VÉRIFICATION DES PERFORMANCES D'UN SLCI

Les performances d'un système asservi peuvent être obtenues par 4 critères principaux : stabilité, précision, rapidité, amortissement. Jusqu'à présent, les critères étaient simplement qualitatifs, nous allons dans ce chapitre quantifier et prévoir les performances d'un SLCI.

I STABILITÉ

I.1 Analyse temporelle de la stabilité

I.1.1 Définitions

<u>Mise en évidence</u> : Écartement de sa position d'équilibre : culbuto, pendule inverse (Segway),
La définition de la stabilité peut prendre plusieurs formes équivalentes pour un système linéaire :

- Un système est stable si à une entrée bornée correspond une sortie bornée
- Un système est dit stable si sa réponse impulsionnelle tend vers 0 à l'infini
- Un système est stable si, après qu'une perturbation l'ait écarté de sa position d'équilibre, il revient spontanément à cette position (par exemple, c'est le cas du pendule, masse en bas).

Définition mathématique :
Nous avons vu qu'un SLCI (simple ou complexe) était caractérisé par une équation différentielle à coefficients constants : $a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \cdots\ a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \cdots\ b_0 e(t)$

La solution de cette équation différentielle est la somme d'une **solution particulière et d'une solution de l'équation sans second membre.** La solution particulière est de même nature que l'entrée e(t). Ainsi, elle ne diverge pas si e(t) ne diverge pas. On s'intéresse donc à la solution de l'équation sans second membre : $a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \cdots\ a_0 s(t) = 0$. On cherche une solution sous la forme $s(t) = K\ e^{(rt)}$, on a : $a_n\, r^n\, K\ e^{(rt)} + a_{n-1}\, r^{n-1}\, K\ e^{(rt)} + \ldots + a_0\, K\ e^{(rt)} = 0$. On obtient alors une équation faisant intervenir le **polynôme caractéristique** : $a_n\, r^n + a_{n-1} \ldots + a_0 = \sum_{i=0}^{i=n} a_i\, r^i = 0$. Soit r_i les racines (réelles ou complexes) de ce polynôme. La solution de l'équation sans second membre s'écrit alors : $\sum_{i=0}^{i=n} K_i\, e^{(r_i\, t)}$.

Pour chaque racine, deux cas peuvent se présenter :

- une racine r_i est réelle
  - si $r_i > 0$ alors $\lim_{t \to \infty} K_i\, e^{(r_i\, t)} = \infty$
  - si $r_i < 0$ alors $\lim_{t \to \infty} K_i\, e^{(r_i\, t)} = 0$
- une racine est complexe. Si la racine $(r = \alpha + j\ \beta)$ est connue, il existe alors $\bar{r} = \alpha - j\ \beta$ la racine complexe conjuguée, les solutions correspondant à ces racines sont :
  $K_1\, e^{(\alpha\, t)}\, e^{(j\, \beta\, t)} + K_2\, e^{(\alpha\, t)}\, e^{(-j\, \beta\, t)}$ soit $e^{(\alpha\, t)} \left(K_1\, e^{(j \beta\, t)} + K_2\, e^{(-j\, \beta\, t)} \right)$
  Cette expression est majorée par $e^{(\alpha\, t)} \left(|K_1| + |K_2| \right)$
  - si $\alpha > 0$ la limite tend vers l'infini.
  - si $\alpha < 0$ la limite tend vers 0.

Expl : Trouver s(t) en considérant que e(t) est une impulsion d'amplitude 1 :

$$H_{BF}(p) = \frac{2p^2 + 5p + 13}{(p+3)\left(2p^2 + 2p + 4\right)}$$

Remarques :

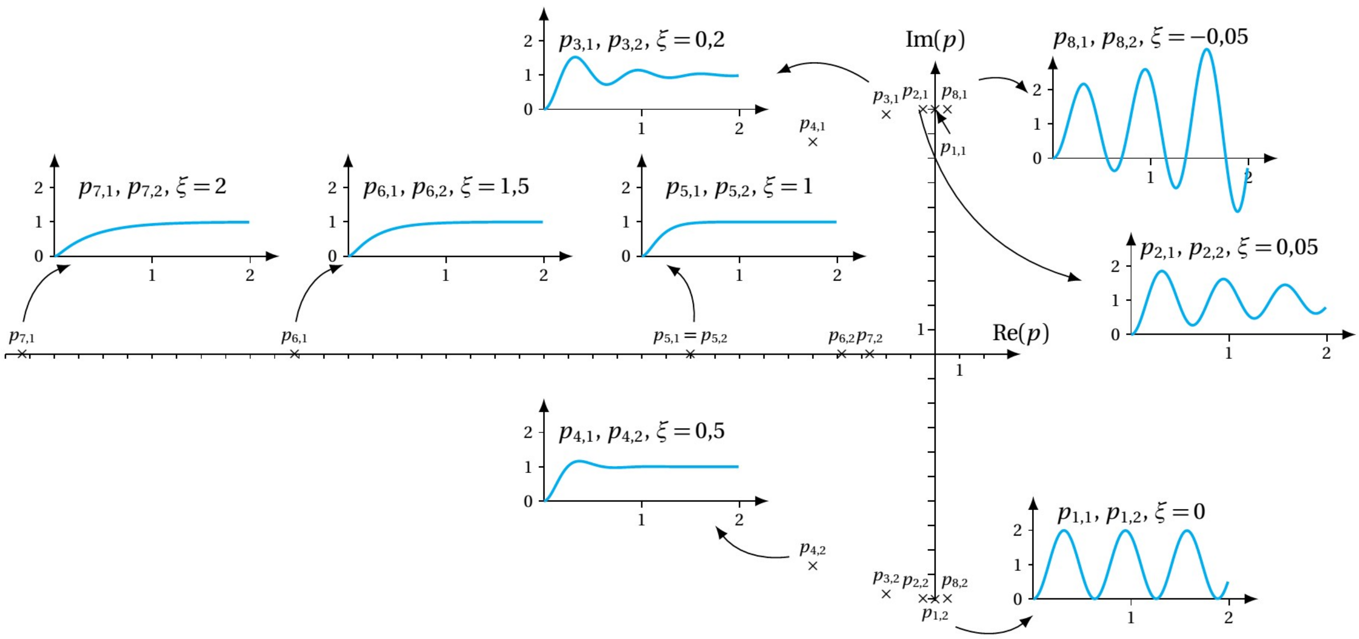
- Pour un système stable, la solution générale de l'équation sans second membre disparaît au cours du temps. Cette solution représente le régime transitoire alors que la solution particulière de l'équation complète représente le régime permanent qui subsistera seul lorsque le régime transitoire aura disparu.
- Cet énoncé ne permet pas de qualifier le comportement d'un système asservi. En effet, un système très mal amorti sera stable au sens strict du terme, mais jugé d'une stabilité insuffisante (mauvais amortissement). En d'autres termes, il sera nécessaire d'aller au delà de cette définition pour préciser la qualité de la stabilité d'un système donné.

