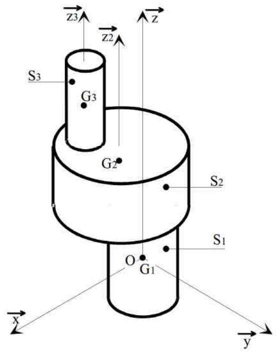
GRANDEURS DE MASSE ET D'INERTIE



I. Masse – Centre d'inertie d'un système de solide

I.1. Notion de masse

La masse d'un système de solides (ou système matériel) caractérisent la quantité de matière qu'il contient.

$$\begin{cases} m(E) = \int_{(E)} dm(E) \\ m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2) \end{cases}$$ L'unité de masse est le kg.

I.2. Centre d'inertie

Le centre d'inertie d'un système de solides matériels (E) est le barycentre G_E des masses, $\int_E \overrightarrow{GP}\rho_{(P)}\, dv_{(P)} = \vec{0}$ ou encore $\int_E \overrightarrow{GP}.dm = \vec{0}$.

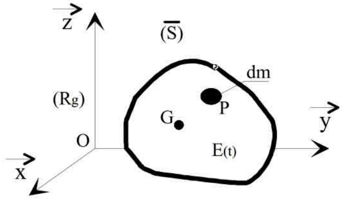
Position :
Soit O un point fixe

$$\overrightarrow{OG_E} = \frac{1}{M_{(E)}} \int_E \overrightarrow{OP}.\rho_{(P)}.dv_{(P)}$$

$\rho_{(P)}$ = masse volumique de (E) en P

$dv_{(P)}$ = volume élémentaire en P

On peut l'écrire $\overrightarrow{OG_E} = \dfrac{\int_E \overrightarrow{OP}.dm}{\int_E dm} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \overline{X_G} = \dfrac{\int \overline{X} dm}{\int dm} \\ \overline{Y_G} = \dfrac{\int \overline{Y} dm}{\int dm} \\ \overline{Z_G} = \dfrac{\int \overline{Z} dm}{\int dm} \end{array} \right.$



I.2.1. Centre d'inertie et centre de gravité

Point d'application de la résultante des efforts de pesanteur. Or le champ de pesanteur est un champ localement constant qui inclue les effets gravitationnel et centrifuge dus à la rotation de la terre.

La pesanteur est définie par: $\vec{g} = -g\vec{z}$ ($\vec{z}$ est l'axe localement vertical ascendant) donc le torseur lié à la pesanteur s'écrit en O :

$$\vec{F}_{Pesanteur} = \int_E \rho.dv.\vec{g} = M.\vec{g}$$

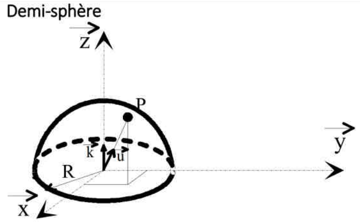
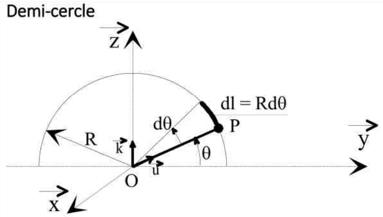
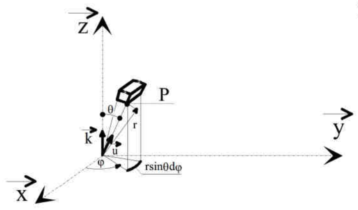
$$\overrightarrow{M}_{O,Pesanteur} = \int_E \overrightarrow{OP} \wedge \rho.dv.\vec{g} = \int_E \overrightarrow{OP}.dm \wedge \vec{g} = \overrightarrow{OG} \wedge M.\vec{g}$$

Conclusion:
Le centre d'inertie G est confondu avec le centre de gravité.

I.2.2. Cas de plusieurs systèmes matériels.

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{\sum m_i} \sum_{i=1}^{i=n} m_i \overrightarrow{AG_i}$$

I.2.3. Exemples

Demi-sphère	Demi-cercle
 $Z_G = \dfrac{3R}{8}$	
	$z_G = \dfrac{2R}{\pi}$

II. Opérateur d'inertie

II.1. Définition

Si nous considérons un solide S de masse m, et un point $A \in S$, l'opérateur d'inertie $\overline{\overline{J}}_{(A,S.dans.Rs)}$ est l'opérateur linéaire qui, appliqué à un vecteur $\vec{u}$ quelconque, nous donne l'expression vectorielle suivante :

$$\overline{\overline{J}}_{(A,S.dans.Rs)}.\vec{u} = \int_{M \in S} \left[\overrightarrow{AM} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM} \right) \right] dm$$

II.1.1. Linéarité de cet opérateur d'inertie.

