_j$ on en déduit : $\sum_i (\alpha_{ij} F_i + \beta_{ij} C_i) = 0$ avec ($j \in [1, M_{cu}]$)

Conclusion : Il y a M_{cu} relations entre les efforts entrants et sortants.

IV.2 Interprétation de la mobilité cinématique / efforts

Une mobilité cinématique interne n'intervient pas sur les lois entrée-sortie. Elle n'est donc pas pilotée (imposée) par un actionneur (exemple moteur). Il n'y a donc pas d'efforts transmis.

Conclusion : Une mobilité interne conduit à une équation du type 0=0 lors de l'application du PFS en projection suivant la direction privilégiée de la mobilité.

Exemple :

Mobilité interne du solide S_i	PFS au solide S_i
Translation de direction \vec{x}_i	Résultante à S_i en projection suivant $\vec{x}_i : 0=0$
Rotation d'axe (O, \vec{x}_i)	Moment en O à S_i en projection suivant $\vec{x}_i : 0=0$

IV.3 Interprétation d'un hyperstatisme / cinématique et la géométrie

Un hyperstatisme correspond à des actions mécaniques de liaison indéterminables par le PFS. D'un point de vue cinématique, si les paramètres de ces actions mécaniques sont différents de zéro, alors les paramètres cinématiques correspondants sont imposés à zéro (vrai si les liaisons sont parfaites).

Or, les équations issues de l'écriture des fermetures cinématique auraient permis de déterminer ces paramètres cinématiques. Dans la mesure où ils ont été imposés à zéro, il y a redondance dans le positionnement des pièces. On parle alors de liaisons surabondantes.

Les équations permettant de déterminer ces paramètres disparaissent. Le rang des équations de la cinématique est diminué du degré d'hyperstatisme h.

Influence de l'hyperstatisme au montage :

La connaissance du degré d'hyperstatisme est importante dans l'étude des mécanismes. En effet, un hyperstatisme induit des contraintes géométriques lors du montage des différentes pièces. Il s'agit d'être capable de fermer la (ou les) boucle(s).



Pour illustrer ce propos sur une chaîne fermée simple, la démarche consiste à briser artificiellement un solide, puis à essayer de repositionner les 2 parties en face l'une de l'autre afin de réaliser la liaison encastrement. Ceci consiste à positionner le solide 2 sur le solide 1 via la liaison $L_{1,2}$, puis le solide 3 sur le solide 2 via la liaison $L_{2,3}$... et on arrive au solide 0 positionné sur le solide N via la liaison $L_{N,0}$. 2 cas peuvent alors se produire :

- soit le nombre de mobilité des liaisons en série vaut 6, et alors, il est possible de bouger comme on le souhaite le solide 0 dans l'espace, et donc de le positionner parfaitement par rapport au solide 1 (on peut recoller sans problème les deux morceaux même si les pièces intermédiaires ont des défauts ce qui est le cas dans la « vraie vie » après l'opération de fabrication),
- soit le nombre de mobilité de la liaison en série est inférieur strictement à 6. Dans ce cas, à cause des défauts de fabrication des pièces intermédiaires, le solide 0 ne peut pas se retrouver dans la bonne position par rapport au solide 1.

Pour éviter les problèmes de montage, technologiquement :

- soit on réalise des liaisons avec jeu, ce qui permet de retrouver un peu de mobilité et donc de compenser les défauts de fabrication afin de monter l'ensemble des pièces (attention, les jeux ne sont pas mis au hasard, ils sont déterminés analytiquement en fonction des défauts de fabrication et réduit le plus possible afin de conserver une « qualité acceptable » du produit),
- soit on déforme les pièces lors du montage, ce qui a pour effet de rigidifier le mécanisme (il se déformera moins en utilisation) et d'augmenter les efforts de contact dans les liaisons (les calculs sont faits en modélisant les pièces par des solides déformables et nécessitent la connaissance des défauts de fabrication).

V SYNTHÈSE :

V.1 Cinématique → hyperstatisme

En conclusion on a :

- M_{Cu} équations lient exclusivement les efforts d'entrée-sortie (efforts extérieurs)
- M_{Ci} équations sont du type $0=0$.
- L'application du PFS conduit à r_s équations permettant de déterminer les inconnues de liaisons (équations principales).

$$M_C = M_{Cu} + M_{Ci} = 6(p-1) - r_s$$

A SAVOIR

Remarque : on dit que la diminution du rang statique r_s provient uniquement des mobilités cinématiques.

V.2 Hyperstatisme → cinématique

On admet : $h = 6\mu - r_C$

Remarque : on dit que la diminution du rang cinématique r_C provient uniquement de l'hyperstatisme.

VI ANALYSE GLOBALE DU DEGRÉ D'HYPERSTATISME

Les relations déterminées jusqu'à présent permettent de trouver le degré de mobilité cinématique ou le degré d'hyperstatisme à partir d'une étude analytique aboutissant aux équations cinématiques ou statiques du système.

Souvent, on recherche uniquement le caractère isostatique ou hyperstatique d'un mécanisme. L'écriture des systèmes d'équations est alors superflue. Une méthode de détermination globale du degré d'hyperstatisme est préférée.