I.1.2 Condition sur la fonction de transfert

A partir de l'équation différentielle, on définit la fonction de transfert $H(p)=\sum_{k=1}^{k=m} b_k\, p^k / \sum_{i=1}^{i=n} a_i\, p^i$. On constate que le polynôme caractéristique est le dénominateur de la fonction de transfert du système. Les racines du polynôme caractéristique sont les pôles de la fonction de transfert.

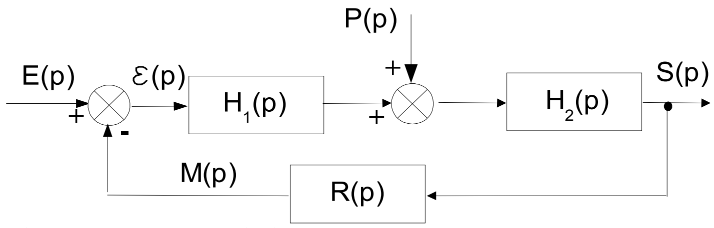
Pour qu'un système soit stable, il faut que les pôles de sa fonction de transfert en boucle fermée soient à partie réelle strictement négative.

Le graphique ci contre résume la relation qui existe entre le lieu des pôles dans le plan complexe et le comportement temporel (réponse impulsionnelle) du sous-système associé. On vérifie que la réponse impulsionnelle tend vers 0 (et donc le système est stable) uniquement lorsque la partie réelle des pôles est strictement négative (cadran gauche du plan complexe).



I.2 Analyse fréquentielle de la stabilité

On considère un système perturbé par une perturbation additive P(p).



On a : $S(p)=\dfrac{H_1(p).H_2(p)}{1+FTBO(p)}.E(p)+\dfrac{H_2(p)}{1+FTBO(p)}.P(p)$

Le dénominateur de la fonction de transfert reliant la perturbation à la sortie est le même que celui de la fonction de transfert reliant l'entrée de consigne à la sortie. L'étude des pôle de la FTBF donne les mêmes résultats quelle que soit l'entrée ou la perturbation considérée.

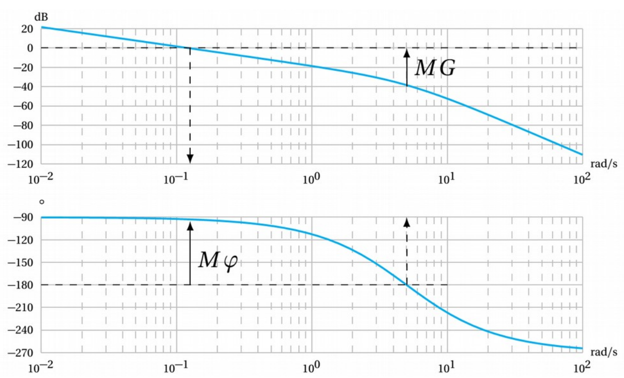
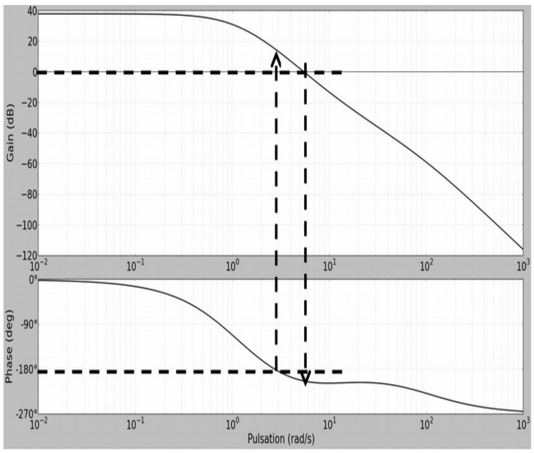
Un système stable pour une consigne d'entrée restera stable quelle que soit la perturbation additive d'entrée.
On appelle **équation caractéristique** du système l'expression : $1+FTBO(p)=0$.
Le système est en limite de stabilité si $FTBO(p)=-1$.
On appelle **point critique** le point du plan complexe d'affixe z=-1 (module 1 et argument -180°).
On constate que l'étude du dénominateur des fonctions de transfert en boucle fermée revient à analyser la FTBO par rapport au point -1.

I.2.1 Critère du Revers

La plupart des systèmes rencontrés dans l'industrie ont très souvent une FTBO dont les pôles sont à parties réelles strictement négative. Dans ce cas on utilise le **critère du Revers**. Celui-ci correspond à des énoncés différents en fonction du lieu de la FTBO considéré.
Ce critère n'est valable que lorsque la FTBO dont les pôles sont à parties réelles strictement négative., si cette condition n'est pas respectée on ne peut statuer que si on étudie les pôles de la FTBF associé.