Considérons O un point particulier de S et P un point quelconque de S

$$\overline{\overline{J}}_{(O,S.dans.Rs)} = \int_S \left[\overrightarrow{OM} \wedge \left((\alpha.\vec{u}_1 + \beta.\vec{v}_1) \wedge \overrightarrow{OM} \right) \right] dm = \int_{M \in S} [\overrightarrow{OM} \wedge (\alpha.\vec{u}_1 \wedge \overrightarrow{OM} + \beta.\vec{v}_1 \wedge \overrightarrow{OM})] dm$$

$$= \int_S \left[\overrightarrow{OM} \wedge (\alpha.\vec{u}_1 \wedge \overrightarrow{OM})dm\right] + \int_S \left[\overrightarrow{OM} \wedge (\beta.\vec{v}_1 \wedge \overrightarrow{OM})dm\right]$$

$$= \alpha \int_S \left[\overrightarrow{OM} \wedge (\vec{u}_1 \wedge \overrightarrow{OM})dm\right] + \beta \int_S \left[\overrightarrow{OM} \wedge (\vec{v}_1 \wedge \overrightarrow{OM})dm\right]$$

II.2. Matrice d'inertie d'un solide S en B quelconque d'une base R∈S

II.2.1. Calcul des éléments de la matrice d'inertie

Considérons l'opérateur d'inertie $\overline{\overline{J}}_{(O,S.dans.Rs)}.\vec{u} = \int_{M \in S} \left[\overrightarrow{OM} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OM}\right)\right].dm$ et la base : $R \rightarrow (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

Posons $\overrightarrow{OM} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$ et $\vec{u} = \alpha.\vec{x} + \beta.\vec{y} + \gamma.\vec{z}$

$$\overline{\overline{J}}_{(O,S.dans.Rs)}.\vec{u} = \int_S (x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}) \wedge [(\alpha.\vec{x} + \beta.\vec{y} + \gamma.\vec{z}) \wedge (x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z})]\, dm$$

$$= \int_S (x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}) \wedge \begin{vmatrix} \vec{x}(\beta z - \gamma y) \\ \vec{y}(-\alpha z + \gamma x) \\ \vec{z}(\alpha y - \beta x) \end{vmatrix} dm = \int_S \begin{bmatrix} \vec{x}[y(\alpha y - \beta x) - z(\gamma x - \alpha z)] \\ \vec{y}[z(\beta z - \gamma y) - x(\alpha y - \beta x)] \\ \vec{z}[x(\gamma x - \alpha z) - y(\beta z - \gamma y)] \end{bmatrix} dm$$

$$\overline{\overline{J}}_{(O,S.dans.Rs)}.\vec{u} = \int_S \begin{bmatrix} \vec{x}[\alpha y^2 - \beta xy + \alpha z^2 - \gamma xz] \\ \vec{y}[\beta z^2 - \gamma yz + \beta x^2 - \alpha yx] \\ \vec{z}[\gamma x^2 - \alpha zx + \gamma y^2 - \beta zy] \end{bmatrix} dm$$

$$= \begin{bmatrix} \int(y^2+z^2)\,dm & -\int xy\,dm & -\int xz\,dm \\ -\int yx\,dm & \int(z^2+x^2)\,dm & -\int yz\,dm \\ -\int zx\,dm & -\int zy\,dm & \int(x^2+y^2)\,dm \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}_{R(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

On note $\overline{\overline{J}}_{(O,S.dans.Rs)} = \underset{O}{\overset{\text{Matrice d'inertie de S en O dans R}}{\begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}}}_{(\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{k}_3)}$