En reprenant les équations précédentes, on obtient :

$$h = 6\mu - r_C = 6\mu + M_C - N_C$$

$$\text{Soit } \boxed{h = M_C + 6\mu - N_C} \quad (1)$$

A SAVOIR

$$h = N_S - r_S = N_S - (6(p-1) - M_C)$$

$$\text{Soit } \boxed{h = M_C - 6(p-1) + N_S} \quad (2)$$

A SAVOIR

Application au support (Scies)

$$(1) \text{ donne } \begin{cases} M_C = \\ \mu = \\ N_C = \end{cases} \Rightarrow h = M_C + 6\mu - N_C =$$

$$(2) \text{ donne } \begin{cases} M_C = \\ p = \\ N_S = \end{cases} \Rightarrow h = M_C - 6(p-1) + N_S =$$

Conclusion

Ces formules vous permettent d'éviter de devoir écrire le système d'équation cinématique ou statique et de déterminer le rang du système d'équations.

Méthode de détermination du degré d'hyperstatisme par une analyse globale:

- La mobilité cinématique est déterminée par une analyse qualitative du mécanisme (à partir du schéma cinématique). C'est la principale difficulté de cette méthode (intuition)
- Le bilan du nombre total de solides, d'inconnues cinématiques et d'actions mécaniques de liaisons se fait à partir du graphe de structure (des liaisons).
- Le degré d'hyperstatisme h du mécanisme est alors déterminé avec la formule.

Remarque : Cette méthode ne permet pas de connaître les inconnues indéterminables, juste de les dénombrer.

VII UTILISATION PRATIQUE DE LA THEORIE DES MECANISMES

VII.1 Ce qu'il faut retenir

Point de vue	Cinématique	Statique
Inconnues	$N_c = \sum_{i=1}^{N_i} n_{ci}$	$N_s = \sum_{i=1}^{N_i} n_{si}$
Équations	$E_c = 6\mu$	$E_s = 6(p-1)$
Équations indépendantes ou rang du système.	$r_c \leq 6\mu$	$r_s \leq 6(p-1)$
Mobilité / Hyperstaticité	$M_c = N_c - r_c$	$h = N_s - r_s$
Dégradation du système d'équations	$h = 6\mu - r_c$	$M_c = 6(p-1) - r_s$
Calcul de h par les formules globales	$h = M_c + 6\mu - N_c$ $h = M_c - 6(p-1) + N_s$	

VII.2 Quelle démarche choisir ?

VII.2.1 Habituellement

- **L'approche globale** en utilisant directement les équations reliant mobilités, hyperstaticité et nombres d'inconnues, au choix :

Vous verrez que la seule difficulté consiste à déterminer les mobilités du mécanisme. Je vous rappelle que $M_c = M_{cu} + M_{ci}$, avec :

- M_{cu} , le nombre de mobilités dites utiles du modèle (paramètres de mouvements que l'on retrouve dans les relations E/S, et qui sont directement liés à la fonction principale du système) ; elles sont, généralement, clairement identifiées dans le sujet,
- M_{ci} , le nombre de mobilités internes, mobilités qui correspondent à des mouvements possibles de pièces à l'intérieur du mécanisme même lorsque les mobilités utiles sont bloquées. Si elles sont souvent faciles à identifier, il existe de nombreux cas où il est nécessaire d'avoir une certaine expérience pour les détecter (il faut les « voir » à partir du schéma cinématique) ;

Donc par cette méthode, vous risquez généralement de sous évaluer les mobilités internes, ce qui revient à sous évaluer le degré d'hyperstaticité. Par contre elle est extrêmement rapide, mais elle ne permet que de déterminer M_c et h .

- **L'approche analytique** en écrivant le système d'équations cinématiques ou statiques (voir développements précédents)

L'écriture des équations de cinématique se fait bien plus rapidement que l'écriture des équations de statique (il me semble que généralement $\bullet < p - 1$). A partir de l'analyse cinématique, on identifie clairement les mobilités (internes et utiles) du modèle, mais on ne fait que déterminer le degré d'hyperstaticité (la modification du modèle afin de baisser le degré d'hyperstaticité n'est pas réellement possible). Par contre, l'approche statique permet d'identifier clairement les inconnues des torseurs statiques en relation avec l'hyperstaticité ce qui donne la possibilité de modifier le modèle pour abaisser h , mais les mobilités ne sont pas clairement identifiées.

VII.2.2 Stratégie au concours

Le choix d'une ou autre méthode dépend fortement de ce que l'on cherche, du temps imparti pour trouver le résultat, et de ce qu'on vous impose dans le sujet.

- Si vous êtes totalement libre, la méthode la plus rapide reste la méthode globale, mais les résultats que vous obtenez sont dépendants de vos facultés (« innées et acquises ») à comprendre le fonctionnement du modèle à partir du schéma cinématique.
- Les approches analytiques sont probablement plus sûres quant à la détermination de m et h (à condition qu'il n'y ait pas de fautes de calculs), mais elles sont également beaucoup plus lentes et fastidieuses. L'approche analytique cinématique est plus courte que l'approche analytique statique. Elle permet d'identifier clairement les mobilités, mais ne permet pas de « jouer » avec l'hyperstaticité, contrairement à l'approche statique.
- Si dans le sujet, on vous demande de dimensionner les liaisons, l'approche statique est obligatoire (et il est indispensable de faire intervenir les efforts extérieurs, voire même de se placer en dynamique si les quantités d'inertie peuvent influencer sur les inter-efforts de liaisons, pour déterminer les inconnues des torseurs des inter-efforts du système en fonctionnement). Dans ce cas, comme toutes les équations sont déjà écrites, il ne reste plus qu'à analyser le système d'équations pour déterminer l'hyperstaticité et les mobilités.

VII.3 Comment rendre un mécanisme isostatique ?

La méthode la plus classique consiste à supprimer les inconnues hyperstatiques, donc à rajouter des degrés de liberté dans une ou plusieurs liaisons.

Application au support (Scies)

Conclusion :