Critère du Revers :

- **Pour la pulsation ou le gain vaut 0 dB la phase doit être supérieure à -180° , équivaut à si pour $\omega=\omega_{c0}$ tel que $|FTBO(j\omega)|=1$, on a $\arg(FTBO(j\omega_{c0}))>-180°$**
- **Pour la pulsation ou la phase vaut -180° le gain doit être inférieur à 0 dB, , équivaut à si, pour $\omega=\omega_0$ tel que $\arg(FTBO(j\omega_0))=-180°$, on a $|FTBO(j\omega_0)|<1$**

	
Stable	Instable

I.3 Marges de stabilité

I.3.1 Définitions

Lors de la mise en équation d'un système, on constate que le modèle élaboré pour fixer ses performances (FTBO) est incertain car des hypothèses simplificatrices ont été réalisées, des bruits négligés, …
On ne connaît donc pas de manière certaine les lieux de transfert de la FTBO.
Ainsi pour avoir un système stable, il faut que :

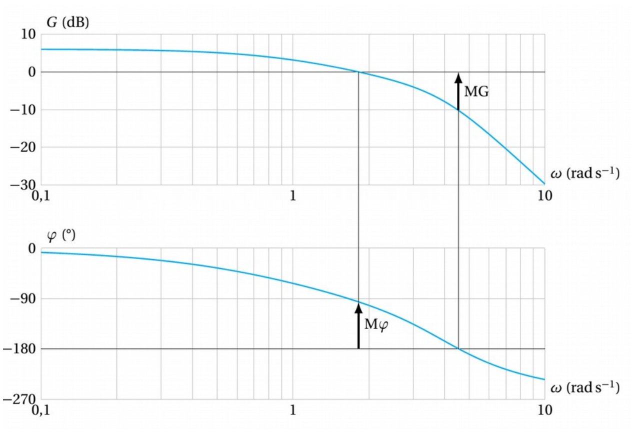
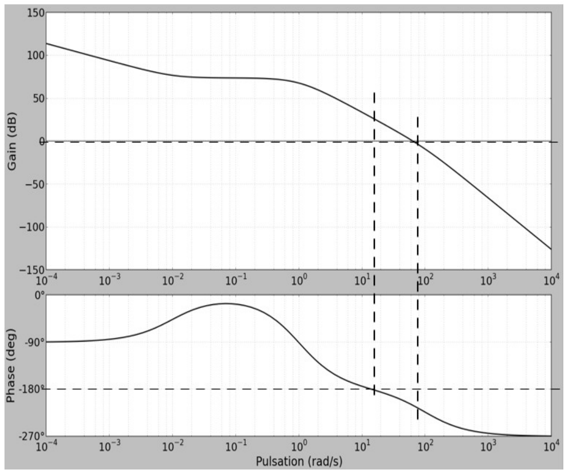
- celui-ci respecte le critère du Revers (ou plus généralement le critère de Nyquist)
- son lieu de transfert ne s'approche pas trop du point critique

Le dernier point amène à introduire des **marges de stabilité** (sur le gain et le déphasage) qui garantissent que le point critique ne sera jamais atteint même si le modèle est entaché d'erreur.

Marge de phase
La marge de phase est définie de la manière suivante :
$M_{\varphi°}=180°+\arg(FTBO(j\omega_{c0}))$ avec ω_{c0} tel que $|FTBO(j\omega_{c0})|=1$ (ω_{c0} pulsation de coupure à 0dB)
On utilise généralement une marge de phase de 45° qui garantit un fonctionnement correct de la plupart des systèmes.
Marge de gain
La marge de gain est définie par
$M_G=-20\log(|FTBO(j\omega_0)|)$ avec ω_0 tel que $\arg(FTBO(j\omega_0))=-180°$

La marge de gain est une garantie que le système restera stable malgré une variation imprévue du gain ou une imprécision sur sa valeur. Une marge de gain de 6dB permet une latitude d'un facteur 2 sur le gain en boucle ouverte. La valeur retenue est généralement comprise entre 6 et 10 dB.

I.3.2 Marges dans le plan de Bode

	
Stable	Instable

Voir Support de cours

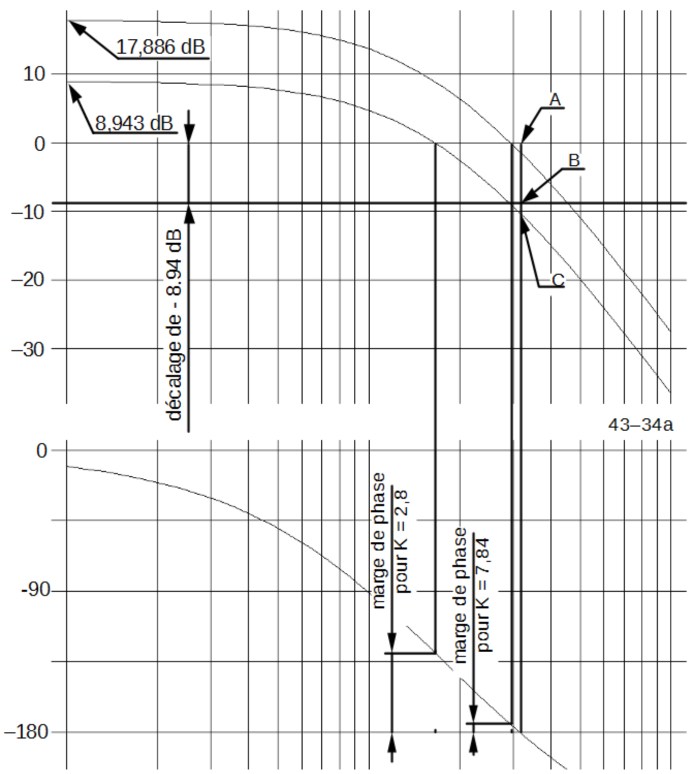
I.4 Causes d'instabilité

I.4.1 Les retards purs

Un retard pur est caractérisé par la fonction de transfert e^{-Tp}. Sa fonction de transfert admet un module égal à 1 et un déphasage (retard de phase) égal à $-T\,\omega$. Les retards existent dans tous les systèmes.