A = Moment d'inertie de S par rapport à l'axe $O\vec{x}$

B = Moment d'inertie de S par rapport à l'axe $O\vec{y}$

C = Moment d'inertie de S par rapport à l'axe $O\vec{z}$

D = Produit d'inertie de S par rapport aux axes $(O\vec{y}, O\vec{z})$

E = Produit d'inertie de S par rapport aux axes $(O\vec{z}, O\vec{x})$

F = Produit d'inertie de S par rapport aux axes $(O\vec{x}, O\vec{y})$

II.2.2. Propriétés de la matrice d'inertie

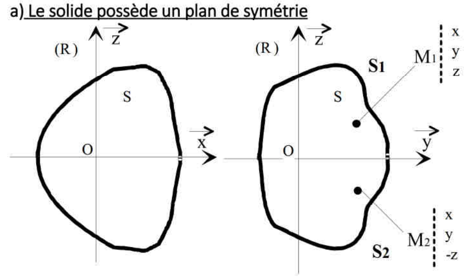
- la matrice d'inertie est **symétrique**
- Une matrice d'inertie d'un solide S dans une base $R\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ étant réelle et symétrique, il existe une base $R'\ (\vec{x}', \vec{y}', \vec{z}')$ telle que la matrice soit diagonale; c'est à dire, une matrice dont tous les produits d'inertie sont nuls. En un point O

$$\overline{\overline{J}}_{(O,S.dans.R')} = \underset{O}{\begin{bmatrix} A' & 0 & 0 \\ 0 & B' & 0 \\ 0 & 0 & C' \end{bmatrix}}_{R'(\vec{x}',\vec{y}',\vec{z}')}$$

Les axes principaux d'inertie sont les axes du trièdre principal d'inertie. Les moments principaux d'inertie sont A', B', C' de la matrice d'inertie diagonale définie dans la base $R'\ (\vec{x}', \vec{y}', \vec{z}')$ et **le repère principale d'inertie se trouve au centre d'inertie G du solide.**

- <u>Symétries matérielles d'un solide S</u>

a) <u>Le solide possède un plan de symétrie</u>



Si le plan $(O\vec{x}, O\vec{y})$ est un plan de symétrie matérielle de S, les 2 produits d'inertie D et E sont alors nuls. On a

$$\overline{\overline{I}}_{(O,S,R)} = \underset{O}{\begin{bmatrix} A & F & 0 \\ F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}}_{R(\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z})}$$

Soit S_1 la partie de S correspondante à z positif et S_2 la partie de S correspondante à z négatif.

Soit M_1 (x,y,z) ∈ S_1 et M_2 (x,y,-z) ∈ S_2

M_2 est symétrique de M_1 par rapport au plan $(O\vec{x}, O\vec{y})$

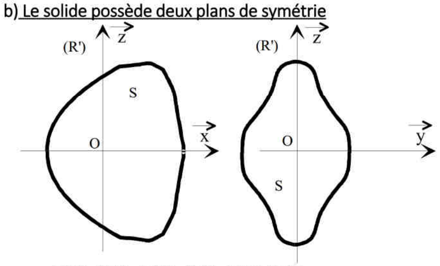
Les produits d'inertie D et E ont pour valeur:

$$D = \int_{S_1} yz\,dm + \int_{S_2} yz\,dm = \int_S [yz + (-yz)]\,dm = 0$$

$$E = \int_{S_1} xz\,dm + \int_{S_2} xz\,dm = \int_S [xz + (-xz)]\,dm = 0$$

<u>Conséquence:</u> L'axe $(O\vec{z})$, ⊥ au plan de symétrie $(O\vec{x}, O\vec{y})$ est un axe principal d'inertie.

b) <u>Le solide possède deux plans de symétrie</u>



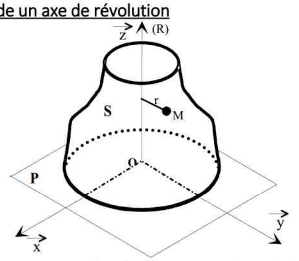
Si deux plans parmi les 3 plans $(O\vec{x}, O\vec{y})$ $(O\vec{y}, O\vec{z})$ $(O\vec{z}, O\vec{x})$, sont des plans de symétrie matérielle, les 3 produits d'inertie D, E, et F sont alors nuls, et le repère $R\ (\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z})$ défini par les intersections respectives des 3 plans est principal d'inertie.

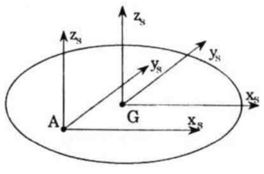
Le plan $(O\vec{x}, O\vec{y})$ est un plan de symétrie de S.

Le plan $(O\vec{z}, O\vec{x})$ est un plan de symétrie de S.

$$\overline{\overline{I}}_{(O,S,R)} = \underset{O}{\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}}_{R(\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z})}$$

c) Le solide possède un axe de révolution





Si $(O\vec{z})$ est un axe de révolution pour le solide S, les moments d'inertie A et B par rapport aux axes $(O\vec{x})$ et $(O\vec{y})$ sont alors égaux et tous les produits d'inertie sont nuls.

$$\overline{\overline{I}}_{(O,S,R)} = {}_{O}\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{R(\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z})}$$

$$C = \int_S (x^2+y^2)dm = \int_S r^2 dm = 2\int_S x^2 dm = 2\int_S y^2 dm$$

$$A = \int_S (y^2+z^2)dm = \int_S y^2 dm + \int_S z^2 dm = B = \frac{C}{2} + \int_S z^2 dm$$

II.3. Théorème de Huygens

But : déterminer la matrice d'inertie de S en A à partir de $\overline{\overline{J}}_{(G,S.dans.Rs)}$ avec G, le centre d'inertie.

$$\overline{\overline{J}}_{(A,S.dans.Rs)}.\vec{u} = \int_{M\in S} \left[\overrightarrow{AM}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AM}\right)\right].dm \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GP}$$

$$\overline{\overline{J}}_{(A,S.dans.Rs)}.\vec{u} = \int_{M\in S} \left[\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GM}\right)\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AM}\right)\right].dm = \int_{M\in S} \left[\overrightarrow{AG}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AM}\right)\right].dm + \int_{M\in S} \left[\overrightarrow{GM}\wedge\left(\vec{u}\wedge\underbrace{\overrightarrow{AM}}_{\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GM}}\right)\right].dm$$

$$\overline{\overline{J}}_{(A,S.dans.Rs)}.\vec{u} = \overrightarrow{AG}\wedge\left(\vec{u}\wedge\underbrace{\left(\int_S \overrightarrow{AM}\,dm\right)}_{m_S\overrightarrow{AG}}\right) + \underbrace{\left(\int_S \overrightarrow{GM}\,dm\right)}_{\vec{0}}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG}) + \underbrace{\int_S \overrightarrow{GM}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{GM})\,dm}_{\overline{\overline{J}}(G,S.dans.Rs)\,\vec{u}}$$

Donc $\overline{\overline{J}}_{(A,S.dans.Rs)} = \overline{\overline{J}}_{(G,S.dans.Rs)} + m_S\overrightarrow{AG}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AG})$

Conclusion : La matrice d'inertie en A de S s'exprime à partir de la matrice d'inertie de G en S et d'une matrice d'inertie $\overline{\overline{J}}_{(A,S.dans.Rs)} = \overline{\overline{J}}_{(G,S.dans.Rs)} + \overline{\overline{J}}_{(deplacement)}$.

$$\boxed{\begin{aligned} &\overline{\overline{J}}_{(A,S.dans.Rs)}.\vec{u} = \overline{\overline{J}}_{(G,S.dans.Rs)}.\vec{u} + \overline{\overline{J}}_{(deplacement)}.\vec{u} \\ &avec \quad \overrightarrow{AG} = \begin{bmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{bmatrix} \\ &on \quad a \quad \overline{\overline{J}}_{(deplacement)} = m_{(S)}\begin{bmatrix} y_G^2+z_G^2 & -x_Gy_G & -x_Gz_G \\ -x_Gy_G & x_G^2+z_G^2 & -y_Gz_G \\ -x_Gz_G & -y_Gz_G & x_G^2+y_G^2 \end{bmatrix} \end{aligned}}$$

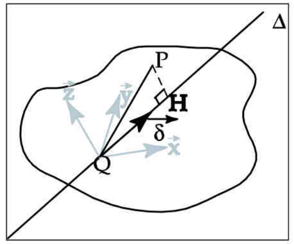
II.4. Moment d'inertie par rapport à un axe

Notons :

- $\Delta(Q;\vec{\delta})$, $\vec{\delta}$ étant unitaire
- H la projection de orthogonale de P sur Δ
- I_Δ le moment d'inertie de S par rapport à Δ