I.4.2 Les constantes de temps

Le modèle associé est celui d'un premier ordre à gain unitaire de la forme $\dfrac{1}{1+Tp}$. Elles provoquent un déphasage (retard de phase) égal à arctan(–T ω). Leur effet est similaire à celui d'un retard pur. On a en effet si T est suffisamment petit $e^{-Tp} \approx \dfrac{1}{1+Tp}$.



I.4.3 Le gain en boucle ouverte

Représentation dans le plan de BODE

Le passage d'un gain K_1 à un gain K_2 se traduit par une translation parallèle à l'axe du gain et égale au rapport des gains K_1 et K_2 exprimé en dB. Une variation de gain ne provoque aucun déphasage. Sur la représentation ci-contre d'une fonction de transfert de la forme suivante : $\dfrac{K_i}{(1+T_1\,p)(1+T_2\,p)(1+T_3\,p)}$ avec K_1 = 2,8 et K_2 = 7,84. Le segment AC représente la marge de gain pour le gain K_1 et le segment BC la marge de gain pour K_2

II RAPIDITÉ

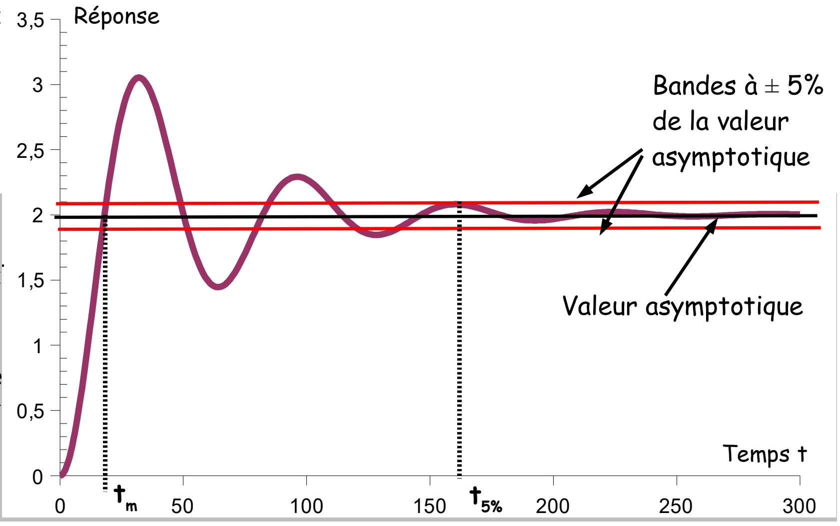
II.1 Définitions

La rapidité est une caractéristique fondamentale des systèmes asservis et caractérise le temps que met le système à réagir à une variation de la commande. Pour caractériser la rapidité d'un système, on utilise les temps de réponse à n%.

Le **temps de réponse à 5%** est défini comme le temps au bout duquel la réponse du système entre définitivement dans la zone des $\pm 5\ \%$ autour de sa valeur finale.

Le **temps de raideur ou temps de montée t_m** est l est la durée que met le signal pour passer de 10% à 90% de sa valeur en régime établi . Il est uniquement défini lorsque le régime transitoire est oscillant.

Plus ces temps sont faibles, plus le système est rapide.



II.2 Influence de l'ordre du système

II.2.1 Premier ordre

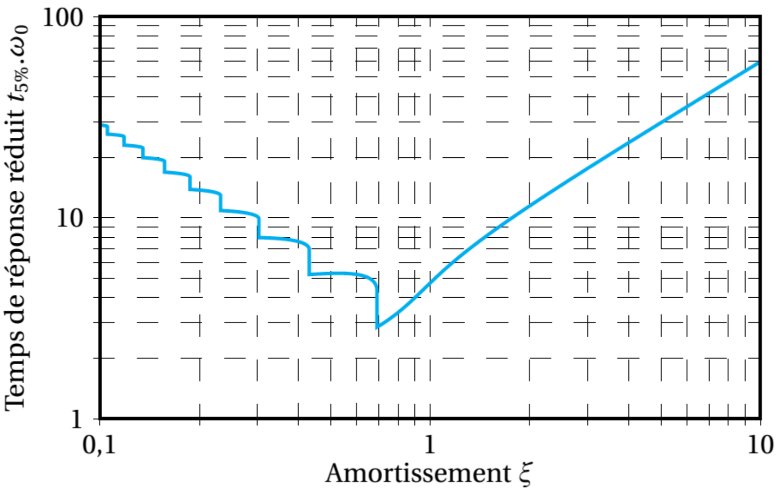
Pour un système du premier ordre, la réponse à un échelon est donnée par l'expression : $s(t) = K \cdot E_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$. **Le temps de réponse à 5% correspond donc environ à** $3\ \tau$

Ainsi plus la constante de temps est petite et plus le système sera rapide.

II.2.2 Second ordre

La recherche du temps de réponse à 5% est plus compliquée pour un système du second ordre (résolution non linéaire). Deux paramètres influencent le temps de réponse à 5%, la pulsation propre non amortie ω_0 et le coefficient d'amortissement z.

L'abaque suivant renseigne sur l'évolution des temps caractéristiques en fonction du coefficient d'amortissement du second ordre. On trace en ordonnée le temps de réponse réduit (temps adimensionnés par ω_0) $T_{réduit} = \omega_0 t_{5\%}$ (on peut également tracé $t_m\ \omega_0$).



On constate qu'un système du second ordre est le **plus rapide pour un coefficient d'amortissement de 0,69**. Dans ces **conditions** $t_{5\%} \approx \frac{3}{\omega_0}$ **on retiendra aussi que pour un coefficient d'amortissement de 1,** $t_{5\%} \approx \frac{5}{\omega_0}$.

II.3 Influence d'un bouclage

II.3.1 Système du 1er ordre

On considère un système du premier ordre à retour unitaire de $FTBO(p)=\dfrac{K}{1+\tau p}$.

La FTBF du système s'écrit : $FTBF(p)=\dfrac{K}{1+\tau p}\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{K}{1+\tau p}}\right)=\dfrac{K}{1+K}\dfrac{1}{1+\dfrac{\tau}{1+K}p}=\dfrac{K_{BF}}{1+\tau_{BF}p}$

Le système bouclé est plus rapide et le temps de réponse en boucle fermée diminue lorsque le gain de sa FTBO augmente.

<u>Rq</u> : Le bouclage n'a pas modifié l'ordre du système.
Le bouclage du système diminue le gain du système. Si le système était parfaitement précis en boucle ouverte, il devient moins précis en boucle fermée. Cependant, si le système n'était pas précis en BO, une augmentation du gain K améliorera sa précision. Le système est stable de façon inconditionnelle. C'est un premier ordre, le déphasage maxi est de 90°.

II.3.2 Système du second ordre

Pour un système du second ordre bouclé de $FTBO(p)=\dfrac{K}{1+2\dfrac{z}{\omega_0}p+\dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$, on peut montrer que la

$FTBF(p)=\dfrac{K_{BF}}{1+2\dfrac{z_{BF}}{\omega_{BF0}}p+\dfrac{p^2}{\omega_{BF0}^2}}$ avec $K_{BF}=\dfrac{K}{1+K}$, $z_{BF}=\dfrac{z}{\sqrt{1+K}}$, $\omega_{BF0}=\omega_0\sqrt{1+K}$

Un système du 2nd ordre bouclé reste donc un système du second ordre.
On constate que le coefficient d'amortissement est plus faible pour le système bouclé que le coefficient d'amortissement de la FTBO z_{BF}<z. On a vu que le temps de réponse était minimum pour un facteur d'amortissement de 0,69.

- C'est à dire que si z_{BF} reste supérieur à 0.69, le temps de réponse réduit $\omega_{BF0}t_{5\%}$ va diminuer. Or, $\omega_{BF0}<\omega_0$ donc le système est bien plus rapide.
- Si z_{BF} est inférieure à 0,69 (présence d'une résonance), alors $\omega_{BF0}t_{5\%}$ va augmenter et on ne pourra pas conclure. Dans ce cas, c'est le temps de montée qu'il est préférable de prendre en compte. Celui-ci diminue tandis que le temps de réponse à 5% peut être important. Il y aura alors beaucoup d'oscillations et de dépassements dans la réponse indicielle.

En général, le temps de réponse (ou éventuellement le temps de montée) en boucle fermée diminue, ou encore la rapidité du système en boucle fermée augmente lorsque le gain de sa FTBO augmente.

II.3.3 Bande passante

On définit la bande passante à 0dB pour la FTBO comme l'intervalle de pulsations (ou de fréquences) dans lequel $|H(\omega)|\geqslant 1$ ou $G_{dB}\geqslant 0$. On note ω_{c0} la pulsation de coupure pour laquelle $G_{dB}=0$.
ω_{c0} est aussi appelé pulsation au gain unité

Pour un système du 1er ordre de $FTBO(p)=\dfrac{K}{1+\tau p}$ (avec K>1), on a $\dfrac{K}{\sqrt{1+(\tau\,\omega_{c0})^2}}=1$

soit $\omega_{c0}=\dfrac{\sqrt{K^2-1}}{\tau}$. On montre que la constante de temps du système en boucle fermée était égale à $\tau_{BF}=\dfrac{\tau}{1+K}$ ainsi, si K>>1 alors $\tau_{BF}\approx\dfrac{1}{\omega_{c0}}$.

De manière générale, plus la bande passante est grande en boucle ouverte, plus le système en boucle fermée sera rapide.

II.3.4 Notion de pôles dominants

La réponse s(t) à une entrée e(t) est une somme des différentes réponses pour chaque pôle et dépend de la nature de ces pôles. On note r_i les pôles réels de multiplicité m_i et c_j , $\bar{c}_j$ les pôles complexes conjugués de partie réelle a_j de partie imaginaires ω_j et de multiplicité n_j de la fonction de transfert $H(p)=\dfrac{S(p)}{E(p)}$.

Pour une entrée de type impulsion de Dirac (E(p)=1), S(p)=H(p). On décompose en éléments simples S(p)

$$S(p)=\sum_{i=1}^{i=k}\sum_{s=1}^{m_i}\underbrace{\frac{A_{ik}}{(p-r_i)^k}}_{\text{pôle réel } r_i \text{ de multiplicité } m_i}+\sum_{j=1}^{j=l}\sum_{t=1}^{n_j}\underbrace{\frac{B_{jt}\,p+C_{jt}}{((p-a_j)^2+\omega_j^2)^t}}_{\text{pôles complexes conjugués}}$$

En utilisant le tableau des transformées de Laplace, on peut montrer que :

$$s(t)=\sum_{i=1}^{i=k}\sum_{s=1}^{m_i}A_{ik}\frac{t^k}{(k-1)!}\exp(r_i t)+\sum_{j=1}^{j=l}\sum_{k=1}^{n_j}\exp(a_j t)[D_{jk}t^k\cos(\omega_j t)+E_{jk}t^k\sin(\omega_j t)]$$