- Alors, on a :

$$\boxed{I_{S/\Delta} = \int_S \overrightarrow{PH}^2 dm_{(p)} = \vec{\delta}\,(I(Q,S)\,\vec{\delta})}$$



II.5. Moment d'inertie par rapport à un point

Le moment d'inertie dun solide (S) par rapport à un point A $I_{A,S}$ vaut par définition :

$$\boxed{I_{(A,S)} = \int_S \overrightarrow{AP}^2 dm_{(p)}}$$

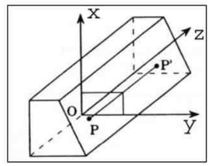
III. Applications

III.1. Cas des symétries matérielles

III.1.1. Solide possédant un plan de symétrie

S possède un plan de symétrie Π_S passant par Q_S. Choisissons un repère $R_S(Q,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ tel que le plan $(Q,\vec{x},\vec{y})$ soit confondu avec Π_S. La symétrie associe à tout point P(x,y,z) le point P'(x,y,-z). La matrice d'inertie en Q dans la base considérée s'écrit alors :

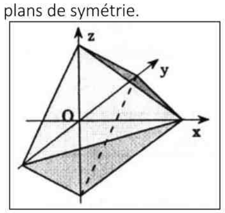
$$[I(Q,S)]\vec{u} = \begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(Q,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \vec{u}$$



III.1.2. Solide possédant deux plans de symétries

Si S possède deux plans de symétrie perpendiculaires (ce qui est le cas si il y en a deux), les produits d'inertie en Q sont nuls dans une base orthonormée dont les axes appartiennent aux plans de symétrie.

$$[I(Q,S)]\vec{u} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(Q,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \vec{u}$$

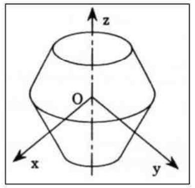


III.1.3. Solide de révolution

S présente une symétrie matérielle de révolution autour d'un axe $(Q,\vec{z})$ .La matrice d'inertie en Q dans un base contenant l'axe $\vec{z}$.

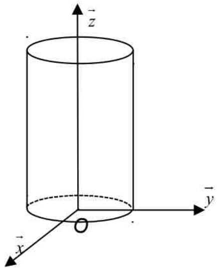
$$[\mathrm{I}(Q,S)]\vec{u} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(Q,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \vec{u}$$

$$avec \quad 2A = C + 2\int_S z^2 dm_{(p)}$$



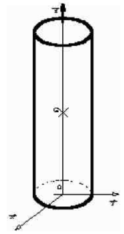
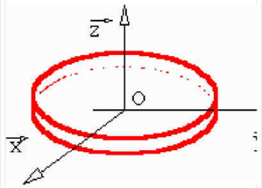
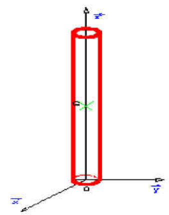
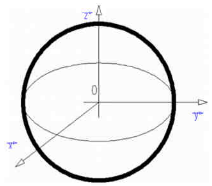
III.2. Calcul de la matrice

III.2.1. Cylindre plein et creux



Déterminer la position du centre d'inertie.
Déterminer l'opérateur d'inertie en O
Déterminer l'opérateur d'inertie en G
Déterminer la position du centre de gravité ainsi que l'opérateur d'inertie en G d'un cylindre creux de rayon extérieur R et de rayon intérieur r

QUELQUES OPÉRATEURS À CONNAÎTRE (PAR CŒUR)

Cylindre masse m longueur l rayon R symétrie de révolution axe $(O,\vec{z})$		D=E=F=0 et A=B $\bar{\bar{J}}_G(Cyl) = \begin{pmatrix} m\left(\frac{R^2}{4}+\frac{l^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\frac{R^2}{4}+\frac{l^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
Disque masse m rayon R épaisseur e symétrie de révolution axe $(O,\vec{z})$		
Tige rectiligne masse m Longueur L rayon r<<L symétrie de révolution axe $(O,\vec{z})$		
Sphère pleine masse m rayon R Symétrie sphérique		$\bar{\bar{J}}_G(Sphère) = \begin{pmatrix} 2m\frac{R^2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 2m\frac{R^2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 2m\frac{R^2}{5} \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ pour toute base.
Parallélépipède masse m