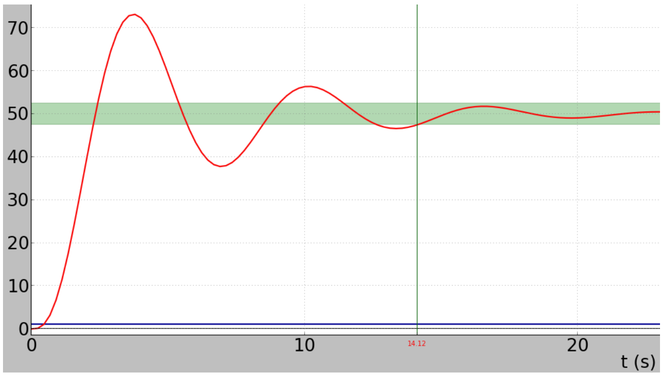
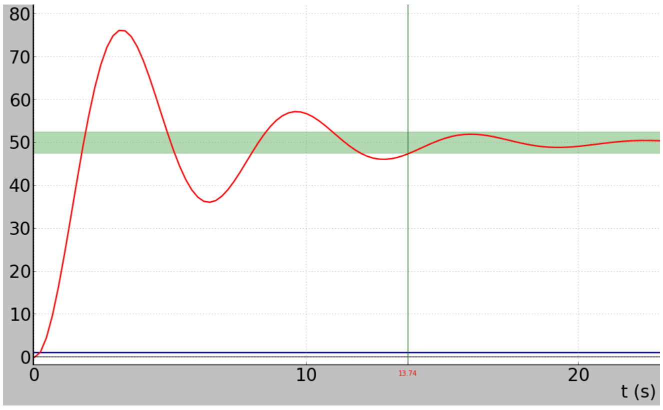
On constate ainsi que la réponse globale du système correspond à une superposition des réponses des sous-systèmes (ie de chaque fraction simple de la décomposition en éléments simples de H(p)). Ces différentes contributions sont appelées les **modes** du système. La contribution de ces sous-systèmes varie selon la position du pôle correspondant.

En effet, plus un pôle a une partie réelle grande et plus il influencera la réponse globale du système. Au contraire, la contribution d'un pôle à partie réelle petite ("très négative") est rapidement amortie et influence peu la réponse globale du système (dès que t augmente).

Lorsque l'on étudie un système, on se contente en général de ne prendre en compte que quelques pôles, appelés **pôles dominants** (parties réelles les plus proches de 0). Cette façon de procéder aboutit à un modèle mathématique qui reflète les caractéristiques principales du système, et qui n'est pas « trop compliqué » à manipuler.

Remarques : Un pôle dit « non dominant » peut être vu (dans certain cas c'est exact) comme une constante de temps très petite donc dont l'effet disparaît très vite dans la réponse temporelle.

Exemple : Soit $H_{BF}(p)=\dfrac{50}{(1+0{,}01\ p)(1+0{,}5\ p)(1+0{,}4\ p+p^2)}$, les pôles sont donc $p_1=-100$, $p_2=-2$ et $p_{3,4}=-0{,}2\mp 0{,}98\,\boldsymbol{i}$ ici la partie réelle de $p_{3,4}$ est largement dominante regardons alors $t_{5\,\%}$ de la réponse indicielle de $H_{BF}(p)$ puis de la réponse indicielle de $H_{BFapproche}(p)=\dfrac{50}{1+0{,}4\ p+p^2}$

$H_{BF}(p)$	$H_{BFapproche}(p)$
	
$t_{5\,\%}$ = 14,12 s	$t_{5\,\%}$ = 13,74 s

Soit une variation de 2 % de la valeur.

II.3.5 Dilemme rapidité/stabilité

Pour qu'un système soit rapide, il faut que le gain de la FTBO du système soit grand, ce qui est contradictoire avec les conditions de stabilité d'un système asservi. On parle de dilemme rapidité – stabilité.

III PRÉCISION

La précision est une grandeur recherchée dans les systèmes asservis (on souhaite atteindre la valeur visée). Cette caractéristique n'a de sens que si l'entrée et la sortie sont de même nature physique (dans le cas d'un système asservi à retour unitaire, c'est toujours le cas).

III.1 Définitions

III.1.1 Écart et erreur

La précision (ou erreur) $e_R(t)$ est définie par la différence entre la consigne visée (entrée) et la valeur de sortie réelle s(t).

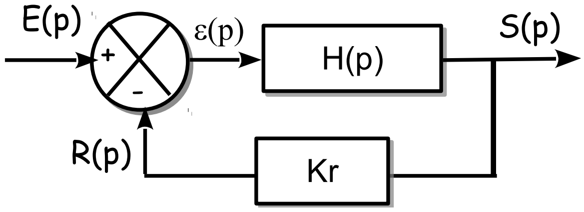
La définition de cette erreur n'a de sens que si la grandeur de sortie s(t) et l'entrée e(t) sont de même nature et d'amplitude comparable.

L'écart est défini par la grandeur ε(t) représentant la sortie du comparateur (différence entre la consigne et le retour de la boucle d'asservissement).

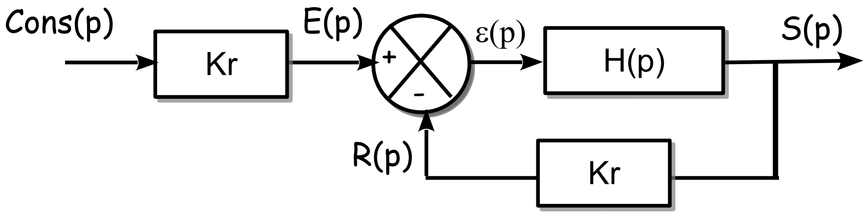
Exemple :

Considérons un système bouclé avec retour non unitaire.

L'écart vaut : ε(t)=e(t)-r(t) ou ε(p)=E(p)-R(p)



Pour que l'erreur puisse être définie, il faut que l'entrée et la sortie soit de même nature. Or la présence d'un gain différent de 1 montre qu'elles ne le sont pas. Si on souhaite faire apparaître une consigne de même nature que la sortie, il faut modifier le schéma-bloc en ajoutant un gain Kr. (Le schéma-bloc peut alors être mis sous forme de schéma-bloc à retour unitaire.)



Cons(t) correspond à la « valeur visée ». La précision a alors un sens : $e_R(t)$=cons(t) – s(t).

Comparaison entre l'écart et l'erreur : ε (t) = e(t) - r(t) = e(t) - Kr. s(t) = Kr (cons(t) - s(t))= Kr $e_R(t)$

L'écart et l'erreur ne sont pas égaux. Toutefois ils sont proportionnels et les considérations qualitatives sur l'évolution de l'erreur peuvent être obtenues par analyse de l'écart. L'erreur ainsi définie est une erreur absolue. On peut également introduire l'erreur relative en prenant $e_r(t)=\dfrac{e(t)-s(t)}{e(t)}$.

III.1.2 Erreur dynamique et statique

L'erreur statique e_{RS} est la limite à convergence de $e_R(t)$ lorsqu'elle existe : $e_{RS}=\lim\limits_{t\to\infty} e_R(t)$

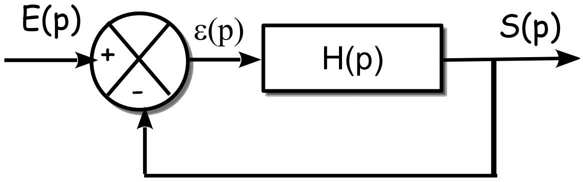
L'erreur dynamique correspond à l'évolution temporelle de l'erreur et est égal à $e_R(t)$.

Le raisonnement est identique avec l'écart.

La précision se définit vis-à-vis du type d'entrée considérée :

- Précision en position (ou régulation) : L'entrée est un échelon 1/p (le système vise une valeur constante)
- Précision en vitesse (erreur de traînage) : L'entrée est une rampe $1/p^2$ (le système suit une grandeur augmentant à vitesse constante)
- Précision en accélération : l'entrée est une parabole $1/p^3$ (le système suit une grandeur uniformément accélérée)

III.2 Détermination pratique de la précision



Considérons le cas particulier d'un retour unitaire (on peut quasiment toujours se ramener à une telle structure dans le cas d'un système asservi). L'erreur est égale à l'écart.

Pour être tout à fait général, on choisit une fonction de transfert du type : $H(p)=\dfrac{b_m p^m+b_{m-1} p^{m-1}+\cdots b_0}{p^{\%alpha}\left(a_n p^n+a_{n-1} p^{n-1}+\cdots+a_0\right)}$

dans laquelle α représente le nombre d'intégrations présentes dans la fonction de transfert en boucle ouverte (classe du système) (on a aussi $m \leqslant n+\alpha$, ce qui est vrai pour les fonctions de transfert de systèmes réels).
H(p) s'écrit sous forme canonique :

$$H(p)=\frac{b_0}{a_0}\frac{\left(\dfrac{b_m}{b_0} p^m+\dfrac{b_{m-1}}{b_0} p^{m-1}+\cdots 1\right)}{p^{\%alpha}\left(\dfrac{a_n}{a_0} p^n+\dfrac{a_{n-1}}{a_0} p^{n-1}+\cdots+1\right)}=\frac{K}{p^{\%alpha}}\frac{\left(\dfrac{b_m}{b_0} p^m+\dfrac{b_{m-1}}{b_0} p^{m-1}+\cdots 1\right)}{\left(\dfrac{a_n}{a_0} p^n+\dfrac{a_{n-1}}{a_0} p^{n-1}+\cdots+1\right)}$$

avec $K=\dfrac{b_0}{a_0}$ gain de la FTBO. On montre que $\varepsilon(p)=E(p)-S(p)=E(p)-H(p)\varepsilon(p)$. Ainsi $\varepsilon(p)=\dfrac{E(p)}{1+H(p)}$

L'évolution dynamique s'obtient en recherchant la réponse temporelle par la transformée de Laplace inverse. Bien souvent, seule l'erreur statique présentera un intérêt.
On utilise alors le théorème de la valeur finale pour calculer l'erreur statique :

$$\varepsilon(\infty)=\varepsilon_\infty=\lim_{t\to\infty}\varepsilon(t)=\lim_{p\to 0} p\cdot\varepsilon(p)=\lim_{p\to 0} p\cdot\frac{E(p)}{1+H(p)}$$

Si l'on note $E(p)=\dfrac{1}{p^q}$ avec q=1 pour un échelon unitaire, q=2 pour une rampe, q=3 pour une parabole, on a alors :

$\varepsilon_\infty=\lim\limits_{p\to 0}\dfrac{1}{p^{q-1}}\cdot\dfrac{1}{1+H(p)}$ En utilisant la forme générale de H(p), on a alors : $\varepsilon_\infty=\lim\limits_{p\to 0}\dfrac{1}{p^{q-1}}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{K}{p^\alpha}}$

On peut donc tirer les conclusions suivantes en fonction de la classe du système et du type d'entrée appliquée au système bouclé :

Entrée	Echelon d'amplitude e_0 $E(p)=e_0/p$	Rampe de pente V_0 $E(p)=V_0/p^2$	Parabole $E(p)=a_0/p^3$
Classe FTBO : 0	$\varepsilon_\infty=\dfrac{e_0}{1+K}$	$\varepsilon_\infty=\infty$	$\varepsilon_\infty=\infty$
Classe FTBO :1	$\varepsilon_\infty=0$	$\varepsilon_\infty=\dfrac{V_0}{K}$	$\varepsilon_\infty=\infty$
Classe FTBO :2	$\varepsilon_\infty=0$	$\varepsilon_\infty=0$	$\varepsilon_\infty=\dfrac{a_0}{K}$

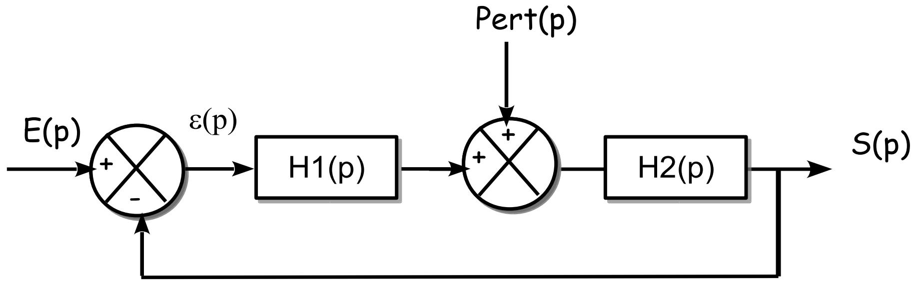
Conclusions :

- Influence du nombre d'intégrateur : Plus le nombre d'intégrateur est grand (plus la classe du système est importante) plus la précision est bonne. Si l'erreur n'est pas nulle, on pourra envisager d'ajouter dans le système un ou plusieurs intégrateurs (correcteur intégral).
- Influence du gain en boucle ouverte K : Si l'erreur n'est ni infinie ni nulle, l'erreur sera d'autant plus petite que le gain statique (K) de la FTBO sera grand. Il est donc envisageable d'ajouter dans le système un correcteur proportionnel.

Support de cours

III.3 Influence d'une perturbation

Prenons l'exemple d'un système asservi, à retour unitaire, dans lequel une perturbation est introduite après le bloc représentant la fonction principale du système ($H_1(p)$). Ce système est modélisé par le schéma-bloc ci-contre avec $H1(p)=\frac{K_1}{p^{\alpha_1}}\frac{N_1(p)}{D_1(p)}$ et $H2(p)=\frac{K_2}{p^{\alpha_2}}\frac{N_2(p)}{D_2(p)}$ avec $\lim\limits_{p\to 0}\frac{N_i(p)}{D_i(p)}=1$ et $\alpha_i \geqslant 0$



$$S(p)=\frac{H1(p)\cdot H2(p)}{1+H1(p)\cdot H2(p)}\cdot E(p)+\frac{H2(p)}{1+H1(p)\cdot H2(p)}\cdot Pert(p)$$

Avec $\varepsilon(p)=E(p)-S(p)$ on a

$$\varepsilon(p)=\frac{1}{1+H1(p)\cdot H2(p)}\cdot E(p)-\frac{H2(p)}{1+H1(p)\cdot H2(p)}\cdot Pert(p)$$

Le terme de l'erreur qui dépend de E(p) est appelé : **erreur en poursuite** (car l'entrée est généralement variable). C'est l'erreur étudiée au paragraphe précédent.
Le terme de l'erreur qui dépend de la perturbation (Pert(p)) est appelé : **erreur en régulation** (car la perturbation est souvent constante).

Là encore, la propriété de linéarité nous permet d'étudier chacun des deux termes séparément, puis de sommer (dans le domaine temporel) les résultats obtenus.

Choisissons une perturbation de la forme : $Pert(p)=\frac{A}{p^r}$ et étudions l'erreur en régulation.

$\varepsilon_{reg}(p)=-\frac{H2(p)}{1+H1(p)\cdot H2(p)}\cdot\frac{A}{p^r}$ d'où $\varepsilon_{reg,\infty}=\lim\limits_{p\to 0} p\cdot\varepsilon_{reg}(p)=\lim\limits_{p\to 0}-\frac{H2(p)}{1+H1(p)\cdot H2(p)}\cdot\frac{A}{p^{r-1}}$

Or un équivalent de H2(p) quand p tend vers 0 est $\frac{K_2}{p^{\alpha_2}}$ et un équivalent de H1(p) quand p tend vers 0 est $\frac{K_1}{p^{\alpha_1}}$

$$\varepsilon_{reg,\infty}\sim-\frac{A}{p^{r-1}}\frac{K_2\,p^{\alpha_1}}{K_2\,K_1+p^{\alpha_2+\alpha_1}}$$

Cas 1 : $\alpha_1+\alpha_2=0$ l'erreur en régulation est équivalente à : $\varepsilon_{reg,\infty}\sim-\frac{A.\,K_2}{K_1\,.\,K_2+1}\,p^{\alpha_1+1-r}$

Rq : l'erreur en poursuite ne peut pas être nulle, ce cas n'a pas d'intérêt en pratique

Cas 2 : $\alpha_1+\alpha_2\neq 0$, on a $\varepsilon_{reg,\infty}\sim-\frac{A}{K_1}\,p^{\alpha_1-(r-1)}$. Une éventuelle intégration après la perturbation n'a pas d'influence sur la précision vis-à-vis de la perturbation.

Conclusions :

- $\alpha_1>r-1$ (le nombre d'intégrateur avant la perturbation est supérieur ou égal à la classe de la perturbation), alors l'erreur statique est nulle
- $\alpha_1=r-1$, alors l'erreur statique est non nulle mais finie : $\varepsilon_{reg,\infty}\sim-\frac{A}{K_1}$.
- $\alpha_1<r-1$ alors l'erreur statique est infinie.

Ainsi, l'ajout d'intégrateurs dans la chaîne d'action avant la perturbation permet d'en éliminer les effets (le nombre d'intégrateurs doit être compatible avec la nature de la perturbation)

Exemple : Pour une entrée en échelon et une perturbation en échelon, il faut pour être :
- précis vis à vis de la consigne : au moins un intégrateur dans la FTBO
- précis vis à vis de la perturbation : un intégrateur avant la perturbation

Rq : Il est recommandé dans un sujet d'utiliser les conclusions précédentes (présence d'intégrateurs en amont de la perturbation) pour savoir si l'erreur en régulation est nulle, infinie ou finie. Si l'erreur est finie, il est préférable de refaire le calcul (détermination de l'erreur puis utilisation du théorème de la valeur finale).

Support de cours

III.4 Dilemme stabilité/précision

Pour qu'un système soit précis de manière statique (écart en position), il faut qu'il possède une intégration dans sa boucle ouverte, en amont de la perturbation si l'on souhaite qu'il soit précis vis à vis de la perturbation, ainsi qu'un gain fort. Cette intégration diminue la marge de phase et peut conduire à l'instabilité, comme l'augmentation du gain. C'est le dilemme stabilité-précision.

Conclusion : Vous êtes maintenant capable de prévoir les performances d'un SLCI. Il restera maintenant à savoir comment améliorer les performances. Ce sera l'objectif du chapitre sur la correction des SLCI.